УДК 621.375.7

Н.Г. ЗУЕВ, канд. физ.-мат. наук, И.В. САЛАЙ, А.М. ТИТАРЕНКО, канд. физ.-мат. наук, П.И. ЧЕРЕДНИКОВ, канд. техн. наук

К ВОПРОСУ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

Явление параметрической регенерации и параметрической дегенерации (когерентный случай) находит применение в технике, например, при создании систем фазовой селекции.

В работе* рассмотрен вопрос о параметрической регенерации в системе с нелинейностью, характеристика которой описывается неполным полиномом третьей степени.

Представляет интерес исследовать случай, когда нелинейность аппроксимируется трансцендентной функцией, которая проста по виду и сохраняет точность в более широком интервале аппроксимации.

Рассматриваемая параметрическая система с нелинейной индуктивностью, приведенная на рис. 1, описывается уравнениями

$$\begin{cases} sw_1 \dfrac{d}{dt}(B_I + B_{II}) + i_1 R_1 = U_0 \sin(\omega t + \varphi'), \\ sw_2 \dfrac{d}{dt}(B_I - B_{II}) + i_2 R_2 + \dfrac{1}{C}\int i_2 dt = E_0 \sin(\omega t + \psi); \\ i_1 w_1 + i_2 w_2 = l H_I; \\ i_1 w_1 - i_2 w_2 = l H_{II}. \end{cases} \quad (1)$$

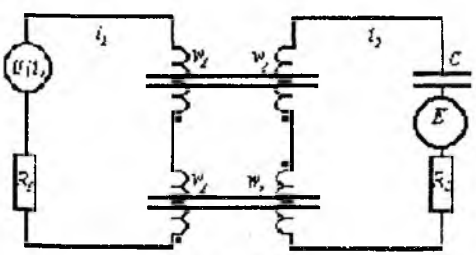

Рис. 1

Здесь B_1, B_1, H_I, H_I – индукция и напряженность магнитного поля для первого и второго сердечников; sw_1 – сечение; l – длина средней магнитной линии сердечника; w_1, w_2 – соответственно число обмоток контура накачки и резонансного.

---

* *Мандельштам Л.И. Полное собрание трудов. М: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2. С. 140–149.*

Остальные обозначения ясны из рис. 1.

Анализ проведен для когерентного случая, когда частота внешней силы E и напряжение накачки $U(t)$ совпадают.

Пусть нелинейность аппроксимируется гиперболическим синусом

$$H = \alpha \operatorname{sh} \beta B \ . \tag{2}$$

Обозначая $x = \beta(B_I + B_{II})$, $y = \beta(B_I - B_{II})$; $\tau = \omega t$, находим токи в обмотках:

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{\alpha l}{w_1} \operatorname{sh} \dfrac{x}{2} \operatorname{ch} \dfrac{y}{2}; \\ i_2 = \dfrac{\alpha l}{w_2} \operatorname{ch} \dfrac{x}{2} \operatorname{sh} \dfrac{y}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

После чего первые два уравнения системы (1) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dot{x} + \gamma_1 \operatorname{sh} \dfrac{x}{2} \operatorname{ch} \dfrac{y}{2} = U_0' \sin(\tau + \varphi'); \\ \ddot{y} + \gamma_2 ch \dfrac{x}{2} \operatorname{sh} \dfrac{y}{2} + \gamma \dfrac{d}{d\tau} \left(ch \dfrac{x}{2} \operatorname{sh} \dfrac{y}{2} \right) = E_0' \cos(\tau + \psi), \end{cases} \tag{4}$$

где точка означает дифференцирование по τ:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha \beta l R_1}{s w_1^2 \omega}, \quad U_0' = \frac{U_0 \beta}{s w_1 \omega}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha \beta l}{C s w_2^2 \omega^2}; \quad \gamma = \frac{\alpha \beta l R_2}{s w_2^2 \omega}; \quad E_0' = \frac{E_0 \beta}{s w_2 \omega^2}. \tag{5}$$

