УДК 717.927

С.В. КОЛОСОВА, А.Г. ДОБРИНСКАЯ

МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ПРИМЕНЕНИИ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается применение различных вариантов метода последовательных приближений к решению краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Один из вариантов метода, основанный на использовании методов теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах, дает возможность строить двусторонние приближения решения. Полученные разными подходами результаты сравниваются.

1. Введение

В современной науке наблюдается большой интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах, математическими моделями которых являются нелинейные краевые задачи математической физики. Один из эффективных методов исследования задач математической физики состоит в построении автомодельных (инвариантных) решений уравнений в частных производных. Автомодельность – это особая симметрия физической системы, наличие которой позволяет сократить число независимых переменных в соответствующей системе дифференциальных уравнений. При наличии автомодельных решений задача зачастую сводится к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Такие задачи появляются и при исследовании стационарных решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Кроме того, нелинейные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений возникают и непосредственно как первичные математические модели физических процессов.

2. Постановка задачи

Целью работы является исследование возможности применения различных вариантов метода последовательных приближений к построению решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим краевую задачу вида [1]:

$$w''(t)+h(t)f(w(t))=0,\ 0<t<1,\ \ w(0)=w(1)=0 \tag{1}$$

при следующих условиях:

– $h(t)$ неотрицательна и непрерывна на $[0,1]$;

– $f(w)$ неотрицательна, непрерывна, неубывающая и вогнута по переменной w в следующем смысле: при $w>0$ и $\tau\in(0,1)$ $f(\tau w)-\tau f(w)>0$.

Ищем положительные решения $w(t)>0, 0<t<1$, задачи (1).

3. Построение двусторонних приближений

Следуя [2], ставим задаче (1) в соответствие эквивалентное ей интегральное уравнение

$$w(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(w(s))\,ds, \tag{2}$$

где $G(t,s)=\begin{cases} t(1-s), t\le s,\\ s(1-t), t\ge s\end{cases}$ – функция Грина задачи (1) с функцией $h(t)=0$.

Введем в рассмотрение оператор

$$\Gamma w(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(w(s))ds, \tag{3}$$

определенный на конусе K неотрицательных в $C[0,1]$ функций.

Можно показать, что при выполнении наложенных на функции $h(t)$ и $f(w)$ условий оператор $\Gamma w(t)$ обладает свойствами:

- оператор Γ монотонен на конусе K, т.е. из $u \le v$ следует, что $\Gamma u \le \Gamma v$ $\forall u, v \in K$;
- оператор Γ положителен, т.е. $\Gamma K \subset K$;
- оператор Γ вполне непрерывен на K;
- оператор Γ u_0-вогнут, т.е. выполняются следующие два условия:

а) для любого ненулевого $u \in K$ справедливы неравенства $\alpha u_0 \le \Gamma u \le \beta u_0$, где $\alpha=\alpha(u)>0$, $\beta=\beta(u)>0$;

б) каждому такому u, что $\alpha u_0 \le u \le \beta u_0$ $(\alpha,\beta>0)$, и каждому $t\in(0,1)$ соответствует такое положительное $\eta=\eta(u,t)>0$, при котором справедливо неравенство $\Gamma(tu)\ge(1+\eta)t\Gamma(u)$. В нашем случае $u_0=\int_0^1 G(t,s)ds = t(1-t)/2 \in K$.

Пусть возможно построить инвариантный конусный отрезок $<v_0,u_0> \subset K$, т.е. такой, что $\Gamma<v_0,u_0> \subset <v_0,u_0>$.

В этом случае задача (1) имеет единственное решение $w^*(t)\in<v_0,u_0>$, к которому равномерно сходятся последовательные приближения

$$v_{k+1}(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(v_k(s))ds, k=1,2,..., \tag{4}$$

где $v_1(t)\in<v_0,u_0>$ [2].

