

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО ВОЛНОВОДА ДИПОЛЕМ

В. А. Марченко, В. Г. Сологуб

1. Бесконечная периодическая последовательность одинаковых металлических колец, стенки которых предполагаются бесконечно тонкими и идеально проводящими, образует кольцевой волновод (рис. 1).

Рассмотрим задачу о возбуждении такого волновода электрическим или магнитным диполем, расположенным на оси волновода. Моменты диполей считаем направленными по оси волновода и по величине равными единице.

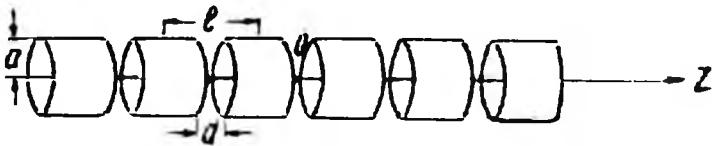


Рис. 1.

Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  так, чтобы диполь попал в начало координат и ось  $Oz$  совпала с общей осью всех колец, образующих волновод.

Разберем подробно случай электрического диполя, а затем кратко остановимся на магнитном диполе.

Как известно, электрический диполь в свободном пространстве возбуждает поле  $E^0, H^0$  со следующими комплексными амплитудами (временной множитель  $e^{i\omega t}$  для краткости всюду опускаем):

$$E_\rho^0 = \frac{r^2}{\partial z \partial \rho} \Pi_0, \quad E_\varphi^0 = 0, \quad E_z = \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi_0; \quad (1)$$

$$H_\rho^0 = 0, \quad H_\varphi^0 = ik \frac{\partial}{\partial \rho} \Pi_0, \quad H_z^0 = 0,$$

где функция

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad k = \frac{\omega}{c},$$

$z$  — составляющая электрического вектора Герца, две другие составляющие которого равны нулю.

Будем искать поле  $E, H$ , возбуждаемое диполем в присутствии кольцевого волновода, тоже с помощью электрического вектора Герца с единственной отличной от нуля составляющей по оси  $Oz$ , которую представим в таком виде:

$$\Pi(\rho, z) = \Pi_0(\rho, z) - \Pi_1(\rho, z). \quad (2)$$

Функцию  $\Pi_0(\rho, z)$  можно разложить в интеграл Фурье

$$\Pi_0(\rho, z) = \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda z} d\lambda, \quad (3)$$

где  $\sqrt{k^2 - \lambda^2}$  определен в плоскости  $\lambda$ , разрезанной вдоль прямых, идущих из  $k$  вертикально вверх, а из  $-k$  вертикально вниз, следующим условием: при  $|\lambda| \rightarrow \infty$   $\text{Im} \sqrt{k^2 - \lambda^2} > 0$ .

Функцию  $\Pi_1(\rho, z)$  удобно искать в таком виде:

$$\Pi_1(\rho, z) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \lambda^2) H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda^2}) u(\lambda; \rho, z) e^{i\lambda z} d\lambda. \quad (4)$$

где функция  $u(\lambda; \rho, z)$  периодична по  $z$  с периодом  $l$ , равным периоду волновода.

Чтобы поле  $E, H$ , построенное из функции  $\Pi(\rho, z)$  по формулам (1), удовлетворяло уравнениям Максвелла и имело нужную особенность в начале координат (в диполе), нужно, чтобы функция  $\Pi_1(\rho, z)$  всюду, кроме металлических колец волновода, удовлетворяла уравнению Гельмгольца  $\Delta \Pi_1 + k^2 \Pi_1 = 0$ . Отсюда следует, что при любом  $\lambda$  этому уравнению должна удовлетворять функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$ .

Для удовлетворения граничных условий на металлических кольцах нужно, чтобы на них  $E_z = 0$  ( $E_\varphi$  равно нулю тождественно в силу (1)), что приводит к такому краевому условию для функции  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$ :

$$\left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z) = e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}). \quad (5)$$

Разлагая периодическую по  $z$  функцию  $u(\lambda, \rho, z)$  в ряд Фурье и учитывая при этом, что функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца, а искомое поле не должно содержать волн, распространяющихся из бесконечности ( $\rho = \infty$ ) к волноводу, получим

$$e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z) = \begin{cases} e^{i\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_0(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z} & \rho < a, \\ e^{i\lambda z} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_n H_0^{(1)'}(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z} & \rho > a, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\rho_n = \sqrt{k^2 - h_n^2}, \quad h_n = \lambda + \frac{2\pi}{l} n \quad (6')$$

и корень выбирается таким образом, что  $\text{Im} \rho_n > 0$ , а при  $\text{Im} \rho_n = 0$  —  $-\text{Re} \rho_n > 0$ .

