

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИМПУЛЬСА ЭЙРИ НА ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕ ДИЭЛЕКТРИКА

О.В.КУРЬЖЕВА, А.Г.НЕПУХ

Рассмотрена начально-краевая задача о преобразовании электромагнитного импульса Эйри плоской границей раздела двух диэлектрических сред. Точное решение задачи, описываемой интегральным уравнением Вольтерра, получено методом резольвенты. Проведен анализ потоков электромагнитной энергии, переносимой импульсами Эйри при прохождении через границу раздела сред.

Ключевые слова: электромагнитный импульс Эйри, интегральное уравнение Вольтерра, резольвента, теорема погашения.

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к параксиальному распространению оптических импульсов Эйри, обладающих такими необычными свойствами как недифрагирующее распространение, самоускорение и самолечение [1] не ослабевает вот уже почти десятилетие. Полученное ещё в 1979 году решение уравнения Шредингера в терминах самоускоряющейся функции Эйри [2] было успешно реализовано в оптике. Теоретически и экспериментально было показано, что световой пучок, описываемый функцией Эйри, может распространяться практически без дифракции, причем максимум плотности энергии светового пучка будет смещаться перпендикулярно направлению распространения, так что его траектория распространения будет параболической. В силу этого распределение в поперечном направлении интенсивности света в параксиальных пучках Эйри имеет максимумы в виде главного лепестка и вторичных лепестков. В работе [3] предложен метод подавления вторичных лепестков, основанный на использовании кольцевой амплитудной маски. В других работах [4 – 5] используются конический аксикон и ассиметричная аподизация Фурье-спектра для усиления интенсивности главного максимума и, в свою очередь, подавления боковых лепестков.

Активное исследование пучков Эйри продолжается и в настоящее время: в работах [6 – 9] представлены результаты по преобразованию при помощи зеркал пучков от точечного источника в поле с круговой каустикой, длина которой больше длины полуокружности, в [10] рассматриваются симметричные пучки Эйри. В [11] изучается влияние астигматизма на вид пучков такого типа, а в [12] рассматривается спиральная фокусировка пучков Эйри.

Исследуемые пучки Эйри описываются решением уравнения, полученного из уравнения Гельмгольца при переходе к параксиальному приближению. В последнее время предпринимаются попытки получить точное решение уравнения Гельмгольца [13 – 14], описывающее самоускоряющиеся пучки, т.е. пучки,

распространяющиеся по криволинейной траектории и отклоняющиеся на углы, большие по сравнению с параксиальным приближением. Точное решение двумерного уравнения Гельмгольца было получено для пучков Матье и Вебера [15], которые распространяются по эллиптической и параболической траекториям соответственно. В недавней работе [16] исследовались непараксиальные пучки Бесселя и было показано, что они распространяются по круговой траектории. Поэтому наряду с параксиальными пучками Эйри актуальным является и исследование непараксиальных импульсов Эйри.

В подавляющем большинстве работ пучки Эйри рассматриваются в однородной среде, хотя ясно, что практическое их использование предполагает наличие неоднородностей. В данной работе рассматривается ключевая задача о трансформации импульса Эйри на плоской границе раздела диэлектрических сред. Задача решается с помощью метода интегральных уравнений Вольтерра, обладающего физической наглядностью, полнотой описания, автоматическим учетом начальных и граничных условий, а также универсальностью по отношению к свободному члену уравнения (первичному импульсу) [17 – 18]. С помощью метода резольвенты получено точное решение данной задачи как для прошедшего, так и для отраженного границей импульсов. Полученные решения позволяют провести анализ потоков электромагнитной энергии, переносимых импульсами Эйри при прохождении через границу раздела сред.

Статья организована следующим образом. В п. 1 формулируется начально-граничная задача о преобразовании электромагнитного импульса Эйри плоской границей раздела двух диэлектриков. В п. 2 приводится метод решения поставленной задачи методом интегральных уравнений Вольтерра, а п. 3 посвящен анализу потоков энергии, переносимой прошедшим и отраженным импульсами.

1. НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим задачу о преобразовании электромагнитного импульса Эйри плоской границей раздела

двух диэлектриков, характеризуемых диэлектрическими проницаемостями ε и ε_1 [19]. Пусть первичный электромагнитный импульс $E_0(t, x)$, где t время, x пространственная координата, распространяется перпендикулярно границе ($x = 0$) со стороны диэлектрика с проницаемостью ε ($x < 0$). В качестве первичного импульса будем рассматривать импульс, описываемый функцией Эйри

$$E_0(t, x) = \text{Ai}\left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT}\right), \quad (1)$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$ – фазовая скорость первичного импульса, c – скорость света в вакууме, T – временной масштаб. В силу специфики функции Эйри импульс (1) ограничен передним фронтом [20]

$$\text{Ai}(z) = \frac{z^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} [1 + o(z^{-3/2})], \quad z \rightarrow +\infty \quad (2)$$

и его начальная позиция выбрана так, что он начинает взаимодействовать с границей в нулевой момент времени. Рис.1, а демонстрирует временной ход первичного импульса в двух разных точках, а распределение величины поля вдоль пути распространения в разные моменты времени показано на Рис.1, б.

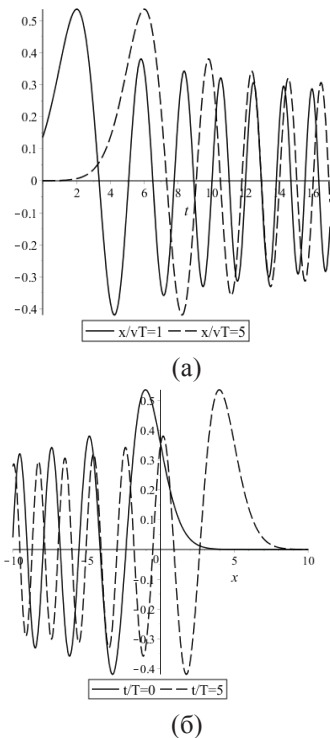


Рис. 1. Временной ход первичного импульса в двух разных точках (а) и распределение поля вдоль пути распространения в разные моменты времени (б)

Начально-краевую задачу об определении электрического поля при наличии плоской границы раздела двух диэлектрических сред будем рассматривать в

рамках описания ее посредством интегрального уравнения Вольтерра [17]:

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dx' \theta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{v}\right) E(t', x'). \quad (3)$$

Здесь $\Omega = \frac{v_1^2 - v^2}{2v_1v^2}$, $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon_1}$ – фазовая скорость в

среде с проницаемостью ε_1 , $\theta(t)$ – единичная функция Хевисайда. Свободный член уравнения $E_0(t, x)$ описывает электрическое поле первичного импульса (1). Если точка наблюдения (t, x) находится в области прошедшего через границу импульса (в области среды с диэлектрической проницаемостью ε_1), то соотношение (2) представляет собой собственно уравнение для поля прошедшего импульса. Если точка наблюдения находится в области среды с проницаемостью ε , то это же соотношение представляет собой формулу для расчета поля отраженного импульса по найденному полю прошедшего импульса. В силу того, что первичный импульс ограничен передним фронтом и его взаимодействие с границей раздела сред начинается с нулевого момента времени, можно считать, что вообще граница раздела сред возникла в нулевой момент времени. Тогда постановка задачи сводится к хорошо исследованным задачам об электромагнитном поле в нестационарной среде, т.е. постановка задачи эквивалентна задаче о взаимодействии импульса с границей, которая возникает в нулевой момент времени [21 – 22]. Начальный импульс в виде функции Эйри (1) в силу своей формы соответствует данной постановке задачи.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Поле прошедшего через границу импульса дается решением интегрального уравнения (3), полученным методом резольвенты [17], которая состоит из двух частей

$$\hat{R} = \theta(x)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2)\theta(x'). \quad (4)$$