Вычислительный эксперимент проводился для двух случаев:

1) $h(t)=1$, $f(w(t))=w^2(t)+16$;

2) $h(t)=t^2$, $f(w(t))=w^2(t)+64*2^{\frac{4}{3}}$.

Соответствующими конусными отрезками являются $<v_0=0,u_0=4>$ и $<v_0=0,u_0=8*2^{\frac{2}{3}}>$. Применение итерационной схемы (4) дает нам двусторонние приближения $v_0\le v_1\le...\le v_n\le...\le w^*\le...\le u_n\le...\le u_1\le u_0$, графическое и табличное представления которых приведены соответственно на рис.1 и в табл.1 (случай 1) и на рис.2 и в табл.2 (случай 2).

4. Использование обычной схемы метода последовательных приближений

Напомним процедуру обычного метода последовательных приближений [3].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений и начальных или граничных условий в виде

$$Ax=P, \tag{5}$$

где x – совокупность подлежащих определению неизвестных функций. Представим (5) в виде

$$Bx+(A-B)x=P;\quad Bx+Cx=P,$$

где B – некоторый линейный оператор достаточно простого строения, а $C=A-B$.

В качестве первого приближения x_1 к решению задачи принимается решение уравнения

$$Bx = P,$$

причем оператор B выбран так, что это уравнение решается сравнительно легко. Если это решение подставить в исходное уравнение, то разностью между правой и левой частями уравнения будет $\Delta_2 = P - Bx_1 - Cx_1$.

Для устранения неуравновешенности Δ_2 поправку δ_2 к первому приближению определяют из уравнений $B\delta_2 = \Delta_2$, и в качестве второго приближения к истинному решению принимают $x_2 = x_1 + \delta_2$.

Аналогичным образом определяются «неуравновешенность второго приближения», новая поправка к решению и т.д.

Применение этой процедуры к задаче (1) позволило свести ее к последовательности краевых задач

$$-w^{(1)''} = 1,\ w^{(1)}(0) = w^{(1)}(1) = 0;$$
$$-w^{(2)''} = h(t)f(w^{(1)}),\ w^{(2)}(0) = w^{(2)}(1) = 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$-w^{(m)''} = h(t)f(w^{(m-1)}),\ w^{(m)}(0) = w^{(m)}(1) = 0.$$

Каждую задачу полученной последовательности решаем с помощью метода Ритца, согласно которому решение ищем в виде

$$w_n^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j(t),$$

где a_j, $j = 1,\ldots,n$, - неизвестные коэффициенты, а $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ – координатная последовательность. В данном эксперименте координатные функции, которые формируют координатную последовательность, взяли в виде:

$$\varphi_j = \mathrm{Sin}\left[\frac{j\pi t}{1}\right],\ j = 1,\ldots,n.$$

Соответствующие результаты при $n = 8$ приведены на рис.1 и рис.2, а также в табл.1 и в табл.2, на которых они помечены w_p.

Сравним результаты, полученные обоими методами.

1) $h(t)=1$, $f(w(t)) = w^2(t)+16$, получаем соответственно графическое и табличное представления:

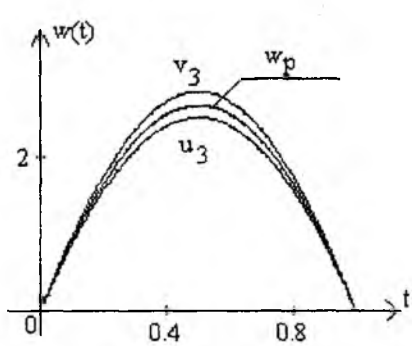

Рис. 1. Приближения к решению

Таблица 1

t	u_4	v_4	u_7	v_7	w_p
0.1	0.891504	0.912272	0.89657	0.900987	0.896927
0.2	1.61437	1.65499	1.61977	1.63292	1.62429
0.3	2.15149	2.20905	2.1623	2.1777	2.16554
0.4	2.48364	2.55273	2.49424	2.51518	2.5005
0.5	2.59617	2.6637	2.60943	2.62959	2.61403
0.6	2.48364	2.55273	2.49424	2.51518	2.5005
0.7	2.15149	2.20905	2.1623	2.1777	2.16554
0.8	1.61437	1.65499	1.61977	1.63292	1.62429
0.9	0.891504	0.912272	0.896927	0.900987	0.89657