Так как функция  $\left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  должна оставаться непрерывной при  $\rho = a \pm 0$  (на кольцах в силу (5), в щелях между ними — в силу того, что функция  $e^{i\lambda z} u(\lambda, \rho, z)$  удовлетворяет там уравнению Гельмгольца), то

$$\tilde{\alpha}_n = \alpha_n \frac{J_0(\rho_n a)}{H_0^{(1)'}(\rho_n a)}. \quad (7)$$

Используя граничное условие (5), соотношение (7), непрерывность  $e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$  и  $\frac{\partial}{\partial \rho} e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z)$  в щелях, а также тождество

$$J_0'(x) H_0^{(1)'}(x) - J_0(x) H_0^{(1)''}(x) = \frac{2}{x^2}.$$

придем к следующим уравнениям:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{e^{ihnz}}{H_0^{(1)}(\rho_n a)} = 0 \quad (\text{в щелях}), \quad (8)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a) e^{ihnz} = e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}),$$

из которых нужно определить коэффициенты  $\alpha_n = \alpha_n(\lambda)$ .

2. Введем такие обозначения:

$$x = ka; \quad \Delta = \frac{l}{2\pi a}; \quad \frac{l}{2\pi} = m_0 + \mu; \quad h_n = \frac{2\pi}{l} (m_0 + n + \mu);$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{l} z; \quad x_{m_0+n} = \alpha_n \rho_n^2 J_0(\rho_n a), \quad (9)$$

где  $m_0$  — ближайшее к  $\frac{l}{2\pi}$  целое число, так что  $-\frac{1}{2} \leq \mu < \frac{1}{2}$ .

В этих обозначениях (принимая без потери общности, что начало координат лежит в середине одной из щелей) система (8) принимает такой вид:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{i(n+\mu)} \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_n) e^{i(n+\mu)\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (10)$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{i(n+\mu)\varphi} = e^{i(m_0+\mu)\varphi}, \quad \frac{\pi l}{l} < |\varphi| \leq \pi, \quad (10')$$

где величины  $\epsilon_n$  ( $-\infty < n < \infty$ ) определяются равенствами

$$\frac{1}{\rho_n^2 J_0(\rho_n a) H_n^{(1)}(\rho_n a)} = \frac{\pi a^2 \Delta}{i(m_0 + n + \mu)} \frac{|m_0 + n|}{m_0 + n} (1 - \epsilon_{m_0+n})$$

и по определению  $\frac{|0|}{0} = 1$ .

Существенно при этом, что  $\epsilon_n = 0$  ( $n^{-2}$ ) при  $|n| \rightarrow \infty$ . Точнее говоря, при  $|n + \mu| > x\Delta$  имеет место неравенство

$$|\epsilon_n| \leq \frac{2^s (x^s + c)}{2(n+\mu)^2} \left(1 - \frac{x^2 \Delta^2}{(n+\mu)^2}\right)^{-2/s}, \quad (11)$$

в котором  $c$  — абсолютная постоянная, следующее из асимптотических формул для функций Бесселя.

Уравнение (10) можно заменить двумя эквивалентными ему уравнениями, одно из которых получается из него дифференцированием, а другое — подстановкой  $\varphi = 0$ . Проведя такую замену и деля затем все равенства на  $e^{in\varphi}$ , получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n - \delta_n^{m_0}) e^{in\varphi} = 0, \quad \frac{\pi d}{l} < |\varphi| \leq \pi;$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_n - \delta_n^{m_0}) \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = -\frac{|m_0|}{m_0} e^{im_0\varphi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \epsilon_n e^{in\varphi}, \quad |\varphi| < \frac{\pi d}{l}; \quad (12)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{n+\mu} \frac{|n|}{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x_n}{n+\mu} \frac{|n|}{n} \delta_n,$$

где  $\delta_n^{m_0}$  — символ Кронекера,  $\delta_n^{m_0} = 0$  ( $m_0 \neq n$ ) и  $\delta_n^{m_0} = 1$ .