Первая часть резольвенты имеет такой же вид, как и в случае неограниченного пространства

$$\hat{R}_1 = \Omega \theta(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{v_1}\right) \theta(x'). \quad (5)$$

Вторая часть резольвенты

$$\hat{R}_2 = \Omega \theta(x) R \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta\left(t-t'-\frac{x+x'}{v_1}\right) \theta(x')$$

обусловлена наличием плоской границы. Множитель $R = (v - v_1)/(v + v_1)$ совпадает с коэффициентом отражения плоской гармонической волны от плоской границы диэлектрической среды.

Применение резольвенты (4) к свободному члену уравнения (3) дает электрическое поле импульса, прошедшего через границу раздела сред

$$E_{Tr} = E_0(t, x) + \int_0^{+\infty} dt' \int_0^{+\infty} dx' \hat{R} E_0(t', x') =$$

$$= \theta(x) \Omega \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \int_0^{+\infty} dt' \int_0^{+\infty} dx' \theta \left(t - t' - \frac{|x - x'|}{v_1} \right) E_0(t', x') + \right.$$

$$\left. + \int_0^{+\infty} dt' \int_0^{+\infty} dx' R \theta \left(t - t' - \frac{x + x'}{v_1} \right) E_0(t', x') \right\}.$$

Область интегрирования в первом слагаемом в (6), определяемая неравенством $t - t' - |x - x'| / v_1 > 0$, показана на рис. 2 вертикальной штриховкой. Второй интеграл в этой формуле учитывает влияние границы раздела сред и область интегрирования в нем, определяемая неравенством $t - t' - (x + x') / v_1 > 0$, показана горизонтальной штриховкой. Первичный импульс отличен от нуля в области, заданной неравенством $x' < vt'$, и траектория его переднего фронта показана на рис. 2 пунктирной линией.

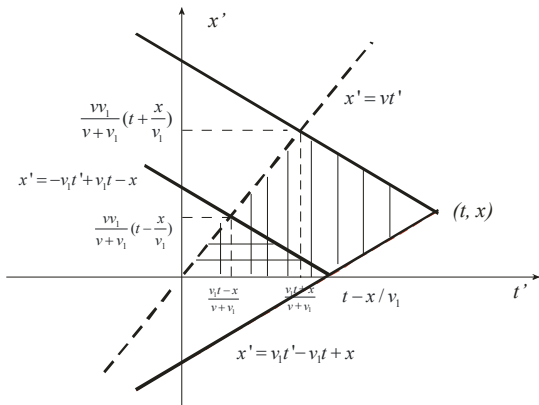


Рис. 2. Области интегрирования в формуле (7)

Результатом интегрирования в (6) будет выражение для поля прошедшего импульса, состоящее из виртуального импульса, погашающего падающий импульс (что является демонстрацией выполнения принципа погашения Эвальда-Озеена [23]) и слагаемого, представляющего собственно прошедший импульс,

$$E_{Tr}(t, x) = E_0(t, x) - \text{Ai} \left(-\frac{t}{T} + \frac{x}{vT} \right) +$$

$$+ \frac{2v_1}{v_1 + v} \theta(x) I_0 \text{Ai}(-t/T + x/v_1 T).$$

Как и следовало ожидать, импульс распространяется с новой скоростью, соответствующей среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . В оптически более плотной среде, $u = v_1 / v < 1$, происходит запаздывание импульса Эйри, и ускорение в противоположном случае. Форма импульса при этом не меняет-

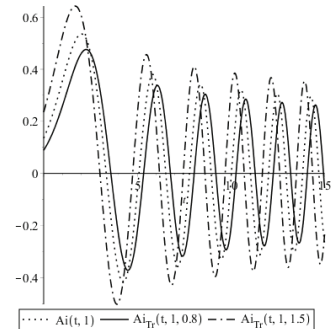
ся, рис.3, а, что объясняется в данном случае отсутствием дисперсии среды.

