

**К АНАЛИЗУ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ТОКА ВМГ**

ЧУМАКОВ В.И.

Рассматриваются параметрические уравнения, описывающие процесс изменения тока в нагрузке взрывомагнитного генератора. Приводятся результаты анализа за схемы I порядка и схемы II порядка с последовательной емкостью.

1. Введение

Одним из наиболее мощных импульсных источников электрической энергии, характеризующихся высоким значением энергоемкости, является взрывомагнитный генератор (ВМГ) [1, 2]. Принцип работы ВМГ основан на сжатии магнитного поля в замкнутом электрическом контуре за счет энергии продуктов детонации взрывчатого вещества. Если скорость сжатия магнитного поля превышает скорость его потерь вследствие диссипативных процессов, то наблюдается усиление тока в контуре. Работа, совершаемая продуктами детонации, затрачивается на преодоление силы, стремящейся к расширению контура. Поэтому в ВМГ также имеет место усиление магнитной энергии.

Процесс изменения тока в нагрузке ВМГ можно описать с помощью параметрического уравнения, порядок которого определяется порядком электрической цепи, моделирующей контур ВМГ. В случае, когда переменная индуктивность является единственным изменяющимся во времени параметром цепи, решение уравнения связывает временную зависимость выходного тока с законом изменения индуктивности в процессе сжатия магнитного поля в контуре ВМГ. Использование таких зависимостей упрощает задачу проектирования ВМГ и различных устройств на их основе, а также облегчает анализ систем, процессы в которых описываются параметрическими уравнениями.

2. Решение уравнения I порядка

Рассмотрим уравнения ВМГ при различных вариантах схемы. Для цепи с одним реактивным элементом при постоянной нагрузке R (рис. 1) уравнение тока $i(t)$ на основании закона Кирхгофа имеет вид

$$i' + \frac{1}{L} \left[\frac{dL}{dt} + R \right] i = 0 \quad (1)$$

Здесь L представляет собой полную индуктивность цепи и может быть представлено как

$$L = L_0 f(t), \quad (2)$$

где $L_0 = L_n + L_H$ - начальная индуктивность, состоящая из переменной индуктивности в момент времени $t=0$ и индуктивности нагрузки; $f(t)$ - функция изменения индуктивности.

Обозначим в (1) множитель при i , называемый инкрементом, через G , получим

$$i' + Gi = 0 \quad (3)$$

Уравнение (3) решается с помощью разделения переменных, при этом решение выражается в виде

$$i = \exp \left[- \int G(t) dt \right] = \frac{I_0}{f(t)} \exp \left[- 2\delta_0 \int \frac{dt}{f(t)} \right], \quad (4)$$

где $\delta_0 = \frac{R}{2L_0}$ - затухание цепи;

$$G(t) = \frac{1}{L} \left(\frac{dL}{dt} + R \right) = \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dt} + 2\delta_0 \right), \quad (5)$$

$I_0 = i(0)$ - начальное значение функции $i(t)$. Приняв для упрощения $I_0=1$, получим

$$i = \frac{1}{f(t)} \exp \left[- 2\delta_0 \int \frac{dt}{f(t)} \right] = \lambda(t) \vartheta(t). \quad (6)$$

Функции $\lambda(t) = \frac{1}{f(t)}$, $\vartheta(t) = \exp \left[- 2\delta_0 \int \frac{dt}{f(t)} \right]$ на-

зываются коэффициентом перестройки индуктивности и параметром сохранения магнитного потока, соответственно. Как видно из (6), функция i будет возрастать, т.е. будет иметь место усиление тока, если выполняется условие $G > 0$. При $G=0$ функция i достигает максимума, следовательно, момент времени t_m , при котором достигается максимальное значение тока в нагрузке ВМГ, можно найти из уравнения

$$\frac{df(t_m)}{dt} + \delta_0 = 0.$$

Максимальное усиление по току определяется как

$$i_m = \frac{1}{f(t_k)} \exp \left[- 2\delta_0 \int_0^{t_k} \frac{dt}{f(t)} \right] = \lambda(t_k) \vartheta(t_k) = \lambda_0 \vartheta(t_k), \quad (7)$$

где $\lambda_0 = L_0/L_H$.