Согласно результатам работы [1], два первых уравнения системы эквивалентны такой бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_m - \delta_m^{m_0} = -\frac{|m_0|}{m_0} V_m^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_m^n(u) + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u), \quad (13)$$

где  $m$  принимает все целочисленные значения от  $-\infty$  до  $\infty$  (кроме  $m = -1$ , при котором соответствующее уравнение превращается в тождество) и коэффициенты выражаются через полиномы Лежандра  $P_k(u)$  от  $u = \cos \frac{\pi l}{l}$  по формуле

$$V_m^n(u) = \frac{m+1}{2(m-n)} [P_m(u) P_{n+1}(u) - P_{m+1}(u) P_n(u)]. \quad (14)$$

Выразим теперь  $x_m$  через правые части равенств (13) и полученные значения подставим в левую часть последнего из уравнений (12). В результате получим

$$-\frac{|m_0|}{m_0} V_\mu^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_\mu^n(u) + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) R_\mu(u) = 0, \quad (15)$$

где для краткости приняты такие обозначения:

$$V_\mu^n(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n(u) - \delta_m^n \frac{|n|}{n}}{m + \mu} \frac{|m|}{m}; \quad R_\mu(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{P_m(u) |m|}{m + \mu} \frac{|m|}{m}.$$

Величины  $V_\mu^n$  и  $R_\mu$  выражаются через функции Лежандра следующим образом:

$$V_\mu^n(u) = \frac{1}{\sin \mu \pi} \left\{ P_{\mu-1}(-u) V_\mu^n(u) - \frac{1}{2} \mu [P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u) V_\mu^n(u)] \right\}, \quad (16)$$

где  $V_0^n(u)$  определена формулой (14), а

$$|P_\mu^n(u) = \frac{1}{n + \mu} |P_\mu^n(u) - \frac{P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} [P_n(u) - P_{n-1}(u)]|$$

и  $P_\mu(x)$  — функции Лежандра.

Подставляя правые части формул (16) в уравнение (15) и используя при этом уравнение (13) с  $m = 0$ , будем иметь

$$\frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_\mu(-u) + P_{\mu-1}(-u)} (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) - \mu \left[ -\frac{|m_0|}{m_0} V_m^{m_0}(u) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n V_m^n(u) \right] = 0. \quad (17)$$

Это уравнение совместно с уравнениями (13) эквивалентно исходной системе.

3. Переходя к приближенному решению полученной системы, заметим прежде всего, что когда  $\mu$  пробегает весь интервал  $\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right|$ , некоторые  $\varepsilon_n$  обращаются в бесконечность. Это происходит тогда, когда  $\rho_{n-m_0} a$  оказывается равным нулю или какому-нибудь корню функции Бесселя  $J_0(x)$ . Частично можно избавиться от этого усложнения следующим обра-

зом: разобьем интервал  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  на части так, чтобы на каждой из них в бесконечность могло обратиться только одно  $\varepsilon_n$ . Рассматривая каждый из этих интервалов отдельно, можем во всех уравнениях (13) исключить член, содержащий соответствующее  $\varepsilon_n$ , с помощью уравнения (17). После этого будет уже сравнительно просто получить приближенное решение и оценить его погрешность.

Проведем все необходимые выкладки в случае, когда  $2\kappa\Delta < 1$ . В общем случае изменения несущественны.

Итак, пусть

$$2\kappa\Delta < 1.$$

Из формулы (6') видно, что тогда  $\rho_{n-m_0}a$  при всех  $n \neq 0$  принимает чисто мнимые значения, если  $|\mu| \leq \frac{1}{2}$ . Следовательно, в рассматриваемом случае нужно исключить из уравнений члены, содержащие  $\varepsilon_0$ . Из формулы (16') следует, что  $V^0 = \frac{1}{\mu}$ . Поэтому, умножая равенство (17) на  $V_m^0(u)$  и складывая его затем с уравнением (13), получим

$$x_m - \delta_m^{m_0} = -\frac{|\mu_n|}{m_0} [V_m^{m_0}(u) - \mu V_m^{m_0}(u) V_m^0(u)] + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n [V_m^n(u) - \mu V_m^n(u) V_m^0(u)] + (x_{-1} - \delta_{-1}^{m_0}) P_m(u) + \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u) + P_{\mu}(-u)} V_m^0(u) (x_0 - \delta_0^{m_0}). \quad (18)$$

Решим полученную систему уравнений (18) относительно  $x_m$ , считая  $x_0$  известным. С этой целью вычтем из каждого уравнения системы с  $m \neq 0$  уравнение с  $m = 0$ , умножив его предварительно на  $P_m(u)$ .

