УДК 655.533:004.915

ПОБУДОВА ФРАКТАЛІВ МАТЕМАТИЧНИМИ ФОРМУЛАМИ У ВИДАВНИЧІЙ СИСТЕМІ LaTeX

Дейнеко Ж.В.
к.т.н., доцент, кафедра «Медіасистеми та технології»,
Харківський національний університет радіоелектроніки
Зелений О.П.
к.т.н., доцент, кафедра «Медіасистеми та технології»,
Харківський національний університет радіоелектроніки
Нікітенко О.М.
к.т.н., адміністратор баз даних Наукової бібліотеки,
Харківський національний університет радіоелектроніки

Анотація. *За останні роки виріс інтерес застосування методів фрактальної геометрії у різних прикладних областях. Створення фрактального зображення полягає не в малюванні, а в програмуванні вихідної фігури через її подрібнення й виконання різноманітних перетворень. У представленій роботі розглядаються алгоритми, що генерують фрактали, та їх реалізація у видавничій системі LaTeX. Викладений матеріал може бути корисним при візуалізації результатів математичного моделювання фрактальних об'єктів. У програмних засобах системи LaTeX зображення автоматично генеруються шляхом математичних розрахунків. На простих прикладах продемонстровано реалізацію фракталів у системі LaTeX з використанням пакету Tikz.*

Ключові слова: *LATEX, TIKZ, PGFPLOTS, PLOT, ФРАКТАЛ, САМОПОДІБНІСТЬ, ДЕТЕРМІНОВАНІСТЬ, МАТЕМАТИЧНІ СТРУКТУРИ, РЕКУРСИВНІ ФУНКЦІЇ.*

Вступ

Багато сучасних досліджень та публікацій про фрактали [1-6], свідчать про те, що хаотичність властива багатьом природним, соціальним та технічним явищам і системам. Тому невідомість, недостатня наочність і неоднозначність часто здаються серйозними перешкодами для дослідника-початківця, який намагається знайти спосіб адекватного математичного опису реальної дійсності. Застосування методів фрактальної геометрії передбачає ряд варіантів компактної візуалізації хитромудрих форм, складних природних процесів та явищ.

Останніми роками зростає інтерес щодо застосування методів фрактальної геометрії у різних прикладних областях. На сьогоднішній день існує велика кількість програм генерації фрактальних зображень. Зокрема, за останній час багато авторів у своїх роботах [1, 2, 5] використовують алгоритми побудови фрактальних об'єктів реалізовані у системі MATLAB за допомогою ітерованих функцій та L-систем [3-5].

У роботі [2] обговорювались методи побудови фракталів у комплексній динаміці із застосуванням Maple, розглядались алгоритми, що генерують випадкові фрактали, та їх реалізацію. Але подібні моделі фракталів мають

обмежене застосування для моделювання реальних об'єктів, тому що для них характерна властивість детермінованості.

За визначенням, фрактал – це структура, що складається з частин, які подібні до цілого. Поняття фрактал вперше ввів Бенуа Мандельброт у 1975 році для позначення нерегулярних самоподібних математичних структур [7]. Хоча перші фрактали були побудовані задовго до його народження (функція Карла Вєйєрштрасса, множина Кантора) і не сприймались багатьма великими математиками. Але тільки з часом ці перші самоподібні фрактали були належно оцінені, коли знайшли своє практичне застосування у багатьох галузях діяльності людини [7]. Фрактали є самоподібними структурами, які отримано за допомогою рекурсивних функцій, що повторюються нескінченно довго.

Традиційно фрактали поділяють на чотири групи: геометричні (конструктивні), алгебраїчні (динамічні), стохастичні, природні.

Перша група фракталів – геометричні. Це найнаочніший тип фракталів, оскільки в них відразу можна спостерігати самоподібність. Фрактали цього типу будують на базі вихідної фігури через її подрібнення й виконання різноманітних перетворень [3]. У результаті повторення цієї процедури можна отримати саме геометричний фрактал. Такі фрактали використовують у комп’ютерній графіці, для отримання зображень листів, кущів, об’ємних текстур тощо. Одним із самих типових прикладів геометричних фракталів є крива Коха. Існує багато експериментів із кривими Коха – це Острова Коха, Хрести Коха, Сніжинки Коха (див. рис. 1) і навіть тривимірні представлення кривої Коха, які використовують тетраедр і при створенні додають менші за розмірами тетраедри до кожної його грані.