Подставляя выражение для прошедшего поля (7) в выражение (3), в котором точка наблюдения предполагается находящейся в области падающего импульса, и интегрируя, получим выражение для поля отраженного от границы импульса

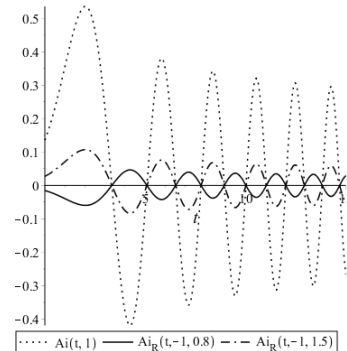
$$E_R = \frac{v_1 - v}{v_1 + v} I_0 \text{Ai}(-t/T - x/vT).$$

Отраженный импульс также описывается функцией Эйри, распространяется в противоположном направлении по сравнению с падающим и имеет существенно меньшую амплитуду, показано на рис.3, б. В оптически более плотной среде, $u < 1$, отраженный импульс является синфазным с падающим, в оптически менее плотной среде, $u > 1$, фаза отраженного импульса меняется на противоположную по сравнению с падающим.

Коэффициенты прохождения $2v_1 / (v_1 + v)$ в формуле (5) и коэффициент отражения $(v_1 - v) / (v_1 + v)$ в (6) для импульса Эйри совпадают с соответствующими коэффициентами для плоской гармонической волны.



(a)



(б)

Рис. 3. Временной ход прошедшего импульса Эйри в точке $x / vT = 1$ (а) и отраженного в точке $x / vT = -1$ (б).

Точками показан падающий импульс, сплошная линия соответствует случаю $v_1 / v = 0.8$, пунктирная с точками соответствует случаю $v_1 / v = 1.5$

3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС

Потоки энергии, переносимой импульсами, $P(t, x) = E(t, x)B(t, x)$, найдем, рассчитав магнитное поле согласно уравнению Максвелла

$$B(t, x) = -\int_0^t \frac{\partial E(t', x)}{\partial x} dt'.$$

В результате получим сильно осциллирующую функцию, обусловленную характером «хвоста» функции Эйри для больших отрицательных значений аргумента [20],

$$\text{Ai}(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) [1 + o(|z|^{-7/4})], z \rightarrow -\infty. \quad (9)$$

Поскольку при больших значениях аргумента функция Эйри становится квазипериодической, то для анализа потока энергии целесообразно провести усреднение по некоторому временному интервалу T_0 . Анализ асимптотической формулы (9) показывает, что интервал усреднения для функции Эйри при $x \rightarrow -\infty$ может быть выбран из промежутка $T_0 \in [1.5; 3]$. Используя формулу

$$\bar{P}(t, x) = \frac{1}{2} \int_{t-T_0}^{t+T_0} P(t', x) dt' \quad (10)$$

получаем усредненные потоки энергии для прошедшего

$$\bar{P}_{Tr}(t, x) = \left(\frac{2u}{u+1}\right)^2 I_0^2 \left([\text{Ai}(-t'/T + x/v_1T)]^2 \theta(T_1 - t) + \theta(t - T_1) \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} [\text{Ai}(-t'/T + x/v_1T)]^2 dt' \right) \quad (11)$$

и отраженного импульсов

$$\bar{P}_R(t, x) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^2 I_0^2 \left([\text{Ai}(-t'/T - x/vT)]^2 \theta(T_1 - t) + \theta(t - T_1) \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} [\text{Ai}(-t'/T - x/vT)]^2 dt' \right), \quad (12)$$

где $\theta(T_1 - t)$, $\theta(t - T_1)$ - функции Хевисайда, которые определяют границы усреднения для прошедшего и отраженного импульсов, T_1 - правая граница главного лепестка. Поскольку он не осциллирует, то не усредняется, а усредняется только осциллирующая часть.