В результате получим

$$x_m - \delta_m^{m_0} = -\frac{|\mu_n|}{m_0} W_m^{m_0}(u) + (x_0 - \delta_0^{m_0}) \left\{ \frac{2P_{\mu-1}(-u)}{P_{\mu-1}(-u) + P_{\mu}(-u)} [V_m^0(u) - \mu V_m^0(u) P_m(u)] + P_m(u) \right\} + \sum_{n \neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \varepsilon_n W_m^n(u), \quad (19)$$

где

$$W_m^n(u) = V_m^n(u) - \mu V_m^n(u) V_m^0(u) - V_m^0(u) P_m(u) + \mu V_m^n(u) V_m^0(u) P_m(u) = V_m^{n-1}(u) - \mu V_m^n(u) V_m^{n-1}(u).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если в равенстве (19) взять  $m = -1$ , то получим уравнение (18) при  $m = 0$ .

Таким образом, система уравнений (19,17), в которых  $m$  принимает все целочисленные значения, эквивалентна системе (18,17).

Положим

$$q = \max_m \sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n W_m^n(u)|.$$

Используя оценку (11) и оценку для функций Лежандра, можно показать, что

$$q < C_1 \frac{\Delta^2 \sqrt{1-u}(x^2+1)}{(1-4\kappa^2\Delta^2)^{3/2}},$$

где  $C_1$  — некоторая константа, не зависящая от параметров задачи.

Величина  $q$  будет малой, когда мало  $\Delta$  (кольца располагаются достаточно густо), либо когда  $u$  близко к единице (щели между кольцами достаточно узки).

Будем считать, что  $q < 1$ . В этом случае приближенное решение с оценкой погрешности можно получить методом последовательных приближений.

Ограничиваясь первым приближением, получим ( $m \neq 0$ )

$$x_m = (x_0 - \delta^{m_0}) [(m + \mu) V^m(u) + \theta_m(u)] + \delta^{m_0} - \frac{1}{m_0} W_{m_0}^{m_0}(u) + \theta_{m_0}^{m_0}(u),$$

где

$$|\theta_m(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq q} |(m + \mu) V^m(u)| < 3 \sqrt{2\pi} \sqrt{1+u} \frac{q}{1-q},$$

$$|\theta_{m_0}^{m_0}(u)| < \frac{q}{1-q} \max_{m \neq q} |\delta_{m_0}^{m_0} - \frac{1}{m_0} W_{m_0}^{m_0}(u)| < C_2 [1 + \ln(|m_0| + 1)] \frac{q}{1-q},$$

причем  $\theta_m(u)$  не зависит от  $m_0$ , а  $\theta_m^0(u) = 0$ , так же, как и  $W_m^0(u) = 0$ .

Подставляя найденные значения  $x_m$  в уравнение (17) и решая его затем относительно  $x_0 - \delta^{m_0}$ , найдем, что

$$\begin{aligned} x_0 - \delta_0^{m_0} = & \\ & \frac{(1 - \varepsilon_{m_0}) V_{m_0}^{m_0}(u) - \sum_{n \neq 0} \frac{|\pi|}{n} \varepsilon_n V^n(u) \left| \frac{1}{m_0} W_{m_0}^{m_0}(u) \right|}{\frac{P_{\mu}(-u)}{P_{\mu}(\mu(-u)) + P_{\mu}(-u)} + 1 - \sum_{n \neq 0} \frac{\varepsilon_n V^n(u)}{n} [(n + \mu) V^n(u) + \theta_n(u)]} \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (9) следует

$$\alpha_n = \frac{m_0}{\rho_n J_0(\rho_n a)}.$$

Подставим определяемые этой формулой значения  $\alpha_n$  в (6). Учитывая, что при  $m \neq 0$  и  $2x\Delta < 1$