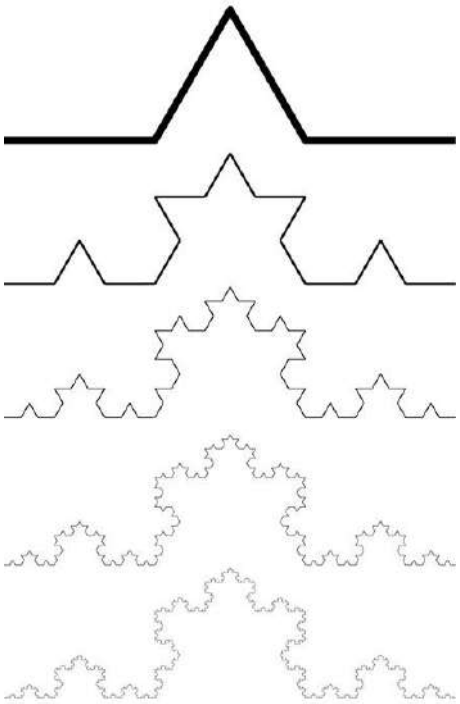

Рисунок 1 – Створення сніжинки Коха на п'ятьох рівнях ітерацій

Розглянемо тріадну криву Коха. Базовим елементом цієї кривої є утворюючий елемент (верхній малюнок на рис.1), який являє собою ламану лінію з чотирьох прямолінійних ланок, кожна завдовжки по 1/3 від відрізка одиничної довжини. Відрізок одиничної довжини береться за нульове покоління кривої Коха. Далі, алгоритм перетворення дуже простий. Кожна ланка (у нульовому поколінні один відрізок) замінюється утворюючим елементом. Внаслідок такої заміни виходить наступне покоління кривої Коха. Відповідно, 1-му поколінні – одиничний відрізок замінюється на утворюючий елемент, який складається із чотирьох ланок. Для отримання 3-го покоління кожна ланка другого покоління, замінюється на зменшений утворюючий елемент. Таким чином, для отримання кожного наступного покоління всі ланки попереднього покоління необхідно замінити зменшеним утворюючим елементом. На рис. 1 представлено п'ять поколінь кривої. При *n*, що прагне до нескінченності, крива Коха стає фрактальним об'єктом.

Друга велика група фракталів – алгебраїчні. Для побудови таких фракталів використовують ітерації нелінійних відображень, які задають доволі простими формулами. Існує два типи алгебраїчних фракталів – лінійні та нелінійні. Перші визначаються рівняннями першого порядку (лінійними), а другі – нелінійними, їхня природа є значно яскравішою, багатшою та різноманітнішою. Отримати та розрахувати такі фрактали можна за допомогою нелінійних процесів у n-мірних просторах.

Одним з найбільш відомих прикладів таких фракталів є множина Мандельброта – це фрактал, визначений як множина точок на комплексній площині, для яких ітеративна послідовність $Z_0 = 0$, $Z_{n-1} = Z_n^2 + C$ не йде на нескінченність (рис. 2). У двомірному випадку їх одержують за допомогою деякої лінії – ламаної (або в тривимірному випадку – поверхні), яка називається генератором. За один крок алгоритму кожен із відрізків, що становлять ламану, замінюється на ламану-генератор, у відповідному масштабі. В результаті нескінченного повторення цієї процедури виходить геометричний фрактал. Аналогічний алгоритм застосовується і для нелінійних алгебраїчних фракталів де генераторами можуть виступати більш складні геометричні фігури.

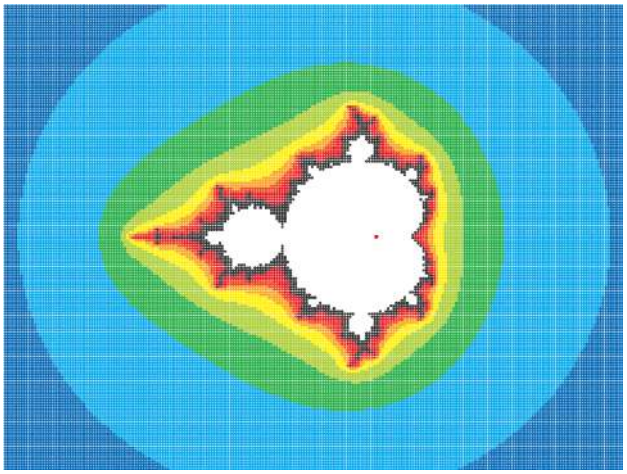

Рисунок 2 – Множина Мандельброта, створена в LaTeX

Третя група фракталів – стохастичні. Їх отримують методом випадкової зміни параметрів у ітераційному процесі. Виходячи з цього, отримують об’єкти, що є аналогічними природним фракталам – позбавлені симетрії дерева, порізані берегові лінії, горні ландшафти тощо. Такі фрактали використовують під час моделювання рельєфів місцевості, поверхні морів, процесу електролізу тощо.