В первом уравнении системы (4) коэффициент γ_1, характеризующий потери в контуре накачки, весьма мал ($\gamma_1 << 1$), а фаза напряжения накачки φ' такова, чтобы решение этого уравнения с достаточной точностью имело вид

$$x = 2B_H \sin \tau . \tag{6}$$

Подставим выражение для x во второе уравнение системы (4) и разложим гиперболический косинус в ряд Фурье, коэффициентами которого являются модифицированные функции Бесселя от B_H. Полагая, что напряжение накачки достаточно мало, удерживаем в разложении функции Бесселя до второго порядка включительно

$$\ddot{y}+\gamma_2\left[I_0(B_н)-2I_2(B_н)\cos 2\tau\right]\mathrm{sh}\,{}^{y}\!/_{2}+$$
$$+\gamma\left\{\left[I_0(B_н)-2I_2(B_н)\cos 2\tau\right]\mathrm{sh}\,{}^{y}\!/_{2}\right\}'_{\tau}=E'_0\cos(\tau+\psi). \qquad (7)$$

Введем расстройку ξ, полагая $\gamma_2=2(1-\xi)$, и глубину модуляции параметра $m=2I_2(B_н)/I_0(B_H)$. Предполагаем, что величины γ, ξ, m и E'_0 малы ($\gamma<<1$, $\xi<<1$, $m<<1$). Тогда $I_0(B_H)\approx 1+m$ и уравнение (7) можно переписать в виде

$$\ddot{y}+2(1+m-\xi)\,\mathrm{sh}\frac{y}{2}-2m\cos 2\tau\,\mathrm{sh}\frac{y}{2}+\gamma\left(\mathrm{sh}\frac{y}{2}\right)'_{\tau}=E'_0\cos(\tau+\psi), \qquad (8)$$

где опущены члены выше первого порядка малости.

Решение уравнения (8) ищем в виде

$$y=2B\sin(\tau+\varphi). \qquad (9)$$

Подставляя это решение в уравнение (8) и разлагая последнее в ряд Фурье, имеем

$$-2B\sin(\tau+\varphi)+4(1+m-\xi)I_1(B)\sin(\tau+\varphi)+2mI_1(B)\times$$
$$\times\sin(\tau-\varphi)+2\gamma I_1(B)\cos(\tau+\varphi)=E'_0\cos(\tau+\psi). \qquad (10)$$

Применяя метод гармонического баланса, находим для синусоидальной составляющей

$$I_1(B)(2\xi_*\cos\varphi-m\cos\varphi+\gamma\sin\varphi)=\frac{E'_0}{2}\sin\psi; \qquad (11)$$

для косинусоидальной составляющей

$$I_1(B)(2\xi_*\sin\varphi+m\sin\varphi-\gamma\cos\varphi)=-\frac{E'_0}{2}\cos\psi. \qquad (12)$$

Здесь величина $\xi_*=\xi-m+\dfrac{B}{2I_1(B)}-1$ — полная расстройка частоты в резонансном контуре. Она зависит от собственно расстройки ξ, а также от глубины модуляции параметра m и амплитуды колебаний в контуре.

Возводя в квадрат обе части уравнений (11) и (12) и складывая их, получим зависимость амплитуды колебаний от расстройки ξ, глубины модуля-

ции m, величины γ, фазы колебаний φ и амплитуды внешнего воздействия E_0'

$$I_1^2(B)\left\{\left(2\xi+2m+\frac{B}{I_1(B)}-2-m\cos 2\varphi\right)^2+(\gamma-m\sin 2\varphi)^2\right\}=\frac{E_0'^2}{4}. \qquad (13)$$

Из формулы (13) видно, что если колебания происходят с фазой $\varphi=\pi/4$, то $\cos 2\varphi=0$, $\sin 2\varphi=1$ и общие потери в цепи уменьшаются, что эквивалентно внесению "отрицательного сопротивления".

Если фаза $\varphi=-\pi/4$, то $\cos 2\varphi=0$, $\sin 2\varphi=-1$, что приводит к увеличению потерь в контуре.