$\rho_{n-m_0} a$  принимает чисто мнимые значения, причем

$$|\rho_{n-m_0} a| = \left| \sqrt{k^2 - \frac{m_0^2}{a^2}} \right| \approx \sqrt{1 - 4x^2 \Delta^2}$$

и, следовательно, для  $0 \leq \rho \leq a(1 - \theta)$  и  $\rho \geq a(1 + \theta)$  при  $m \neq 0$  равномерно по  $\rho$  в соответствующих областях выполняются неравенства ( $\theta > 0$ ):

$$\frac{J_{m-m_0}(\rho_{m-m_0} a)}{J_0(\rho_{m-m_0} a)} > C_3 e^{-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2\Delta^2}} \left( m - \frac{1}{2} \right)} \quad 0 \leq \rho \leq a(1 - \theta);$$

$$\frac{H_{m-m_0}^{(1)}(\rho_{m-m_0} a)}{H_0^{(1)}(\rho_{m-m_0} a)} < C_4 e^{-\frac{1}{\sqrt{1-4x^2\Delta^2}} \left( m - \frac{1}{2} \right)} \quad \rho \geq a(1 + \theta).$$

получим

$$e^{i\lambda z} u(\lambda; \rho, z) = \begin{cases} x_0 \frac{J_{m-m_0}(\rho_{m-m_0} a)}{J_0(\rho_{m-m_0} a)} e^{i \sqrt{1-4x^2\Delta^2} \rho z} + u_1(\lambda; \rho, z), & 0 \leq \rho \leq a(1 - \theta) \\ \frac{H_{m-m_0}^{(1)}(\rho_{m-m_0} a)}{H_0^{(1)}(\rho_{m-m_0} a) \rho^2} e^{\frac{2\pi}{i} \rho z} + u_2(\lambda; \rho, z), & \rho \geq a(1 + \theta), \end{cases} \quad (21)$$

где для функций  $\bar{u}_1(\lambda; \rho, z)$  и  $\bar{u}_2(\lambda; \rho, z)$  справедлива оценка

$$|\bar{u}_i(\lambda; \rho, z)| < C_4 \Delta^2 \frac{\ln \left( 1 + \left| \frac{\lambda}{2\pi} \right| \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{1 - 4x^2 \Delta^2}}{\Delta}}, \quad (i = 1, 2).$$

Формулы (21) дают приближенное решение задачи, точность которого тем выше, чем меньше  $\Delta$ .

4. Исследуем подробно случай густого расположения колец, т. е. случай, когда  $\frac{l}{2\pi a} \ll 1$ ;  $\frac{2\pi}{R} > 2l$ . Для этого вычислим предел, к которому

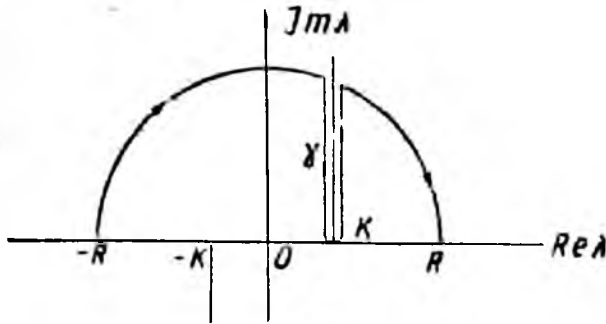


Рис. 2.

стремится функция  $\Pi_1(\rho, z)$ , когда  $\Delta = \frac{l}{2\pi a}$  стремится к нулю. Из формулы (20) следует, что если  $\Delta \rightarrow 0$ , то  $x_0 = \Delta 0$  (1) при  $m_0 \neq 0$ , а при  $m_0 = 0$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x_0 = \frac{-i\pi Q p_0^2 a^2 J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(p_0 a)}{-i\pi Q p_0^2 a^2 J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(p_0 a) + 1},$$

где

$$Q = \lim_{\Delta \rightarrow 0} -\Delta \ln \frac{1-u}{2} = -\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ d \rightarrow 0}} \frac{l}{\pi a} \ln \sin \frac{\pi d}{2l},$$

причем предполагается, что последний предел существует.