Четверта група фракталів – природні, вони переважають у нашому житті, складність навколишньої нас природи тісно пов'язана з фрактальною геометрією. Такі фрактали не можуть демонструвати нескінченну самоподібність, у цьому полягає їх головна відмінність. Вже досягнуте розуміння того, що Природа не є рядом повторюваних закономірностей, але на противагу тому характеризується локальною випадковістю та глобальним порядком. Для природних фракталів у класифікаційному понятті використовують термін «фізичні фрактали», щоб підкреслити їхню «нерукотворність». Отримують такі фрактали за допомогою двох простих операцій – копіювання та масштабування. Приклади природних фракталів можна перелічувати нескінченно: кровоносна система людини, крони та листя дерев, легені тощо. Неможливо показати всю різноманітність природних фракталів.

Фрактал – це самоподібна структура, зображення якої не залежить від масштабу. Можна сказати, що фрактал – це рекурсивна модель, кожна частина якої повторює у своєму розвитку розвиток всієї моделі в цілому. Існує багато різних математичних моделей фракталів та алгоритмів їх побудов.

Властивість подібності (скейлінгу) дуже тісно пов'язана з поняттям інваріантості щодо масштабу. Самоподібність – це необхідна, але далеко не достатня властивість фракталів. Головна особливість фракталів полягає в тому, що їхня розмірність не укладається у звичні геометричні уявлення. Фракталам характерна геометрична «ізрізаність». Тому використовується спеціальне поняття фрактальної розмірності, показує, як форма або, наприклад, часовий ряд заповнюють простір. Спосіб заповнення об'єктом простору визначається тими силами, які визначили його формування. Наприклад, в економіці – для часового ряду прибутку акцій такими силами виступають мікро- і макроекономічні чинники, що впливають на очікування інвесторів.

Мета та задачі дослідження

Багато великих досягнень науки про фрактали стали можливі лише з використанням методів обчислювальної математики, яка в даний час неможлива без застосування сучасних комп'ютерів. «Комп'ютерні експерименти» дозволили отримати досить повне уявлення про різноманітні фрактальні структури та причини їх виникнення. Часто теоретичне моделювання цих структур випереджало експериментальні методи вивчення реальних природних об'єктів складної форми.

В даний час за допомогою порівняно простих алгоритмів з'явилася можливість створювати тривимірні зображення фрактальних об’єктів, що

призвело до створення фантастичних ландшафтів і форм, які здатні перетворюватися в часі призводячи до ще більш захоплюючих динамічних картини. З іншого боку, часто штучні зображення фракталів настільки схожі з природними формами, що їх неможливо відрізнити одне від одного.

За допомогою програмних засобів фрактальні зображення генеруються автоматично шляхом математичних розрахунків. Можна стверджувати, що з'явився новий вид графіки який полягає не в мистецтві малювання, а у програмуванні самоподібних структур. Цей вид графіки використовується не тільки для математичних досліджень, але і при створенні таких художніх артефактів як, наприклад, заставок на телебаченні, фону в рекламних роликах, анімаційних елементів. Базовим елементом фрактальної графіки є математична формула генератора і алгоритм побудови фрактального простору, завдяки яким і формуються двовимірні і тривимірні фрактальні зображення.

Слід зазначити, що за останні роки суттєво важливим засобом набуття знать стала наочність: за допомогою сучасних інформаційних технологій розширюється змістова сторона наочності навчання, стає можливим подавати інформацію у формі, більш придатній для активного сприйняття знань, що підвищує якість навчально-пізнавальної діяльності здобувачів вищої освіти.

А оскільки у сфері освіти приділяється велика увага створенню якісних електронних підручників, посібників, методичних вказівок для здобувачів вищої освіти та науковців, то найчастіше використовуються різні програмні засоби, за допомогою яких можна істотно спростити створення складних електронних навчально-методичних комплексів. Система LaTeX є загальноприйнятим світовим стандартом і має потужні інструменти для підготовки тексту, математичних формул та графічних ілюстрацій. Вона безкоштовна і має відкриті вихідні коди.

Тому метою цього дослідження є огляд можливостей використання інструментів видавничій системи LaTeX для побудови та візуалізації фракталів. Однією з ключових переваг використання LaTeX є можливість інтеграції тексту та графічних елементів у єдиний документ. Це спрощує процес створення комплексних наукових праць, де графічні зображення, такі як фрактали, тісно пов'язані з текстовими описами та математичними формулами.

Основна частина

Фрактали в LaTeX

Для побудови геометричних фракталів добре пристосовані так звані L-Systems. Поняття L-системи тісно пов'язане з самоподібними фракталами. Суть цих систем полягає в тому, що є певний набір символів системи (геометричних об'єктів), кожен з яких позначає певну дію та набір правил перетворення символів. Існують дві принципово різні можливості роботи з графікою в документах LaTeX [8, 9, 12]. З одного боку – це створити зображення за допомогою спеціалізованих програмних пакетів, а потім додати його в

документ. З іншого боку – створити її за допомогою базового чи спеціалізованих пакетів LaTeX.

