УДК 681.518.54

*Ф. М. АЛЬ САДИ, Р. В. ПЕТРОВА, В. А. ТИМОФЕЕВ*

# АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОМЕХ

Задача оценивания параметров (идентификации) является неотъемлимой частью задач распознавния образов, классификации, прогнозирования, управления и т. п. Так например, задачи распознавания образов и классификации состоят в построении поверхности или разделяющей функции, которая в каком-либо смысле лучше всего разделяет многомерное пространство на области, соответствующие различным классам. наиболее простым является разбиение на два класса, т. е. случай дихотомии. К дихотомии можно последовательно свести и общий случай, когда число классов превышает два. В случае дихотомии наиболее часто используется разделяющая функция в виде регрессивного управления, а задача построения разделяющая функции сводятся к оцениванию параметров этого уравнения, т. е. к параметрической идентификации.

Существует много методов решения этой задачи. Одним из наиболее эффективных является мтод наименьших квадратов в некуррентном и рекуррентном вариантах. Более предпочтительным является второй, т. к. позволяет уточнять получаемые оценки по мере поступления новой информации, что является весьма важным, если оцениваемые параметры изменяются во времени.

Рекуррентный метод наименьших квадратов (РМНК) получил широкое распространение при решении задач идентификации, прогнозирования и адаптивного управления [1]. Существуют различные подходы к получению РМНК.

Наиболее распространенным является построение РМНК из обычного МНК на основании блочного представления матрицы наблюдений и использования леммы об обращении матриц. Модификация минимизируемого функционала (введение весовых параметров и т. д.) приводит к соответствующей модификации РМНК.

Рассмотрим несколько иной способ получения алгоритма РМНК. Пусть подлежащий идентификации объект описывается уравнением

$$Y_n = C_n^{*T} X_n + \xi_n \tag{1}$$

где $Y_n$ – выходной сигнал; $X_n = (X_{1n}, X_{2n}, ..., X_{Nn})^T$ – вектор входных сигналов $N \times 1$; $N \times 1$; $C_n^* = (C_{1n}^*, C_{2n}^*, ..., C_{Nn}^*)^T$ – вектор оцениваемых нестационарных параметров; $\xi_n$ – помеха; $n = 0, 1, 2, ...$ – дискретное время.

Предположим, что помеха $\xi_n$ ограничена по амплитуде, т. е.

$$|\xi_n| \le \delta . \tag{2}$$

Алгоритм РМНК может быть непосредственно получен путем минимизации некоторого квадратичного функционала.

Так как для анализа вопросов сходимости рекуррентных алгоритмов широко используется критерий (функция Ляпунова) вида $\Theta^T P^{-1} \Theta$, где $\Theta = c^* - c$ – вектор ошибок идентификации; $C$ - оценка вектора $C^*$; $P^{-1}$ - положительно определенная матрица, то целесообразно воспользоваться этим критерием для получения самого РМНК. Как показано в [2], минимизация функционала

$$C_n = I(C^*) = (C^* - C_{n-1})^T P_{n-1}^{-1}(C^* - C_{n-1}) + \gamma(Y_n - C_{n-1}^T X_n)^2, \quad (3)$$

где $\gamma > 0$ – некоторый периметр; $C_{n-1}$ – оценка $C^*$, полученная на ($n$-1)-м шаге, приводит к следующей форме РМНК:

$$C_n = C_{n-1} + \gamma \frac{P_{n-1}X_n}{1 + \gamma_n X_n^T P_{n-1} X_n}(Y_n - C_{n-1}^T X_n), \quad (4)$$

$$P_n = P_{n-1} - \gamma \frac{P_{n-1}X_n X_n^T P_{n-1}}{1 + \gamma_n X_n^T P_{n-1} X_n}. \quad (5)$$

При $\gamma = 1$ из выражений (4 и 5) следует обычный РМНК. Выбирая различные значения параметра $\gamma$, можно получить различные модификации РМНК.

Если ввести в рассмотрение функцию Ляпунова

$$V_n = \theta_n^T P_n^{-1} \theta_n \quad (6)$$

и рассмотреть её приращение $\Delta V_n = V_n - V_{n-1}$, где $\Delta V_{n-1} = \Theta_{n-1}^T P_{n-1}^{-1} \Theta_{n-1}$, то можно показать, что для рассматриваемого случая наличия ограниченной помехи (2) сходимость алгоритма (4, 5), т. е. как несложно получить, выполнение условия

$$\Delta V_n \le \gamma_n \delta^2 - \gamma_n \frac{e_n^2}{1 + \gamma_n X_n^T P_{n-1} X_n} \le 0, \quad (7)$$

обеспечивается выбором параметра $\gamma_n$, удовлетворяющим условию [5]

$$\delta^2(1 + \gamma_n X_n^T P_{n-1} X_n) - e_n^2 \le 0, \quad (8)$$

где $e_n = \theta_{n-1}^T X_n + \xi_n$.