Отсюда и из формул (4), (21) следует, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1(\rho, z) = \begin{cases} \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\pi Q p_0^2 a^2 H_0^{(1)}(p_0 a)}{-i\pi Q p_0^2 a^2 H_0^{(1)}(p_0 a) J_0(p_0 a) + 1} J_0(p_0 \rho) H_0^{(1)}(p_0 a) e^{i\lambda |z|} d\lambda, \rho < a; \\ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\pi Q p_0^2 a^2 H_0^{(1)}(p_0 a)}{-i\pi Q p_0^2 a^2 J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(p_0 a) + 1} J_0(p_0 a) H_0^{(1)}(p_0 \rho) e^{i\lambda |z|} d\lambda, \rho > a. \end{cases} \quad (22)$$

Полученное выражение удобно записать в другом виде. Интеграл по отрезку  $(-R, R)$  можно заменить на сумму интеграла по дуге полуокружности радиуса  $R$  с петлей  $\gamma$ , охватывающей верхний разрез (рис. 2), и вычетов относительно полюсов подынтегральной функции, попадающих в соответствующую область.

При  $R \rightarrow \infty$  интеграл по полуокружности стремится к нулю, а интеграл по петле  $\gamma$  можно свести к интегралу по вертикальной прямой от  $k + i0$  до  $k - i\infty$  — от разности значений подынтегральной функции на правом и левом берегах разреза.

Заметим теперь, что на обоих берегах разреза, охватываемого петлей  $\gamma$ , все функции, кроме  $H_0^{(1)}(\rho_0 a)$  и  $H_0^{(1)}(\rho_0 \rho)$ , принимают одинаковые значения, и так как аргумент  $\rho_0 = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$  при переходе с левого берега разреза на правый увеличивается на  $\pi$ , то при таком переходе функции  $H_0^{(1)}(\rho_0 a)$  и  $H_0^{(1)}(\rho_0 \rho)$  приобретают добавку, равную  $-2J_0(\rho_0 a)$  и  $-2J_0(\rho_0 \rho)$  соответственно. Учитывая это, получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi_1(\rho, z) = \begin{cases} 2\pi i \sum_{k+i0}^{k+i\infty} \text{Res} + i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho_0 \rho) \left\{ -1 + \frac{[-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \times}{\times [-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(\lambda)}} \right\} e^{i\lambda |z|} d\lambda; & \rho < a; \\ -\frac{1}{2} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \left\{ -J_0(\rho_0 \rho) - \right. \\ \left. - \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{H_0^{(1)}(\rho_0 a)} \right\} e^{i\lambda |z|} a \lambda, & \rho > a. \end{cases}$$

где  $f^{(n)}$  и  $f^{(\lambda)}$  означают соответственно значения функции  $f$  на правом и левом берегах разреза,  $f|_{(n)}^{(\lambda)} = f^{(n)} - f^{(\lambda)}$  и вычеты берутся по всем полюсам функций

$$\frac{1}{2} \frac{\pi Q \rho_0^2 a^2 H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1} \begin{cases} J_0(\rho_0 \rho) H_0^{(1)}(\rho_0 a), & \rho < a, \\ H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) J_0(\rho_0 a), & \rho > a, \end{cases}$$

лежащим в верхней полуплоскости.

Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda, \dots$  корни функции

$$-i\pi Q \rho_0^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 a) + 1, \quad (23)$$

лежащие в верхней полуплоскости. Учитывая вид подынтегральных функций в формуле (22), получим

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum \text{Res} &= - \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{-1} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda |z|}, \\ 2\pi i \sum' \text{Res} &= - \sum_{\lambda} A_{\lambda}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda |z|}, \end{aligned}$$

причем  $A_{\lambda}^{-1} J_0(a \sqrt{k^2 - \lambda^2}) = A_{\lambda}^{+} H_0^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda^2})$ . Используя эти выражения и представление

$$\frac{e^{ik \sqrt{k^2 - \lambda^2}}}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} = -i \int_{k+i0}^{k+i\infty} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda^2}) e^{i\lambda |z|} d\lambda,$$

окончательно получим

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi(\rho, z) = \begin{cases} \sum A^- J_0(\rho \sqrt{k^2 + \lambda_n^2}) e^{i\lambda_n |z|} - \\ - i \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|} d\lambda}{[-i\pi Q \rho^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \times} & \rho < a; \\ \times [-i\pi Q \rho^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \\ \sum A^+ H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_n^2}) e^{i\lambda_n |z|} \\ + \frac{i}{2} \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|}}{-i\pi Q \rho^2 a^2 J_0(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1} \Big|_{(n)} e^{i\lambda |z|} d\lambda & \rho > a \end{cases} \quad (24)$$