Створювати зображення безпосередньо в документі LaTeX дозволяє оточення picture. Це оточення має значні обмеження на значення параметрів малювання відрізків та діаметрів кіл – вони можуть набувати тільки набір певних значень. Малюнок може бути вставлений у текст документу, або сформований як окремий об'єкт.

Для того, щоб побудувати фрактали в LaTeX необхідно підключити пакет tikz та використати бібліотеку lindenmayersystems [9].

```
\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{lindenmayersystems}
```

Системи Ліндермаєра або L-системи, спочатку були розроблені Арістидом Ліндермаєром (Aristid Lindenmayer) як теорія росту морських водоростей і, у подальшому, її використовували для моделювання типів розгалуження гілок та створення шаблонів фракталів [8, 9]. Як правило, L-системи містять низку символів, кожен з яких асоціюють з графічною дією (типу «повернути ліворуч», або «пересунутися вперед»), і низкою правил (правило підстановки або правило перезапису). Такий рядок символів, правила підстановки застосовують кілька разів і коли створено наступний рядок, виконується дія, яка пов'язана з кожним символом.

У пакеті pgf/tikz видавничій системи LaTeX використовують L-системи, які дозволяють створити прості двовимірні рекурсивні моделі (рис. 3).

```
\begin{tikzpicture}
\pgfdeclarelindenmayersystem{Koch curve}{
\rule{F -> F-F++F-F}}
\shadedraw [top color=white, bottom color=blue!50,
                    draw=blue!50!black]
[l-system={Koch curve, step=2pt, angle=60, axiom=F++F++F, order=3}]
lindenmayer system -- cycle;
\end{tikzpicture}
```

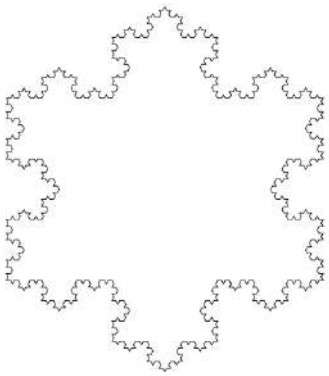

Рисунок 3 – Рекурсивна модель сніжинки Коха, побудована в LaTeX

Здатність фрактальної графіки моделювати образи живої природи обчислювальним шляхом, часто використовують автоматичної генерації

незвичайних ілюстрацій. Змінюючи параметри обраного вихідного об'єкту – трикутника, ламаної кривої, будь-якої іншої геометричної фігури. Природа не є рядом повторюваних закономірностей, але на противагу тому характеризується локальною випадковістю та глобальним порядком (рис. 4).

```
\begin{tikzpicture}
\draw [green!50!black, rotate=90]
[l-system={rule set={F -> FF-[-F+F]+[+F-F]},
axiom=F, order=4, step=2pt,
randomize step percent=25, angle=30,
randomize angle percent=5}] lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
```

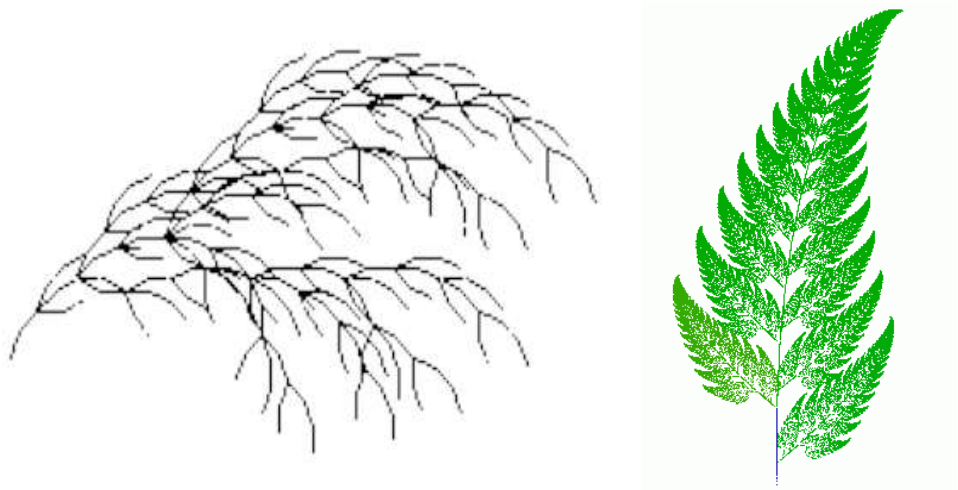

Рисунок 4 – Створене зображення природного фракталу командами LaTeX

Бібліотека lindenmayersystems визначає команди для побудови L-систем (це pgf-бібліотека) й надає зовнішній (користувацький) зручний інтерфейс для побудови L-систем в TikZ (TikZ-бібліотека у видавничий системі LaTeX) [9, 13, 14]. TikZ є потужним і гнучким інструментом для створення високоякісної графіки у LaTeX. Його можливості роблять його незамінним для наукових публікацій, технічних звітів і будь-яких документів, які вимагають професійного оформлення графічних елементів. Завдяки широкій документації та численним прикладам, TikZ легко освоюється та використовується для різних завдань.