Фазу φ можно исключить из уравнения (13) следующим образом. Из уравнений (11) и (12) имеем

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{-\gamma\operatorname{tg}\varphi+m-2\xi_*}{-\gamma+(m+2\xi_*)\operatorname{tg}\varphi}, \qquad (14)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\xi_*+m+\gamma\operatorname{tg}\psi}{2\xi_* tg\psi+m\operatorname{tg}\psi+\gamma} \qquad (15)$$

и

$$\cos 2\varphi=\frac{4m\xi_*\left(1+\operatorname{tg}^2\psi\right)+\left(\gamma^2-m^2-4\xi_*^2\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\psi\right)+8\gamma\xi_*\operatorname{tg}\psi}{-4m\xi_*\left(1-\operatorname{tg}^2\psi\right)+\left(\gamma^2+m^2+4\xi_*^2\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\psi\right)+4m\gamma\operatorname{tg}\psi},$$

$$\sin 2\varphi=\frac{2\left[(\gamma^2+m^2-4\xi_*^2)\operatorname{tg}\psi+\gamma(m+2\xi_*^2)\operatorname{tg}^2\psi+\gamma(m-2\xi_*^2)\right]}{-4m\xi_*(1-\operatorname{tg}^2\psi)+(\gamma^2+m^2+4\xi_*^2)(1+\operatorname{tg}^2\psi)+4m\gamma\operatorname{tg}\psi}. \qquad (16)$$

Представим уравнение резонансной кривой в более удобной для исследования форме. Для этого перепишем уравнения (11) и (12) в виде

$$\begin{cases}2\xi_*\cos\varphi+\gamma\sin\varphi=\dfrac{E_0'}{2I_1(B)}\sin\psi+m\cos\varphi;\\ 2\xi_*\sin\varphi-\gamma\cos\varphi=-\dfrac{E_0'}{2I_1(B)}\cos\psi-m\sin\varphi.\end{cases} \qquad (17)$$

Возводя в квадрат обе части каждого уравнения и складывая их, получаем

$$4\xi_*^2+\gamma^2=\left[\frac{E_0'}{2I_1(B)}\right]^2+\frac{E_0'}{I_1(B)}m\sin(\varphi+\psi)+m^2. \qquad (18)$$

Тогда окончательно

$$\xi=m-\frac{B}{2I_1(B)}+1\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{E_0'}{2I_1(B)}\right]^2+\frac{E_0'}{I_1(B)}m\sin(\varphi+\psi)+m^2-\gamma^2}. \qquad (19)$$

Пусть $m<\gamma$, т. е. рассматриваемая система работает в качестве параметрического усилителя в недовозбужденном режиме. Условием существования стационарной амплитуды является выполнение неравенства

$$\left[\frac{E_0'}{2I_1(B)}\right]^2+\frac{E_0'}{I_1(B)}m\sin(\varphi+\psi)+m^2-\gamma^2\geq 0, \qquad (20)$$

при этом знак равенства соответствует смыканию двух различных ветвей резонансной кривой, когда полная расстройка ξ_* равна нулю, а амплитуда колебаний максимальна. Последняя определяется из формулы

$$\frac{E_0'}{I_1(B)}=-2m\sin(\varphi+\psi)+2\sqrt{\gamma^2-m^2\cos^2(\varphi+\psi)}. \qquad (21)$$

Здесь перед квадратным корнем взят только знак "плюс", так как $E_0'/I_1(B)>0$ и $\gamma^2-m^2>0$.

Из (21) видно, что амплитуда колебаний существенно зависит от фазовых соотношений между колебаниями в резонансном контуре и внешней силой. Исследуем, при каких значениях $(\varphi+\psi)$ амплитуда колебаний достигает наибольшего и наименьшего значений.