5. Перейдем к рассмотрению задачи о возбуждении кольцевого волновода магнитным диполем. Поле в этом случае будет определяться магнитным вектором Герца, имеющим только одну, отличную от нуля составляющую  $\Pi^*(\rho, z)$  — вдоль оси  $Oz$ , по формулам

$$E_\rho = 0; \quad E_\varphi = -ik \frac{\partial}{\partial z} \Pi^*; \quad E_z = 0; \\ H_\rho = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi^*; \quad H_\varphi = 0; \quad H_z = (k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \Pi^*. \quad (25)$$

Функцию  $\Pi^*(\rho, z)$  удобно искать в виде

$$\Pi^*(\rho, z) = \Pi_0(\rho, z) - \Pi_1^*(\rho, z) = \Pi_0(\rho, z) + \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{k^2 - \lambda^2} H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda^2}) u^*(\lambda; \rho, z) e^{i\lambda z} d\lambda,$$

где

$$e^{i\lambda z} u^*(\lambda; \rho, z) = \begin{cases} e^{i\lambda z} \sum \beta_n J_0(\rho_n \rho) e^{-\frac{z}{l} n z}, & \rho < a \\ e^{i\lambda z} \sum \beta_n H_0^{(1)}(\rho_n \rho) e^{i \frac{2\pi}{l} n z}, & \rho > a. \end{cases}$$

Функция  $\Pi_1^*(\rho, z)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца во всем пространстве, кроме металлических колец, на которых должно выполняться граничное условие  $E_\varphi = 0$ . Это приводит к следующим уравнениям:

$$\beta_n = \frac{J_1(\rho_n a)}{H_1^{(1)}(\rho_n a)} \beta_n, \\ \sum \beta_n \frac{\rho_n}{H_1^{(1)}(\rho_n a)} e^{i h n z} = 0 \quad (\text{в щелях}); \\ \sum \beta_n \rho_n J_1(\rho_n a) e^{i h n z} = -e^{i\lambda z} \quad (\text{на кольцах}),$$

из которых должны быть определены неизвестные коэффициенты  $\beta_n(\lambda)$ .

Исследование полученных уравнений ничем не отличается от исследования уравнений (8).

Поэтому мы приведем лишь окончательный результат сразу для предельного случая, когда  $\Delta = \frac{l}{2\pi a} \rightarrow 0$ , причем существует

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} -\Delta \ln \frac{1+y}{2} = -\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ a=l}} \frac{l}{\pi a} \ln \cos \frac{\pi y}{2l} = \frac{l}{Q^*}$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi^*(\rho, z) = \begin{cases} \sum B_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) e^{i\lambda_{\nu}^{\prime} |z|} - \\ - i \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{J_0(\rho_0 \rho) e^{i\lambda |z|} d\lambda}{[-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) I_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \times} & \rho < a \\ \times [-i\pi Q^* J_1(i \lambda) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)} \\ \sum B_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) e^{i\lambda_{\nu}^{\prime} |z|} + \\ + \frac{i}{2} \int_{k+i0}^{k+i\infty} \frac{H_0^{(1)}(\rho_0 a)}{[-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1]^{(n)}} e^{i\lambda |z|} d\lambda, & \rho > a \end{cases} \quad (26)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\nu}^{\prime}, \dots$  — корни функции

$$-i\pi Q^* J(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1, \quad (27)$$

лежащие в верхней полуплоскости,  $B_{\nu}^{-} J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$  и  $B_{\nu}^{+} H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$  — вычеты в этих корнях функций

$$\pi^2 i \frac{H_1^{(1)}(\rho_0 a) J_0(\rho_0 \rho)}{-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1} H_1^{(1)}(\rho_0 a) \text{ и } \pi^2 i \frac{H_1^{(1)}(\rho_0 a) H_0^{(1)}(\rho_0 \rho) J_1(\rho_0 a)}{-i\pi Q^* J_1(\rho_0 a) H_1^{(1)}(\rho_0 a) + 1}$$

соответственно, причем  $B_{\nu}^{-} J_1(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}}) = B_{\nu}^{+} H_1^{(1)}(a \sqrt{k^2 - \lambda_{\nu}^{\prime 2}})$ .