Визначення L-системи в LaTeX

Для використання L-системи в LaTeX, її слід описати в преамбулі вихідного документу та визначити командою [9]:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{<name>}{<specification>}
```

Визначає L-систему з іменем <name>. Параметр <specification> містить опис символів L-системи та її правил. Дві команди \symbol і \rule визначають тільки тоді, коли виконується параметр <specification>.

```
\symbol{<name>}{<code>}
```

Визначає символ з іменем <name> для певної L-системи, і пов'язаний з ним код <code>. Символ має складатися з одного алфавітно-цифрового знаку (тобто, A-Z, a-z або 0-9). Символи F, f, +, –, [,] доступні за замовчуванням, так що їх не варто визначати для кожної L-системи. Однак, якщо потрібно, їх можна перевизначити для певної L-системи. L-система обробляє символи зі значеннями за замовченням таким чином (найпоширені команди, які вони виконують, описані нижче):

– F – просунутися вперед на певну відстань, малюючи лінію. Використовує \pgflsystemdrawforward;

– f – просунутися вперед на певну відстань, але не малюючи лінію. Використовує \pgflsystemmoveforward;

– "+" – повернути ліворуч на певний кут. Використовує \pgflsystemturnleft;

– "–" – повернути праворуч на певний кут. Використовує \pgflsystemturnright;

– [– зберігти поточний стан (тобто, позицію і напрямок). Використовує \pgflsystemsavestate;

–] – відновлює останній стан L-системи, що збережено раніше. Використовує \pgflsystemrestorestate.

Символи [і] впливають на стек: "[" розгашовує стан L-системи в стеку, а "]" виштовхує стан L-системи зі стеку.

Коли виконується код <code>, матрицю перетворення встановлюють так, щоб початок був у поточній позиції й додатна частина x-осі «вказувала вперед», так що код \pgfpathlineto{\pgfpoint{1cm}{0cm}} креслить лінію на 1cm вперед.

Наступні ключі можуть змінити результат побудови L-системи. Однак, вони не зберігають значення.

/pgf/lindenmayer system/step=<length>

Визначає як далеко L-система просувається вперед, якщо це потрібно.

Опція визначає TEX-розмір \pgflsystemstep.

/pgf/lindenmayer system/randomize step percent=<percentage>

Якщо крок є випадковим, цей ключ визначає на скільки. Значення зберігають в TEX-макросі \pgflsystemrandomizesteppercent.

/pgf/lindenmayer system/left angle=<angle>

Опція визначає кут, на який повертається L-система, коли повертається ліворуч. Значення зберігають в TEX-макросі \pgflsystemrleftangle.

/pgf/lindenmayer system/right angle=<angle> (no default, initially 90)

Опція визначає кут, на який повертається L-система, коли повертається праворуч. Значення зберігають в TEX-макросі \pgflsystemrrightangle.

/pgf/lindenmayer system/randomize angle percent=<percentage>

Якщо кути є випадковими, цей ключ визначає на скільки. Значення зберігають в TEX-макросі \pgflsystemrandomizeanglepercent.

Заради швидкості та зручності, коли виконується код для символу, доступні такі команди:

– поточний крок L-системи (як далеко система просунеться, якщо потрібно). Початково визначає значення у TEX-розмір \pgflsystemstep, але значення може бути змінено, якщо використовують команду \pgflsystemrandomizestep;

– кут, на який L-система поверне, коли вона повертає ліворуч. Значення, яке зберігається у цьому макросі, може бути змінено, якщо використовують команду \pgflsystemrandomizeleftangle.

– кут, на який L-система поверне, коли вона повертає праворуч. Значення, яке зберігається у цьому макросі, може бути змінено, якщо використовують команду \pgflsystemrandomizerightangle.

Відновлює останню збережену позицію та орієнтацію.

\rule{<head>-><body>}

Визначає правило; <head> – єдиний символ, який ще визначено, використовуючи команду \symbol або вже має існувати як символ за замовченням (фактично, найцікавіші L-системи залежать від використання символів без відповідного коду, який керує ростом системи); <body> – рядок символів, яка знов не мусить мати коду, що приєднано до нього. Така L-система використовує деякі з цих команд та ілюструє ту точку зору, згідно якої певні символи, у цьому випадку A і B, не повинні мати коду, що пов'язаний з ними. Вони просто керують ростом системи. Розглянемо побудову кривої Гільберта – неперервної фрактальної кривої, що заповнює простір. H_n є n-им наближенням до граничної кривої. Евклідова довжина кривої H_n дорівнює $2 - 1/2^n$, тобто росте експоненціально з , в той же час сама крива завжди лишається в межах квадрата зі скінченною площею (рис. 5).

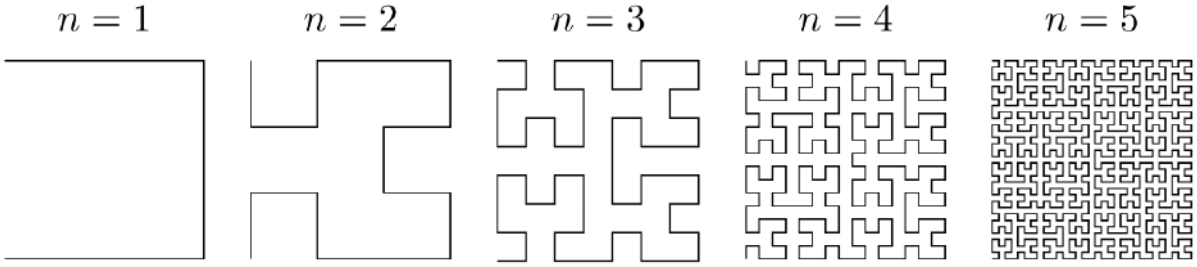

Рисунок 5 – Криві Гільберта з п'ятикратним наближенням (n =5)

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{Hilbert curve}{
\symbol{X}{\pgflsystemdrawforward}
      % Явно визначають символи "+" і "–".
\symbol{+}{\pgflsystemturnright}
\symbol{-}{\pgflsystemturnleft}
\rule{A -> +BX-AXA-XB+}
\rule{B -> -AX+BXB+XA-} }
\tikz\draw[lindenmayer
 system={Hilbert curve,axiom=A,order=4,angle=90}]
lindenmayer system;
```