Имеем

$$\left(E_0'/I_1(B)\right)'_{\varphi+\psi}=-2m\cos(\varphi+\psi)\times$$
$$\times\left[\frac{\sqrt{\gamma^2-m^2\cos^2(\varphi+\psi)}-m\sin(\varphi+\psi)}{\sqrt{\gamma^2-m^2\cos^2(\varphi+\psi)}}\right]=0. \qquad (22)$$

Отсюда находим два значения $(\varphi+\psi)$, соответствующих "сильному" и "слабому" резонансу:

$$\varphi+\psi=\frac{\pi}{2};\quad \sin(\varphi+\psi)=1;\quad I_1(B)=\frac{E_0'}{2(\gamma-m)};\tag{23}$$

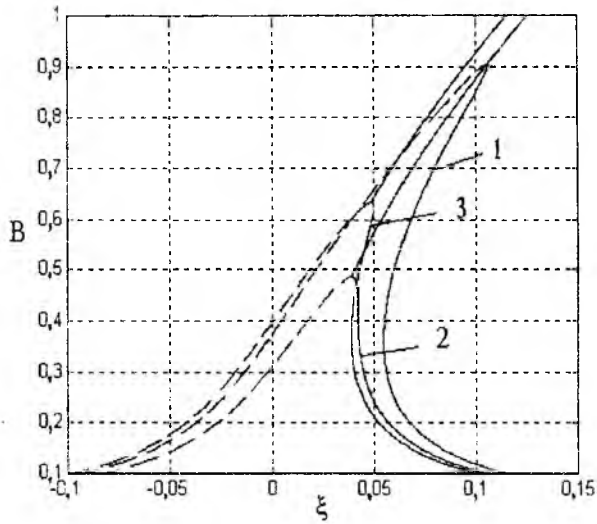

Рис. 2

$$\varphi+\psi=-\frac{\pi}{2};\quad \sin(\varphi+\psi)=-1;\quad I_1(B)=\frac{E_0'}{2(\gamma+m)}\ \text{при}\ \ \xi_*=0\,.\tag{24}$$

Таким образом, из (23) имеем параметрическую регенерацию системы (кривая *1* на рис. 2), а из (24) — параметрическую дегенерацию системы (кривая *2* на рис. 2). При этом значения параметров в уравнении (19) приняты следующие: m = 0,01, γ = 0,03, E_0' = 0,02. Кривая *3* на рис. 2 соответствует обычному резонансу в данной системе (m = 0). Сдвиг скелетных кривых на рис. 2 объясняется тем, что включение генератора накачки, определяющего глубину модуляции m, изменяет собственную частоту системы независимо от наличия колебаний в ней.

Рассмотрим энергетические соотношения при параметрической регенерации. Полная мощность, теряемая в контуре $W_R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_2 i_2^2\, d\tau$, а

мощность, отдаваемая внешней Э.Д.С. — $W_E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_0 \sin(\tau+\psi) i_2 d\tau$.

Ток i_2 в резонансном контуре определяется вторым уравнением системы (3). Разлагая ток в ряд Фурье, и ограничиваясь первой гармоникой, имеем

$$i_2 = \frac{2\alpha l}{w_2} I_1(B)\left\{\sin(\tau+\varphi) + m\left[\sin(\tau+\varphi) + \frac{1}{2}\sin(\tau-\varphi)\right]\right\}. \qquad (25)$$

Учитывая, что при резонансе, когда $\xi_* = 0$, $\varphi = \psi = \pi/4$, а также принимая во внимание выражения для E_0' и γ из (5), получаем

$$W_R = \frac{\alpha\beta l\gamma E_0^2(1+2m)}{8(\gamma-m)^2 s w_2^2 \omega^3} \qquad (26)$$

и

$$W_E = \frac{\alpha\beta l E_0^2(1+m)}{4(\gamma-m) s w_2^2 \omega^2}. \qquad (27)$$

Отношение

$$\frac{W_E}{W_R} = \frac{2(\gamma-m)(1+m)\omega}{\gamma(1+2m)} x \qquad (28)$$

можно при заданной нагрузке, определяемой γ, сделать сколь угодно малой, как и в случае линейной регенеративной системы (*), если увеличивать глубину модуляции. Таким образом, данная нелинейная система может работать как резонансный параметрический регенеративный усилитель, в котором энергия, вкладываемая в систему, отбирается от генератора накачки.

Вышесказанное согласуется с результатами, полученными в (*). При этом представление нелинейности гиперболическим синусом позволило легко провести математическую обработку аппроксимирующей функции и получить при анализе простые выражения.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 22.04.98