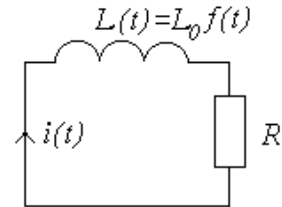


Рис. 1. Схема ВМГ с активной нагрузкой

В табл. 1 приведены выражения для функций i и для величины i_m для некоторых законов изменения индуктивности.

Параметры $\frac{\alpha L_0}{R}$ и $\frac{\beta L_0}{R}$, входящие в выражения

для тока, представляют собой произведение скорости сжатия магнитного потока на постоянную времени цепи генератора, т.е. имеют смысл магнитного числа Рейнольдса для нагрузки m_R . Приведенные выражения показывают, что усиление тока в ВМГ увеличивается с ростом m_R .

В ряде практических приложений оказывается необходимым получать в нагрузке не высокие абсолютные значения тока ВМГ, а большие скорости изменения тока di/dt . Из (1) видно, что величина di/dt пропорциональна как абсолютному значению функции i , так и величине G , т.е. определяется временной зависимостью $f(t)$. Задавая различные виды функций $f(t)$, можно получать требуемые ха-

рактеристики выходной величины $i(t)$. Результаты расчета для выбранных законов изменения $f(t)$ в виде интегральных кривых в координатах di/dt , i приведены на рис. 2.

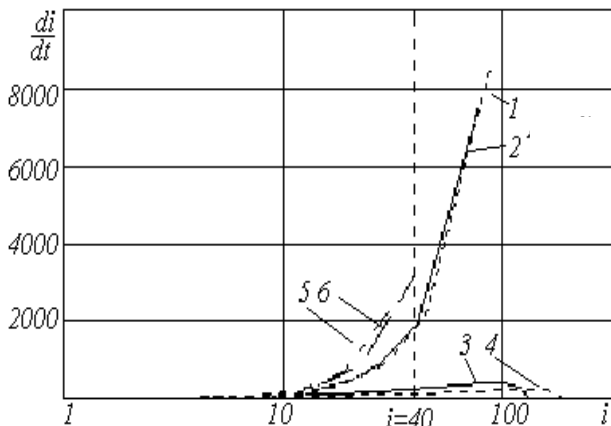


Рис. 2. Интегральные кривые уравнения I порядка: 1, 2 – линейная; 3, 4 – экспоненциальная; 5, 6 – степенная зависимости

Как видно из графиков, наибольшие значения скорости изменения функции i обеспечиваются при степенной зависимости параметрической функции $f(t)$. Величина di/dt растет при уменьшении g ($g=0,8$ – кривая 5, $g=0,7$ – кривая 6). Однако при этом уменьшается коэффициент усиления i (вертикальные линии на графике задают уровень коэффициента усиления, выделен уровень $i=40$). В случае линейного закона $f(t)$ коэффициент усиления возрастает за счет некоторого снижения величины di/dt в области малых i . Изменение вида выходной функции достигается изменением величины m_R ($m_R=12$ – кривая 1, $m_R=8$ – кривая 2). При экспоненциальной форме зависимости $f(t)$ высокие значения усиления тока обеспечиваются при малых нагрузках и больших скоростях перестройки индуктивности b ($b=9$ – кривая 3, $b=6,5$ – кривая 4).

3. Анализ уравнения II порядка

Если ввести в схему емкость C , включенную последовательно с остальными элементами, то получим схему II порядка (рис. 3), для которой уравнение тока имеет вид

$$i'' + \frac{2}{f} \left(\frac{df}{dt} + \delta_0 \right) i' + \frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 \right) i = 0, \quad (8)$$

где $\delta_0 = \frac{R}{2L_0}$ и введено обозначение $\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$.

Сопротивление R считаем постоянным, поэтому уравнение (8) является линейно-параметрическим.

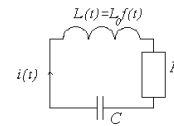


Рис. 3. Схема ВМГ с последовательной емкостью

При постоянном сопротивлении R линейно-параметрическое уравнение II порядка решается только в частных случаях в зависимости от вида функции $f(t)$. Рассмотрим метод решения уравнения (8), основанный на редукции к нормальной форме и приведении к некоторым классам уравнений, для которых решения уже известны. В соответствии с методикой [2, 3] запишем уравнение (8) в виде

$$i'' + a(t)i' + b(t)i = 0. \quad (9)$$

Положив в этом уравнении

$$y(t) = i \exp\left(\frac{1}{2} \int a(t) dt\right), \quad (10)$$

приведем его к нормальной форме, в которой слагаемое, содержащее первую производную, отсутствует:

$$y'' + I(t)y = 0. \quad (11)$$

Здесь функция $I(t)$, называемая инвариантом уравнения (8), равна

$$I(t) = b(t) - \frac{1}{2} a^2(t) - \frac{1}{4} a'(t). \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражения для a и b , получаем

$$I(t) = \frac{\omega_0^2}{f} - \frac{\delta_0(\delta_0 + f')}{f^2}. \quad (13)$$

