Метод Чисельного Аналізу Процесу Перемішування В'язкої Суміші

Надія Гибкіна
кафедра прикладної математики
Харківський національний
університет радіоелектроніки
Харків, Україна
nadiia.gybkina@nure.ua

Максим Сидоров
кафедра прикладної математики
Харківський національний
університет радіоелектроніки
Харків, Україна
maxim.sidorov@nure.ua

Ганна Стаднікова
кафедра прикладної математики
Харківський національний
університет радіоелектроніки
Харків, Україна
hanna.stadnikova@nure.ua

Numerical Analysis Method for Mixing the Viscous Mix

Nadiia Gybkina
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
nadiia.gybkina@nure.ua

Maxim Sidorov
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
maxim.sidorov@nure.ua

Hanna Stadnikova
Department of Applied Mathematics
Kharkiv National University
of Radio Electronics
Kharkiv, Ukraine
hanna.stadnikova@nure.ua

***Анотація*—Розглядається задача чисельного аналізу перемішування в'язкої суміші, яке викликане дією деякої зовнішньої сили. Математичною моделлю задачі є початково-крайова задача для функції течії. Для її розв'язання запропоновано використати метод *R*-функцій з апроксимацією невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна для нестаціонарних задач. Аналіз траєкторій руху частинок суміші проводиться за допомогою методів розв'язання задачі Коші. Обчислювальний експеримент проведено для тестової задачі у одиничному квадраті.**

***Abstract*—The problem of numerical analysis of the mixing of a viscous mix, which is caused by the action of some external force, is considered. The mathematical model of the problem is an initial-boundary problem for the stream function. To solve it, it is proposed to use the method of R-functions with the approximation of an indefinite component of the structure by the Galerkin method for non-stationary problems. The analysis of trajectories of motion of particles of a mixture is carried out with the help of methods for solving the Cauchy problem. A computational experiment was conducted for a test problem in a unit square.**

Ключові слова—течія в'язкої рідини; задача перемішування; функція течії; метод R-функцій; метод Гальоркіна

Keywords—viscous fluid flow; mixing flow; stream function; Galerkin's method; the R-function method

I. Вступ

Актуальність дослідження. У хімічній, фармацевтичній, харчовій промисловості і других прикладних галузях часто зустрічається проблема математичного моделювання процесів перемішування в'язких сумішей [1 –3]. Також проблема перемішування є фундаментальною науковою проблемою, пов'язаною з сучасними концепціями хаотичної і регулярної динаміки [9, 10]. Більшість методів, які використовуються при чисельному аналізі процесів перемішування, не мають властивості універсальності і їх неможливо застосовувати до «некласичних» областей. Звільнитися від цього недоліку можна, використовуючи конструктивний апарат теорії *R*-функцій [8], що дозволяє точно враховувати в обчислювальних алгоритмах геометрію досить довільних областей. Тому розробка нових методів чисельного аналізу задачі перемішування в'язких сумішей на основі застосування методу *R*-функцій є актуальною науковою проблемою.

Цілі та задачі дослідження. Метою даної роботи є розробка на основі методів *R*-функцій і Гальоркіна методу чисельного аналізу процесу перемішування в'язкої суміші, викликаного дією зовнішніх сил.

Дана робота продовжує дослідження авторів, розпочаті у [4, 5].

II. Постановка задачі

Розглядатимемо плоскопаралельну течію в'язкої нестисливої рідини і вважатимемо, що рідина заповнює плоску область Ω. Нехай рух рідини в області Ω викликаний вектором зовнішніх сил $\mathbf{f}=(f_x, f_y)$. Розв'язання задачі перемішування складається з двох етапів:

1) визначення поля швидкостей течії рідини (формалізм Ейлера):

2) дослідження траєкторій руху окремих частинок рідини (формалізм Лагранжа).

Розглянемо кожну з цих задач.

Розв'язання першої частини задачі перемішування полягає в отриманні поля швидкостей (v_x, v_y) в області течії Ω. Вважатимемо, що розглядувана течія є повзучою і нелінійними доданками в рівняннях Нав'є-Стокса можна знехтувати, тобто використати наближення Стокса [6]. Плоскопаралельну стоксову течію описуватимемо за допомогою функції течії $\psi(x,y,t)$, що вводиться співвідношеннями

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \ v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Початкові і крайові умови для функції течії можуть бути отримані з умов, що накладаються на вектор $\mathbf{v}=(v_x, v_y)$. Якщо рідина примикає до нерухомої стінки, то в цих точках швидкість рідини перетворюються на нуль. Це означає, що на нуль перетворюється нормальна і тангенціальна складова швидкості (умова прилипання). Якщо ж рідина примикає до рухомої твердої стінки, то в таких точках швидкість рідини повинна за величиною і напрямком збігатися зі швидкістю відповідної точки стінки. Виходячи з цього, на межі $\partial\Omega$ області Ω можна задати значення функції течії ψ та її нормальної похідної $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}$, де $\mathbf{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$. Крім того, для функції течії повинна бути поставлена початкова умова $\psi|_{t=0}$.