L-системи в TikZ

В пакеті TikZ, L-системи створюють, використовуючи операцію визначення путі. Однак, програмний пакет TikZ більш гнучкий щодо позиціонування L-системи, а також забезпечує ключі, щоб створити L-системи «on-line»:

```
\path ... lindenmayer system[<keys>]...;
```

Запускає L-систему згідно параметрам, що визначені в опції <keys> (яка може містити й звичайні опції, типу draw чи thin). Синтаксис досить гнучкий по відношенню до параметрів L-системи.

```
\draw lindenmayer system
[lindenmayer system={Hilbert curve,axiom=A, order=4, angle=90}];
\draw [lindenmayer system={Hilbert curve, axiom=A, order=4, angle=90}]
lindenmayer system;
\tikzset{lindenmayer system={Hilbert curve, axiom=A, order=4, angle=90}}
\draw lindenmayer system;
\path ... l-system[<keys>] ...;
```

Бібліотека lindenmayersystems визначає певні додадкові ключі для L-систем, які працюють тільки в програмному пакеті TikZ, мають розташовуватися в одному путі, а саме, /pgf/lindenmayer system, але зберігати повторно цей путь не слід, через те, що вже забезпечені такі ключі:

/pgf/lindenmayer system[<keys>]. Псевдоним: /tikz/lindenmayer system

Ключ дозволяє анонімній L-системі бути визначеною «on-line». Однак існує обмеження, які дозволяють використовувати для малювання тільки символи за замовченням (порожні символи також можуть використовуватися, щоб керувати ростом системи). Правила в <list> мають розділятися комами.

```
\tikz[rotate=65]\draw [green!60!black] l-system
[l-system={rule set={F -> F[+F]F[-F]}, axiom=F,
order=4, angle=25,step=3pt}];
```

Коли ключ /pgf/lindenmayer system/anchor=<anchor> не використовують, L-система починається з останньої визначеної точки. Використовуючи цей ключ, L-система буде розташовуватися у спеціальному (прямокутному) вузлі, який може бути позиціонований, використовуючи вказаний якір <anchor> (рис. 6).

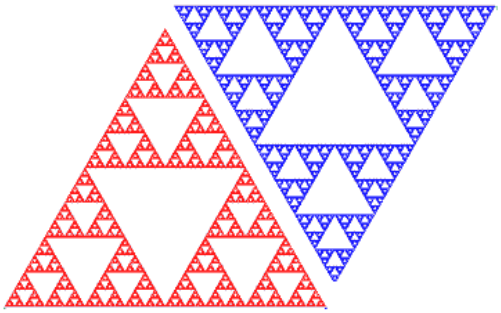

Рисунок 6 – Трикутники Серпинського

```
\begin{tikzpicture}
[l-system={step=1.75pt,
order=5,angle=60}]
\pgfdeclarelindenmayersystem{Sierpinski triangle}{
\symbol{X}{\pgflsystemdrawforward}
\symbol{Y}{\pgflsystemdrawforward}
\rule{X -> Y-X-Y} \rule{Y -> X+Y+X} }
\draw [help lines] grid (3,2);
\draw [red] (0,0) l-system [l-system={Sierpinski triangle,
axiom=+++X, anchor=south west}];
\draw [blue] (3,2) l-system [l-system={Sierpinski triangle,
axiom=X, anchor=north east}];
\end{tikzpicture}
```