Уравнение (13) выражает инвариант исходного уравнения (8) с помощью функции изменения параметра f . Заменой переменных

$$y = \psi(t)z, \quad (14)$$

$$u = \int \varphi(t) dt \quad (15)$$

уравнение (11) приводится к виду

Таблица 1

Закон	Линейный	Экспоненциальный	Степенной
f	$1 - \alpha t$	$\exp(-\beta t)$	$(1 - \alpha t)^\gamma$
φ	$(1 - \alpha t) \frac{R}{\alpha L_0}$	$\exp\left[\frac{R}{\beta L_0} (1 - \exp \beta t)\right]$	$\exp\left[-\frac{R}{\alpha L_0 (1 - \gamma)} [(1 - \alpha t)^{1-\gamma} - 1]\right]$
i	$(1 - \alpha t)^{-\left(1 - \frac{R}{\alpha L_0}\right)}$	$\exp\left[\frac{R}{\beta L_0} (1 - \exp \beta t) - \beta t\right]$	$\frac{\exp\left[-\frac{R}{\alpha L_0 (1 - \gamma)} [(1 - \alpha t)^{1-\gamma} - 1]\right]}{(1 - \alpha t)^\gamma}$
i_m	$\frac{\left(1 - \frac{R}{\alpha L_0}\right)}{\lambda_0}$	$\lambda_0 \exp\left[-\frac{R}{\beta L_0} (\lambda_0 - 1)\right]$	$\lambda_0 \exp\left[\frac{R}{\alpha L_0 (1 - \gamma)} \left(1 - \lambda_0^{1+\frac{1}{\gamma}}\right)\right]$

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{\psi\varphi' + 2\psi'\varphi}{\psi\varphi^2} \frac{dz}{zu} + \frac{\psi'' + I\phi}{\psi\varphi^2} z = 0, \quad (16)$$

откуда из условия равенства нулю слагаемого с первой производной получаем соотношение между функциями $j(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -2 \frac{\psi'}{\psi}. \quad (17)$$

Интегрируя (17), получаем

$$\varphi(t) = \frac{B}{\psi^2(t)}; \quad (18)$$

$$u = B \int \frac{dt}{\psi^2(t)}, \quad (19)$$

где B – постоянная интегрирования.

Теперь уравнение (16) можно представить в виде

$$\frac{d^2z}{du^2} + \frac{1}{B^2} (\psi'' + I\psi) \psi^3 z = \frac{d^2z}{du^2} + I_r(u)z = 0, \quad (20)$$

откуда получаем соотношение между инвариантом исходного уравнения (4) и инвариантом преобразованного уравнения (20):

$$I(t) = B^2 \frac{I_r \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right)}{\psi^4} - \frac{\psi''}{\psi}. \quad (21)$$

Таким образом, приходим к решению уравнения (11), полученного методом редукции из исходного уравнения (8). С помощью обратной подстановки из соотношения (10) находим решение уравнения (9):

$$\begin{aligned} i &= y \exp\left(-\frac{1}{2} \int a(t) dt\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int a(t) dt\right) \psi z \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right) = A(t)S(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь введены обозначения

$$A(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int a(t) dt\right), \quad (23)$$

$$S(t) = \psi z \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right). \quad (24)$$

Подставив в (23) выражение для $a(t)$, получим связь с решением уравнения I порядка (4):

$$\begin{aligned} a(t) &= 2G(t) + \frac{2\delta_0}{f(t)}; \\ A(t) &= i_1(t) \exp\left(-\delta_0 \int \frac{dt}{f(t)}\right), \end{aligned} \quad (25)$$

где i_1 – решение уравнения I порядка.