Зависимость потока энергии от пространственной координаты x определяется в аргументе подынтегральной функции Эйри непосредственно, а временная зависимость представляет собой усредненный по временному промежутку T_0 результат. На рис.4, а показано влияние величины интервала усреднения на характер усредненного потока энергии невозмущенного импульса $\bar{P}_0(t, x, T_0)$. Вычисление получено пу-

тем численного интегрирования. Как и следует ожидать, увеличение T_0 приводит к большему сгла-

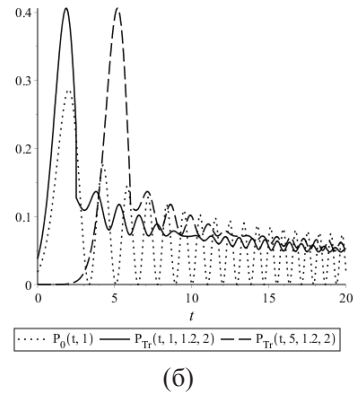
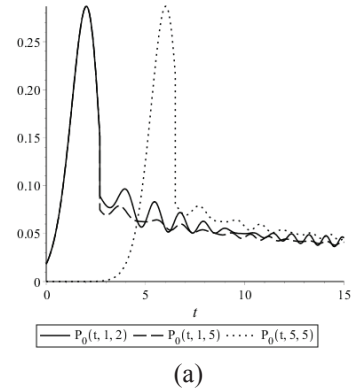


Рис.4. Перемещение максимума потока энергии невозмущенного (а) и прошедшего (б) импульсов

живанию осцилляций «хвоста» сигнала. Такой же эффект наблюдается и для прошедшего импульса, главный лепесток которого вместе с усредненным осциллирующим «хвостом» сносится от границы разделения сред. Рис.4, б, на котором показан временной ход потока энергии прошедшего импульса $\bar{P}_{Tr}(t, x, u, T_0)$, иллюстрирует этот снос. На этом рисунке интервал усреднения выбран $T_0 = 2$, а отношение показателей преломления равно $u = 1.2$. В результате усреднения осцилляций величина потока энергии асимптотически стремится со временем к одному и тому же значению.

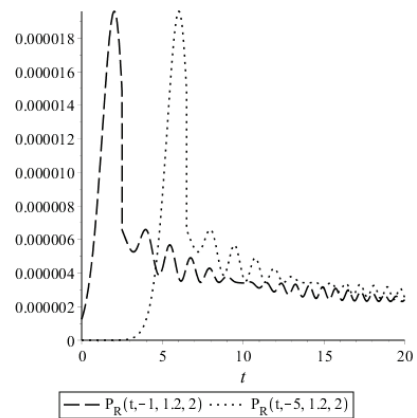


Рис.5. Временной ход потока энергии отраженного импульса в точках $x/vT = -1$ и $x/vT = -5$ в средах с отношением фазовых скоростей $u = 1.2$

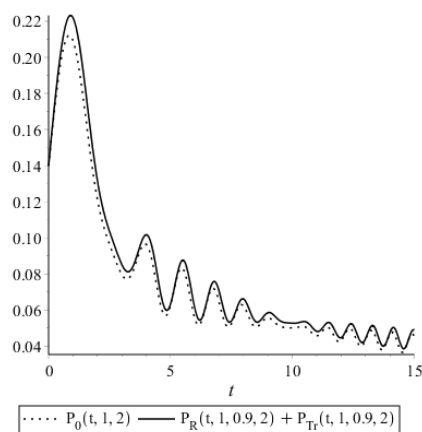


Рис.6. Баланс потоков энергии $\bar{P}_{Tr}(t, x, u, T_0) + \bar{P}_R(t, x, u, T_0)$ и $-\bar{P}_0(t, x, T_0)$ для параметров $u = 0.9$ и $T_0 = 2$

Перемещение усредненного потока энергии отраженного импульса $\bar{P}_R(t, x, u, T_0)$ показано на рис.5 для параметров $T_0 = 2$ и $u = 1.2$. Характер распространения отраженного импульса не меняется с течением времени, но максимум энергии достигается при значительно меньших значениях по сравнению с невозмущенным импульсом.