Замечание. Мы показали, что при  $\Delta \rightarrow 0$  существуют пределы функций  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$  и нашли эти пределы. Нетрудно убедиться, что существуют также пределы определяемых функциями  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$  полей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , и эти пределы находятся по формулам (2) или (25) из соответствующих пределов для функций  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$ .

6. Полученные представления (24), (26) удобны для выяснения того, как убывают функции  $\Pi(\rho, z)$  и  $\Pi^*(\rho, z)$ , а, следовательно, и соответствующие поля при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Первые слагаемые в формулах (24), (26) убывают экспоненциально, зато вторые — алгебраически. Поэтому на бесконечности ( $|z| \rightarrow \infty$ ) главную роль будут играть вторые слагаемые. Однако их роль будет заметна тем позже (т. е. начиная с больших  $|z|$ ), чем больше  $Q$  (соответственно  $Q^*$ ), так как величина интегральных членов убывает с ростом  $Q$  ( $Q^*$ ), как  $Q^{-2}$  ( $Q^{*-2}$ ) при  $\rho < a$  и  $Q^{-1}$  ( $Q^{*-1}$ ) при  $\rho > a$ .

Например, если  $ka$  лежит между первым и вторым корнями функции Бесселя  $J_0(x)$  (соответственно  $J_1(x)$ ), то корень с наименьшей мнимой частью при  $Q \rightarrow \infty$  ( $Q^* \rightarrow \infty$ ) стремится к корню  $J_0(\sqrt{k^2 - \lambda^2} a)$   $J_1(\sqrt{k^2 - \lambda^2} a)$ , который вещественен. При этом оказывается, что  $\text{Im} \lambda_1 = 0$  ( $Q^{-2}$ ),  $\text{Im} \lambda_1'' = 0$  ( $Q^{*-2}$ ). Мнимые части всех других корней функций (23) и (27) стремятся к конечным пределам, отличным от нуля. Отсюда и из оценок интегральных членов следует, что при больших  $Q$  в области

$$1 \ll |z| \ll Q^2 (\ln Q |z| - k\rho) \quad (28)$$

в случае электрического диполя существенную роль будет играть только одно слагаемое, так что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi(\rho, z) \approx \begin{cases} \frac{A_1^- J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho < a \\ \frac{A_1^- H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho > a, \end{cases} \quad (29)$$

а в случае магнитного диполя при больших  $Q^*$  в области

$$1 \ll |z| \ll Q^{*2} (\ln Q^* |z| - k\rho) \quad (28')$$

будем иметь

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Pi^*(\rho, z) \approx \begin{cases} B_1^- J_0(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho < a \\ B_1^+ H_0^{(1)}(\rho \sqrt{k^2 - \lambda_1^2}) e^{\lambda_1 |z|}, & \rho > a, \end{cases} \quad (29')$$

причем соответствующие поля в этих областях с хорошим приближением получаются из правых частей равенств (29), (29') по формулам (2) и (25).

Заметим, однако, что приближенные формулы (29) и (29') совершенно непригодны вне указанных областей, так как вне этих областей существенную роль играет сумма других слагаемых в представлениях (24) и (26). При этом поле, соответствующее отдельным слагаемым, теряет физический смысл. Это особенно наглядно видно из того, что поле, отвечающее каждому слагаемому (члену соответствующего ряда или интегральному члену), взятому в отдельности, экспоненциально растет при  $\rho \rightarrow \infty$ , хотя суммарное поле, конечно, убывает.

Для определения скорости затухания при  $|z| \rightarrow \infty$  электрических и магнитных волн в кольцевом волноводе Н. Н. Смирнов [2] искал решения в виде (29), (29') и определял скорость затухания по мнимой части  $\lambda_1$  (соответственно  $\lambda_1'$ ).

Полученные им решения в точности совпадают с правыми частями выражений (29) и (29'). Метод Н. Н. Смирнова должен давать очень хорошие результаты при малых  $\Delta$  и больших  $Q$  ( $Q^*$ ) в областях, определяемых неравенствами (28), (28'), хотя вне этих областей принятые им приближенные выражения для поля совершенно непригодны.

### ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, XXXII, вып. 4, 381, 1962.
2. Н. Н. Смирнов. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями. ЖТФ, XXVIII, вып. 7, 1494, 1958.