Если рассматривать задачу отыскания решения уравнения (9) в виде знакопеременных функций, то функции $A(t)$ и $S(t)$ приобретают смысл, соответственно, огибающей амплитуд и осцилляторной компоненты тока $i(t)$, причем форма огибающей связана с решением уравнения для схемы ВМГ I порядка (4) соотношением (25), а решение редукци-

рованного уравнения (11) позволяет определить характер осцилляций функции $i(t)$. Заметим, что при выводе соотношения (21) мы не накладывали никаких ограничений на функцию $y(t)$, поэтому выбор ее вида остается произвольным. В фазовом пространстве $\{i'', i', i\}$ огибающая $A(t)$ представляет собой геометрическое место точек пересечения интегральной кривой с плоскостью $i''Oi$; точки пересечения интегральной кривой с плоскостью $i''Oi'$ определяют нули функции $S(t)$.

Инварианты исходного уравнения (8) для рассмотренных ранее законов изменения индуктивности приведены в табл. 2.

Рассмотрим пример. Пусть инвариант преобразованного уравнения (20) равен постоянной величине

$I_r = \pm d^2$. Тогда, согласно (21), получим $I = -\frac{B^2}{\psi^4} - \frac{\psi''}{\psi}$, и уравнение (11) приводится к виду (знак при d выбран минус):

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{B^2}{\psi^4} + \frac{\psi''}{\psi} \right) y = 0. \quad (26)$$

Решение (26) выражается как

$$y = \psi \left\{ B_1 \cos\left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right) + B_2 \sin\left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right) \right\}.$$

Выбирая функцию $\psi(t) = \sqrt[4]{1 - (\omega t)^2}$ и $B_2 = 0$, получаем

$$y = \sqrt[4]{1 - (\omega t)^2} B_1 \cos\left(\frac{B}{\alpha} \arccos(\alpha t) \right) = \sqrt[4]{1 - (\omega t)^2} B_1 T_n(\alpha t).$$

Здесь $T_n(at)$ представляет собой полином Чебышева порядка $n=B/a$. Таким образом, осцилляторный компонент $S(t)$ решения исходного уравнения (8) может описываться полиномами Чебышева.

Подставив (13) в (21), получим выражение, которое устанавливает связь между функцией изменения параметра $f(t)$ исходного уравнения (8) и инвариантом уравнения (20), для которого решение находится в классе известных функций

$$\frac{\omega_0^2}{f} - \frac{\delta_0(\delta_0 + f')}{f^2} = B^2 \frac{I_r \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right)}{\psi^4} - \frac{\psi''}{\psi}. \quad (27)$$

Выражение (25) в общем случае представляет собой уравнение Риккати общего вида [3]:

$$f' = \left\{ \frac{B^2}{\delta_0} \frac{I_r \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right)}{\psi^4} - \frac{1}{\delta_0} \frac{\psi''}{\psi} \right\} f^2 + \frac{\omega_0^2}{\delta_0} f - \delta_0$$

Таблица 2

Закон	Линейный	Экспоненциальный	Степенной
$I(t)$	$\frac{\omega_0^2}{1 - \alpha t} - \frac{\delta_0(\delta_0 - \alpha)}{(1 - \alpha t)^2}$	$(\omega_0^2 - \beta\delta_0 - \delta_0^2 \exp \beta t) \exp \beta t$	$\frac{\omega_0^2}{(1 - \alpha t)^\gamma} - \frac{\delta_0[\delta_0 - \gamma\alpha(1 - \alpha t)]}{(1 - \alpha t)^{2\gamma}}$

или

$$f' = \nu f^2 + \mu f + \xi,$$

$$\text{где } \nu = \left\{ \frac{B^2 I_r \left(B \int \frac{dt}{\psi^2(t)} \right)}{\delta_0 \psi^4} - \frac{1}{\delta_0} \frac{\psi''}{\psi} \right\}, \mu = \frac{\omega_0^2}{\delta_0}, x = d_0.$$

Таким образом, мы приходим к уравнению типа Риккати, устанавливающему соотношение между функцией изменения параметра в исходном уравнении ВМГ и функциями I_r и y уравнения, решенного в классе известных функций.

4. Заключение

В результате проведенного анализа параметрического уравнения ВМГ при активной нагрузке на выходе получены решения, приведены выражения для тока и максимального коэффициента усиления тока в схеме I порядка при различных законах изменения индуктивности. Показано, что при степенном законе изменения индуктивности обеспечивается наиболее высокая скорость изменения выходного тока, что имеет важное значение для ряда

практических приложений ВМГ. Рассмотрена методика решения уравнения II порядка, описывающего схему с последовательной емкостью. Получено уравнение, связывающее временной закон изменения индуктивности ВМГ с функциями, определяющими вид временной зависимости выходного тока, которое может быть использовано при проектировании ВМГ.