Баланс потоков энергии дифрагированных импульсов Эйри $\bar{P}_{Tr}(t, x, u, T_0) + \bar{P}_R(t, x, u, T_0)$ и первичного импульса $\bar{P}_0(t, x, T_0)$ показан на рис.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

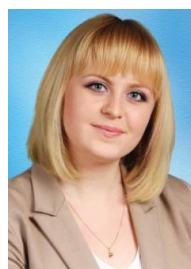
Рассмотрено взаимодействие импульса Эйри с плоской границей раздела диэлектриков. Показано выполнение теоремы погашения Эвальда-Озеена и отчетливое разделение процессов взаимодействия главного лепестка импульса и его «хвоста». Проведено исследование влияния интервала усреднения на характер осцилляций «хвоста», показано его асимптотическое сглаживание со временем при удалении на бесконечность.

Литература

[1] Siviloglou G. A., Broky J., Dogariu A. and Christodoulides D. N., Observation of accelerating Airy beam ballistics, OSA/CLEO/QELS, №1, P. 2085 – 2089, 2008.
 [2] Berry M.V., Balasz N.L., Nonspreading wave packets, Am.J. Phys. 47(3),1978.
 [3] Ohtake Y., Ando Y., Ohtake T, Sidelobe reduction of tightly focused radially higher-order Laguerre-Gaussian beams using annular masks, Optics Letters, V. 33, P. 617 – 619, 2008
 [4] Kotlyar V., Kovalev A., Soifer V., Tuvey C. and Davis J., Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical, Optics Letters, 2007, 32, P. 921 –923.
 [5] Barwick, S. Reduced side-lobe Airy beams, Optics Letters, 2011. –V. 36. – P. 2827 – 2829.
 [6] Georgios A. Siviloglou and Christodoulides D. N., Accelerating finite energy Airy beams/ 2007. – Vol. 32, Issue 8, P. 979 – 981.