Завантаживши цей код у LaTeX, можна отримати зображення трикутника Серпінського з вказаним рівнем рекурсії. Можна змінювати рівень рекурсії, колір, взаємне розташування трикутників, інші параметри налаштувань, і при цьому можна отримати різні рівні деталізації трикутника. В результаті нескінченного повторення цієї процедури виходить геометричний фрактал.

Проаналізуємо кроки, які є необхідними для відтворення кривої Коха в Latex. Спочатку нам потрібно визначити таку криву всередині документа.

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{Koch}
{\rule {F -> F+F--F+F}}
```

F означає, що необхідно зробити крок вперед, ″+″ вказує на поворот проти годинникової стрілки на певний кут, що буде визначено коротко, а ″–″ вказує на поворот за годинниковою стрілкою на той же кут.

Тепер, коли функцію визначено, можна створити фрактал. На цьому кроці також необхідно визначити довжину кроку, кут, порядок (ітерація, яка має бути вказана) та аксіому (рис. 7).

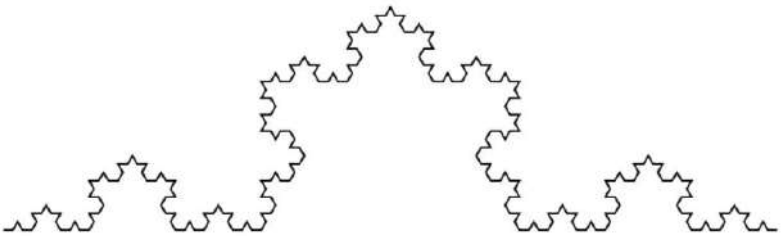

Рисунок 7 – Сніжинка Коха, створена в системі LaTeX

```
\begin{tikzpicture}
\draw
[l-system={Koch curve, step=2pt, angle=60, axiom=F, order=4}]
lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
```

На цьому етапі має бути зрозуміло, як працюють кут, крок і порядок, але аксіома, швидше за все ще не зрозуміла. Якщо як аксіому використовують тільки

F, то ітерація відбуватиметься в одному рядку, якщо використовують більше одного, фрактал буде застосовано у кількох рядках. Щоб пояснити, наведемо пов’язаний приклад. У першому визначимо аксіому F++F++F, це зробить нашою початковою фігурою рівносторонній прямокутник (квадрат) замість лінії, і фрактал будуватиметься всередині (рис. 8).

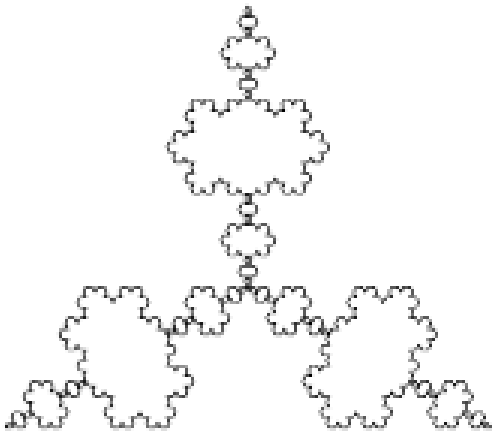

Рисунок 8 – Сніжинка Коха з початковою фігурою у вигляді рівностороннього прямокутника