2) $h(t)=t^2$, $f(w(t))=w^2(t)+64*2^{\frac{4}{3}}$, получаем соответственно графическое и табличное представления:

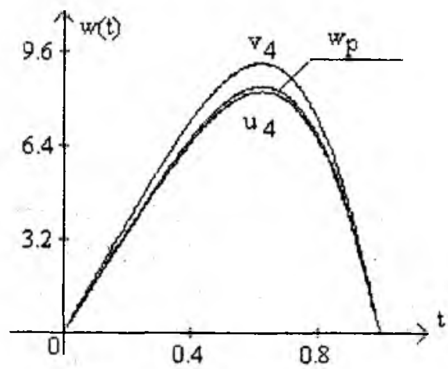

Рис.2. Приближения к решению

Таблица 2

t	u_4	v_4	u_7	v_7	w_p
0.1	1.71565	1.90664	1.74784	1.76939	1.75076
0.2	3.41192	3.7936	3.47624	3.5193	3.48206
0.3	5.03547	5.60507	5.13146	5.19572	5.14701
0.4	6.48738	7.23266	6.61297	6.69705	6.62435
0.5	7.61187	8.49805	7.7612	7.86116	7.77472
0.6	8.19124	9.14472	8.35192	8.45947	8.36648
0.7	7.95996	8.86082	8.11182	8.21343	8.12557
0.8	6.64817	7.34937	6.76645	6.84554	6.77716
0.9	4.04203	4.41989	4.10582	4.14845	4.11159

Как видно из рис. 1, 2 и табл. 1, 2, полученные обоими вариантами метода последовательных приближений результаты достаточно хорошо согласуются, а именно, w_p попадает в вилку, ограниченную соответствующими v_k и u_k. Однако построить инвариантный конусный отрезок (а именно с ним связана возможность построения двусторонних приближений) – задача, не всегда выполнимая.

Проблема, связанная с нахождением решения задачи (1), является актуальной, так как при рассмотрении многих физических процессов приходят к подобной задаче.

Выводы

Научная новизна и практическая значимость. Мы показали, что использование обычного варианта метода последовательных приближений дает возможность построить достаточно хорошее приближение к точному решению, и этот вариант может быть успешно использован, когда не удается построить конусный отрезок. Однако считаем, что возможности построить итерационный процесс следует отдавать предпочтение, так как в этом случае исследователь может следить за точностью приближенного решения.

Список литературы: **1.** *Yao Qingliu.* Iteration of positive solution for a second-order ordinary differential equations with change of sign. Ann. Of Deff. Eqs. 18:4(2002).410-416p. **2.** *Красносельский М.Н.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1962. 201с. **3.** *Свирский И.В.* Методы типов Бубнова-Галеркина и последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 199 с.

Поступила в редколлегию 17.02.2007

Колосова Светлана Васильевна, канд. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры ПМ ХНУРЭ. Научные интересы: методы решения нелинейных и линейных краевых задач. Увлечения и хобби: искусство и литература. Адрес: Украина, 61099, Харьков, пр. Московский, 254-а, кв. 28, дом. тел. 94-81-42, раб. тел. 70-21-436.

Добринская Александра Геннадиевна, студентка гр. ПМс-06-1 факультета ПММ ХНУРЭ. Научные интересы: методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Увлечения и хобби: театр и спорт. Адрес: Украина, 61146, Харьков, ул. Ак. Павлова, 140, кв. 330, дом. тел. 68-48-32.