[7] Хонина С.Н., Волотовский С.Г., Ограниченные 1D пучки Эйри, лазерный веер, Компьютерная оптика. – 2008. – 32(2), 168 – 174.
 [8] Miguel A. Bandres, Accelerating parabolic beams, California Institute of Technology, Pasadena, OPTICS LETTERS. – 2008. – Vol. 33, No. 15.
 [9] Alonso, M., Bandres M, Generation of nonparaxial accelerating fields through mirrors, Optics Express. 2014. – V. 22, Issue 6, P. 7124 – 7132.
 [10] Vaveliuk P, Lencina A, Jose A. Rodrigo and Martnez-Matos Y, Intensity-symmetric Airy beams, Vol. 32, No. 3, March 2015
 [11] Liang Y., Hu Y., Ye Z., Song D., Lou C., Zhang X., Xu J., Morandotti R., Chen Z., Dynamical deformed Airy beams with arbitrary angles between two wings, Journal of the Optical Society of America. – 2014. – V. 31, Issue 7, P.1468 – 1472.
 [12] Li P., Liu T., Peng T., Xie G., Gan X., Zhao J., Spiral autofocusing Airy beams carrying power-exponent-phase vortices , Optics Express. – 2014. – V. 22, Issue 7, P. 7598 – 7606.
 [13] Novitsky A. V. and Novitsky D. V., Nonparaxial Airy beams: role of evanescent waves, Opt. Lett. 34, 3430 , 2009
 [14] Kaminer I., Bekenstein R., Nemirowsky J., Segev M., Nondiffracting accelerating wave packets of Maxwell's Equations. – 2012. – V. 108, P. 16390.
 [15] Zhang P., Hu Y., Li T., Cannan D., Yin X, Morandotti R., Chen Z., Nonparaxial Mathieu and Weber, Accelerating beams, Physical Review Letters. 2012 – V. 109, P. 1939.
 [16] Parinaz A., Hector Moya-Cessa, Ido Kaminer, Segev, Christodoulides D.N., Dynamics of accelerating Bessel solutions of Maxwell's equations, Journal of the Optical Society of America, 050.1960, Diffraction theory, 2016
 [17] Нерух А.Г., Электромагнитные волны в диэлектрическом слое с зависящими от времени параметрами, ЖТФ, 1987. – т.57, в.11.
 [18] Нерух А.Г., Хижняк Н.А., Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики, ХНПО «Тест-радио», 1991.
 [19] Kuryzheva O.V., Nerukh A.G., Evolution of an Airy pulse energy flow induced by a dielectric plane boundary, CAOL-2016, 978-1-5090-2565-7/16, 2016
 [20] Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами, М.: Наука. – 1979. – 832 с.
 [21] Nerukh A.G. and Nerukh D. A., Time-spatial drift of decelerating electromagnetic pulses, Optics Express. – 2013. – vol. 21, No. 14, 17366-17372.
 [22] Nerukh A., Sakhnenko N., Benson T., Sewell P., Nonstationary electromagnetics, Pan Stanford Publishing, Singapore. 2013. – 597 p.
 [23] Born M., Wolf E. Principles of optics, Cambridge University Press. – 1959. – 106 p.

Поступила в редколлегию 01.12.2016



Курьжева Ольга Владимировна, аспирантка, ассистент кафедры высшей математики ХНУРЭ. Область научных интересов – исследование явления дифракции сложных электромагнитных импульсов, в том числе и в параксиальном приближении, посредством интегральных уравнений.

Нерух Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики ХНУРЭ. Область научных интересов – развитие построения алгоритмов решения начально-краевых задач нестационарной электродинамики на основе интегральных уравнений и их применение; математическое моделирование электромагнитных задач для нестационарных неоднородных сред; стационарные и нестационарные волны шепчущей галереи и плазмоны, их возбуждение и преобразование.

УДК 535.36

Перетворення імпульсу Ейрі на плоскій межі діелектрика / О.В.Курижева, О.Г.Нерух // Прикладна радіоелектроніка: наук. – техн. журнал. – 2016. Том 15, №4. – С. 321 – 326.

Розглянуто початково-крайову задачу про перетворення електромагнітного імпульсу плоскою межею поділу двох діелектричних середовищ. Точний розв'язок задачі, що описується інтегральним рівнянням Вольтерра, отримано методом резольвенти. Проведено аналіз потоків

електромагнітної енергії, яку переносить імпульс Ейрі під час проходження через межу поділу середовищ.

Ключові слова: електромагнітний імпульс Ейрі, інтегральне рівняння Вольтерра, резольвента, теорема погашення.

Лл.: 06. Бібліогр.:23 найм.

UDC 535.36

Transformation of an electromagnetic Airy pulse by a plane boundary of a dielectric / O.V. Kuryzheva, A.G. Nerukh // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2016. Vol. 15, № 4. – P. 321 – 326.

Transformation of an electromagnetic Airy pulse by a plane boundary of a dielectric is considered. It is shown that a problem formulation is equivalent to a case of a permittivity sharp change in a half space at zero moment of time. It enables to use the resolvent method for solution of the Volterra integral equation describing the phenomenon. Explicit expressions for transmitted and reflected pulses are obtained and energy flows are analyzed.

Keywords: electromagnetic Airy pulse, Volterra integral equation, resolvent, extinction theorem.

Fig.: 06. Ref.: 23 items.