В работах [2, 3] показано, что использование условия (2) позволяет несколько упростить процесс идентификации путем огрубления алгоритма оценивания, заключающегося в использовании в алгоритме зоны нечувствительности. Так в работах [2-4] были изучены модифицированные алгоритмы РМНК (4, 5) с параметром $\gamma_n$, определяемым по правилу

$$\gamma_n = \alpha \frac{g(e_n, \beta\delta)}{1 + X_n^T P_{n-1} X_n}, \quad (9)$$

где $\alpha \in (0,1]; \beta = \sqrt{1+\alpha}$; $g(e_n, \beta\delta) = \begin{cases} \dfrac{f(e_n, \beta\delta)}{e_n}, \text{если } |e_n| \succ \beta\delta \\ 0, \text{если } |e_n| \le \beta\delta \end{cases}$, что приводит к следующему алгоритму:

$$C_n = \begin{cases} C_{n-1} + \dfrac{\alpha P_{n-1} X_n f(e_n, \beta\delta)}{1 + (1 + g(e_n, \beta\delta)) X_n^T P_{n-1} X_n}, & \text{если } |e_n| \succ \beta\delta; \\ C_{n-1} & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (10)$$

$$P_n = \begin{cases} P_{n-1} - \alpha g(e_n, \beta\delta) \dfrac{P_{n-1} X_n X_n^T P_{n-1}}{1 + (1 + \alpha g(e_n, \beta\delta)) X_n^T P_{n-1} X_n}, & \text{если } |e_n| \succ \beta\delta; \\ P_{n-1} & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{11}$$

В работах [2, 3, 5] был предложен и рассмотрен алгоритм (4, 5) с $\gamma_n$, определяемым выражением

$$\gamma_n = \alpha \frac{g(e_n, \beta\delta)}{1 + (1 - \alpha g(e_n, \beta\delta)) X_n^T P_{n-1} X_n}, \tag{12}$$

где $\alpha \in [0,1]; \beta = \sqrt{\beta_0 + \dfrac{1}{1-\alpha}}$.

Подставляя данное выражение для параметра $\gamma_n$ в соотношения (4, 5), получаем

$$C_n = \begin{cases} C_{n-1} + \dfrac{\alpha P_{n-1} X_n f(e_n, \beta\delta)}{1 + X_n^T P_{n-1} X_n}, & \text{если } |e_n| \succ \beta\delta; \\ C_{n-1} & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{13}$$

$$P_n = \begin{cases} P_{n-1} - \alpha g(e_n, \beta\delta) \dfrac{P_{n-1} X_n X_n^T P_{n-1}}{1 + X_n^T P_{n-1} X_n}, & \text{если } |e_n| \succ \beta\delta; \\ P_{n-1} & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{14}$$

Все эти алгоритмы (4, 5, 10, 11, 13, 14) пригодны для идентификации лишь в стационарных объектов, вследствие того, что норма входящей в алгоритмы матрицы $P_n$ с ростом количества наблюдений уменьшается и в пределе равна нулю.

Один из возможных приемов модификации этих алгоритмов заключается в экспоненциальном взвешивании поступающей информации и делает их пригодными для идентификации нестационарных параметров, т. е. характерен для случая $C_n^* = \text{var}$ [3]. В данной работе [3] рассматривается еще один подход к адаптации алгоритмов (4, 5, 10, 11, 13, 14) в нестационарных условиях. Путем использования предложенного в [6] введения ограничения на матрицу ковариации, имеющего вид

$$\alpha_{\min} I \le P_n \le \alpha_{\max} I \text{ для всех значений } n, \tag{15}$$

где $0 < \alpha_{\min} < \alpha_{\max} < \infty$, $I$ – единичная матрица.

По аналогии с РМНК начальные значения матрицы $P_0$ выбираются в виде

$$P_0 = \alpha I, \quad \alpha_{\min} \le \alpha \le \alpha_{\max} \tag{16}$$

Воспользуемся этим подходом при синтезе алгоритмов идентификации (4, 5) и алгоритмов, содержащих зону нечувствительности (10, 11, 13, 14).

Учитывая, что функция Ляпунова определяется выражением (6), а сходимость алгоритма (4, 5), т. е. выполнение неравенства (7), обеспечивается выбором параметра $\gamma_n$, удовлетворяющим условию (8), предполагая, что оно выполняется, можно записать

$$\theta_n^T P_n^{-1}\theta_n \le \theta_{n-1}^T P_{n-1}^{-1}\theta_{n-1} \le \ldots \le \theta_0^T P_0^{-1}\theta_0 \tag{17}$$

Если в алгоритме используется ограниченная ковариационная матрица (15), то

$$\frac{1}{\alpha_{\max}}\|\theta_n\|^2 \le \theta_n^T P_n^{-1}\theta_n \le \frac{1}{\alpha_{\min}}\|\theta_n\|^2 \tag{18}$$

или же

$$\alpha_{\min}\theta_n^T P_n^{-1}\theta_n \le \|\theta_n\|^2 \le \alpha_{\max}\theta_n^T P_n^{-1}\theta_n. \tag{19}$$

Итерируя (7), получаем

$$V_n = V_0 - \sum_{i-1}^{n} \frac{\gamma_i\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)\left(\delta^2 - e_i^2\right)}{1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i}. \tag{20}$$

Из (18) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = V_0 - \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i-1}^{n} \frac{\gamma_i\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)\left(\delta^2 - e_i^2\right)}{1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i}$ откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)\left(\delta^2 - e_i^2\right)}{1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i} \le \frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha} - \lim_{n\to\infty} V_n \le \frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}. \tag{21}$$

Исследуем поведение на каждом шаге приращения оценки в случае применения алгоритмов (4, 5).