```
\begin{tikzpicture}
\draw
[l-system={Koch curve, step=2pt, angle=60, axiom=F++F++F, order=4}]
lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
```

Якщо замість F++F++F використовувати аксіому F– –F– –F, фрактал все одно буде застосовано до трикутника, але він буде розвинений зовні.

LaTeX забезпечує засоби для створення високоякісних графічних зображень, включаючи фрактали, завдяки пакетам, таким як pgfplots, tikz, tikzpicture. Це дозволяє вбудовувати фрактальні зображення безпосередньо в наукові документи з високим рівнем деталізації. Однією з ключових переваг використання LaTeX є можливість інтеграції тексту та графічних елементів у єдиний документ. Це спрощує процес створення комплексних наукових праць, де графічні зображення, такі як фрактали, тісно пов'язані з текстовими описами та математичними формулами. Хоча LaTeX не є традиційною мовою програмування, його можливості з рекурсивного програмування дозволяють реалізовувати алгоритми побудови фракталів.

Висновки

Використання системи LaTeX для генерації та візуалізації фракталів демонструє потужність цієї видавничої системи не лише у підготовці текстів, але й у створенні складних графічних об'єктів. У цьому дослідженні було представлено алгоритми та методи формування фракталів за допомогою LaTeX, що дозволяє підсумувати отримані результати наступним чином.

1. Для наукових публікацій, де якість зображень і точність представлення є критичними, LaTeX забезпечує необхідні інструменти для створення високоякісних векторних зображень. Документи LaTeX легко поширювати і відтворювати на різних платформах без втрати якості. Це важливо для наукових досліджень, де фрактали можуть бути частиною більш складних наукових моделей та публікацій.

2. Використання LaTeX для створення фракталів демонструє його можливості як потужного інструменту для підготовки наукових документів з комплексними графічними елементами. Хоча існують більш спеціалізовані інструменти для генерації фракталів, LaTeX надає необхідні засоби для їх інтеграції у наукові праці з високою якістю та точністю. Подальші дослідження можуть включати розробку нових макросів та пакетів для спрощення процесу створення фракталів у LaTeX.

3. Можливо, що найбільш переконливим аргументом на користь вивчення фракталів є їхня краса, що впадає в очі. Багато досягнень науки про фрактали стали можливі лише з використанням методів обчислювальної математики, яка в даний час немислима без застосування сучасних комп'ютерів та інструментів потужних програм. Використання сучасних математичних пакетів дозволяє легко реалізувати відповідні алгоритми побудови фракталів. У сукупності це дає досліднику корисний інструмент щодо обчислювального експерименту і моделювання природних явищ.

Розглянуті можливості видавничої системи LaTeX дозволяють за наявності у дослідників базових навичок роботи з LaTeX істотно спростити процес візуалізації фрактальних зображень і органічно інкапсулювати їх до складних електронних навчально-методичних комплексів.

Список літератури.

1. Нікітенко, О.М. (2021). LaTeX в дії. Рекомендації з використання видавничої системи LATEX для студентів, науковців, викладачів. Харків: ХНУРЕ.

2. Кравець, Н. (2018) Алгоритм визначення параметрів l-системи, що моделює структуру геометричного фрактального об’єкта. Інформаційні системи та технології. (с. 115-117).

3. Челомбітько, В.Ф. (2010). Побудова зображень фракталів в середовищі математичного процесора Maple. Прикладна геометрія і інженерна графіка, (85), 237-243.

4. Ткаченко, В.П., & Челомбітько, В.Ф. (2012). Реалізація деяких принципів побудови візерунків засобами операторів ови Maple. Теорія та практика дизайну, (2), 127-132.

5. Корчакова, А.С., & Нікітенко, О.М. (2014). Особливості статистичної обробки даних за допомогою комп’ютера. Метрологія та прилади, (1), 138-142.

6. Moshchenko, I., Nikitenko, O., & Kozlov, Y. (2012). Possibility of using CMS Maple to study laws of distribution of random variables. Radiotekhnika, 1(204), 128-134.

7. Mandelbrot, B. (1990). The Fractal Geometry of Nature. Spektrum Akademischer Verlag.

8. Грищенко, Т.Б., Дейнеко, Ж.В., & Нікітенко О.М. (2019). Використання системи LaTeX під час підготовки наукових публікацій. Поліграфічні, мультимедійні та web-технології. 2019. Т. 1. (с. 96-99).

9. Kottwitz, S. (2023). LaTeX Graphics with TikZ (Englisch). Stefan Kottwitz. Publisher.

10. Deineko, Z., Zeleniy, O., Lyashenko, V., & Tabakova, I. (2021). Color space image as a factor in the choice of its processing technology. Problems of modern science and practice. (p. 389-394).

11. Lyashenko, V., Deineko, Z., Zeleniy, O., & Tabakova, I. (2021). Wavelet ideology as a universal tool for data processing and analysis: some application examples. International Journal of Academic Information Systems Research (IJAISR), 5(9), 25-30.

12. Нікітенко, О.М., Дейнеко, Ж.В., & Грищенко, Т.Б. (2021). Дослідження переваг застосування графіків у системі LaTeX при оформленні наукових праць. Актуальні проблеми теорії керуючих систем у комп'ютерних науках. (с. 79-84).

13. Грищенко Т.Б., Нікітенко О.М., & Дейнеко Ж.В. (2021). Створення електронних підручників засобами видавничої системи LaTeX. Поліграфічні, мультимедійні та web-технології: колективна монографія. (с. 80-96). Харків: ТОВ Мадрид.

14. Влащенко, Л.Г., Дейнеко, Ж.В., & Нікітенко, О.М. (2023). Використання видавничої системи LaTeX для створення ілюстрацій у наукових роботах. Поліграфічні, мультимедійні та web-технології. Сучасний стан: колективна монографія. (с. 215-232). Харків : ТОВ «Друкарня Мадрид».