Литература 1. Кнопфель Г. Сверхсильные магнитные поля / Пер. с англ. М.: Мир. 1972. 291 с. 2. Манжаловский В. П. К интегрированию некоторых однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в специальных функциях. Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1959. 68 с. 3. Камже Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. М.: Наука, 1976. 576 с. 4. Prishchepenko A. B., Shchelkachev M. V. Dissipative and diffusive losses in helical EMG with capacitive loads // Megagauss Magnetic Field and Pulsed Power Application. 1994. P. 667-670.

Поступила в редколлегию 13.09.98

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Харченко И. Ф.

Чумаков Владимир Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ОРТ ХТУРЭ. Научные интересы: генерации мощных электромагнитных излучений и их применение. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 47-29-55.

УДК 681.3.06:621.396.96

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ ОБЪЕКТА ПО ДАННЫМ РАДИОЛОКАЦИОННОЙ СТАНЦИИ С УЧЕТОМ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

МИХАЙЛУТИН О.М., ПИСКУНОВ С.Н.

Проводится синтез рекуррентного фильтра, позволяющего оптимальным образом учесть некоррелированные и медленно меняющиеся ошибки измерений. Результаты исследований синтезированного фильтра показали его высокую эффективность.

1. Введение

В радиолокационных системах (РЛС) для обработки смеси сигнала с шумом и оценки параметров траекторий сопровождаемых объектов используются рекуррентные цифровые фильтры, позволяющие получить ошибки оценок параметров траекторий существенно меньше ошибок измерения координат. Одной из составляющих суммарных ошибок измерений РЛС являются медленно меняющиеся ошибки (ММОИ), обусловленные различными факторами [1, 2]. Для учета ММОИ при вторичной обработке радиолокационной информации могут быть использованы фильтры, синтезированные на основе метода максимального правдоподобия и требующие накопления измерительной информации за весь сеанс наблюдения [3], что делает их трудно реализуемыми.

Предлагаемые в [3, 4] методы рекуррентной фильтрации измерений РЛС с учетом ММОИ требуют

либо расширения вектора оцениваемых параметров, либо загрузки фильтра.

По результатам юстировки РЛС или вследствие набора статистической информации о ММОИ в процессе эксплуатации при сопровождении эталонных траекторий полученные аппроксимации изменения ММОИ и их статистические характеристики могут быть достаточно эффективно учтены в рекуррентном фильтре.

Проведем синтез рекуррентного фильтра с учетом ММОИ и сравним его с известными фильтрами.

2. Постановка задачи

Предположим, что измерение в момент времени t_n представляет собой суперпозицию полезного сигнала и ошибок:

$$\mathbf{U}_n^p = \mathbf{U}(\vartheta_n) + \Delta \mathbf{U}_{\text{пш}}^p + \Delta \mathbf{U}_M^p f_n, \quad (1)$$

где $\mathbf{U}(\vartheta_n)$ – вектор истинных значений координат, определяемых параметрами движения цели ϑ и временем t_n ; $\Delta \mathbf{U}_{\text{пш}}^p = \Delta \mathbf{U}_{\text{ш}}^p(t_n)$ – вектор некоррелированных ошибок измерения; $\Delta \mathbf{U}_M^p$ – случайный вектор с нулевым средним и заданной корреляционной матрицей; $f_n = f(t_n)$ – известная априори неслучайная функция времени; $\Delta \mathbf{U}_M^p f_n = \Delta \mathbf{U}_{\text{пмм}}^p$ – вектор медленно меняющихся (коррелированных) ошибок измерения координат сопровождаемой цели. При этом

$$M[\Delta \mathbf{U}_{\text{пш}}^p] = 0; M[\Delta \mathbf{U}_{\text{пш}}^p \Delta \mathbf{U}_{\text{пш}}^{pT}] = R_{\text{пш}} = R_n;$$

$$M[\Delta \mathbf{U}_M^p] = 0; M[\Delta \mathbf{U}_M^p \Delta \mathbf{U}_M^{pT}] = R_{\text{пмм}};$$

$$M[\Delta \mathbf{U}_M^p f_n \Delta \mathbf{U}_M^{pT} f_n] = R_{\text{пмм}} f_n^2.$$