Вычтем из обеих частей выражения (5) оценку $c_{n-1}$ и умножим полученное выражение слева на $\left(c_n - c_{n-1}\right)^T$. Получим

$$\|c_n - c_{n-1}\|^2 = \frac{\gamma_n^2 x_n^T P_{n-1}^T P_{n-1}x_n}{\left(1+\gamma_n x_n^T P_{n-1}x_n\right)^2}\tilde{e}_n^2 \le \alpha_{\max}\frac{\gamma_n^2 x_n^T P_{n-1}x_n}{\left(1+\gamma_n x_n^T P_{n-1}x_n\right)^2}\tilde{e}_n^2, \tag{22}$$

где $\tilde{e}_n = e_n + \xi_n$.

Принимая во внимание, что $\frac{\tilde{e}_n^2}{1+\gamma_n x_n^T P_{n-1}x_n} = \frac{\left(1+\gamma_n x_n^T P_{n-1}x_n\right)}{\left(1+\gamma_n x_n^T P_{n-1}x_n\right)^2}\tilde{e}_n^2$, и то, что из выражения (21) следует $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)\tilde{e}_i^2}{\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)^2} \le \frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}$, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\tilde{e}_i^2}{\left(1+\gamma_i x_i^T P_{i-1}x_i\right)^2} \le \frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}$.

Последнее соотношение позволяет записать неравенство (22) в виде

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\|c_n - c_{n-1}\|^2 \le \alpha_{\max}\frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}. \tag{23}$$

Полученные результаты для общего вида алгоритмов (4, 5) с ограниченной матрицей ковариации могут быть легко применены к вытекающим из (4, 5) модификациям, содержащим зону нечувствительности.

Так, при выборе параметра $\gamma_n$ в соответствии с выражением (9), неравенство (21) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha g(e_i,\beta\delta)\left[1+\left(1+\alpha g(e_i,\beta\delta)\right)x_i^T P_{i-1}x_i\delta^2-e_i^2\right]}{1+\left(1+\alpha g(e_i,\beta\delta)\right)x_i^T P_{i-1}x_i}\le\frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}, \tag{24}$$

а для случая $|e_n|>\beta\delta$ для приращения оценки на каждом шаге справедливо

$$\|c_n-c_{n-1}\|^2=\frac{\alpha^2 x_n^T P_{n-1}^T P_{n-1}x_n}{1+\left(1+g(e_n,\beta\delta)\right)x_n^T P_{n-1}x_n}f^2(e_n,\beta\delta)\le\alpha_{\max}\frac{\alpha x_n^T P_{n-1}x_n}{1+\left(1+g(e_n,\beta\delta)\right)x_n^T P_{n-1}x_n}f^2(e_n,\beta\delta). \tag{25}$$

Исследование алгоритмов (13, 14) с ограниченной матрицей ковариации (15) показывает, что для данной модификации справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha g(e_i,\beta\delta)}{1+x_i^T P_{i-1}x_i}\left(\left(\beta^2\delta^2-e_i^2\right)-\beta_0\delta^2\right)\le\frac{\|\theta_0\|^2}{\alpha}, \tag{26}$$

$$\|c_n-c_{n-1}\|^2=\frac{\alpha^2 x_n^T P_{n-1}^T P_{n-1}x_n}{(1+x_n^T P_{n-1}x_n)^2}f^2(e_n,\beta\delta)\le a_{\max}\frac{\alpha x_n^T P_{n-1}x_n}{\left(1+x_n^T P_{n-1}x_n\right)^2}f^2(e_n,\beta\delta). \tag{27}$$

**Список литературы:** 1. *Эйкофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683с. 2. *Halwass M.* "Least-Squares" – Modifikationen in Gegenwart begrenzter Stoaringen / Messen-steuern-regeln, 33, 1990 (8). S. 351-355. 3. *Руденко О.Г., Агаджанов С.Г., Теренковский И.Д.* Модификация алгоритмов рекуррентного МНК для идентификации нестационарных параметров при наличии ограниченных помех // АСУ и приборы автоматики: Сб. науч. трудов. Х.: ХТУРЭ. 1997. Вып. 105. С.16-21. 4. *Бедельбаева А.А.* Релейные алгоритмы оценивания // Автоматика и телемеханика. 1978. № 1. С. 87-95. 5. *Rapproachement between continuous and discrete model reference adaptive control* / G.C.Goodwin, D.J.Hill, D.Q.Mayne, R.H.Middleton // Automatica. 1986. № 2 (22). P. 229-238. 6. *Parkum J.E., Poulsen N.K., Holst J.* Recursive forgetting algorithms // Int. J.Control. 1992. Vol.55, № 1. P. 109-128.

*Поступила в редколлегию 14.07.2000*