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω є нерухомою і непротічною. Тоді для функції течії $\psi(x,y,t)$ можна поставити початково-крайову задачу вигляду:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\nu\Delta^2\psi=F(x,y,t)\ \text{ у }\ \Omega,\ t>0, \tag{1}$$

$$\psi|_{\partial\Omega}=0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=0, \tag{2}$$

$$\psi|_{t=0}=0, \tag{3}$$

де ν – кінематична в'язкість, Δ^2 – бігармонічний оператор, $\Delta^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $F(x,y,t)=\frac{\partial f_x}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial x}$ – ротор вектора зовнішніх сил $\mathbf{f}$.

Розв'язання другої частини задачі перемішування полягає в розв'язанні рівнянь руху лагранжевої частинки

$$\dot{x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t),\quad \dot{y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t), \tag{4}$$

$$x(t_0)=x_0,\quad y(t_0)=y_0, \tag{5}$$

та в побудові і аналізі траєкторій руху.

III. Метод чисельного анализа

Для розв'язання початково-крайової задачі (1) – (3) використаємо структурний метод (метод *R*-функцій) [8]. Структура розв'язку задачі

$$\Delta^2\psi=F\ \text{ у }\ \Omega,$$

$$\psi|_{\partial\Omega}=\tilde{f}(s),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega}=\tilde{g}(s),\ s\in\partial\Omega,$$

має вигляд

$$\psi=f-\omega(D_1 f+g)+\omega^2\Phi, \tag{6}$$

де $f=\mathrm{EC}\tilde{f}$, $g=\mathrm{EC}\tilde{g}$ – продовження функцій $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ у Ω, оператор D_1 визначається рівністю

$$D_1=\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y},$$

Φ – невизначена компонента структури, а функція $\omega(x,y)$ має такі властивості

а) $\omega=0$ на $\partial\Omega$;

б) $\omega>0$ у Ω;

в) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=-1$ на $\partial\Omega$, $\mathbf{n}$ – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Тоді відповідно до (6) структура розв'язку початково-крайової задачі (1) – (3) має вигляд

$$\psi(x,y,t)=\omega^2(x,y)\Phi(x,y,t),$$

де $\Phi=\Phi(x,y,t)$ – невизначена компонента структури.

Для апроксимації невизначеної компоненти Φ використаємо метод Гальоркіна для нестаціонарних задач [7]. Для цього подамо Φ у вигляді

$$\Phi(x,y,t) \approx \Phi_n(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\tau_k(x,y), \qquad (7)$$

де $c_k(t)$, $k=1,...,n$, – невизначені поки що функції, $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій.

Подання Φ у вигляді (7) проводить до того, що наближений розв'язок задачі (1) – (3) ми шукатимемо у вигляді

$$\psi_n(x,y,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\varphi_k(x,y), \qquad (8)$$

де $\varphi_k = \omega^2\tau_k$, $k=1,...,n$.

Зауважимо, що за зроблених припущень $\{\varphi_k\}$ – координатна послідовність, тобто:

1) для будь-якого k $\varphi_k \in H_{\Delta^2}$;

2) для будь-якого n $\varphi_1,...,\varphi_n$ лінійно незалежні;

3) $\{\varphi_k\}$ є повною в H_{Δ^2}.

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції $c_k(t)$, $k=1,...,n$, знайдемо з умови ортогональності відхилу, одержуваного при підстановці (8) у рівняння (1), першим n координатним функціям $\varphi_1,...,\varphi_n$. Це призводить до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих $c_k(t)$, $k=1,...,n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta} + \nu\sum_{k=1}^{n} c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2} = (F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \qquad (9)$$

$$j=1,2,...,n,$$

де

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta} = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2} = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\right)dxdy,$$

$$(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} F(x,y,t)\varphi_j(x,y)dxdy.$$

Систему (9) необхідно доповнити початковими умовами, що отримуються з (3):

$$c_k(0)=0, \; k=1,2,...,n.$$

Зауважимо, що розв'язок першої задачі перемішування дістається в явному аналітичному вигляді, що полегшує його подальше використання при розв'язанні другої частини задачі.

Для розв'язання другої частини задачі перемішування необхідно скласти і розв'язати (використовуючи чисельні методи розв'язання задачі Коші [11]) систему рівнянь руху лагранжевої частинки (4), (5). Далі, отримані траєкторії руху необхідно дослідити на наявність і характер хаотичної поведінки за допомогою методів нелінійної динаміки (визначити стаціонарні точки, побудувати фазові портрети, дослідити еволюції лінійного і плоского елементів).

IV. Результати обчислювального експерименту

Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ за умови, що течія викликана двома точковими вихорами, розташованими в точках $(0,23;0,23)$ і $(0,73;0,73)$. Вважалося, що вихори обертаються в різних напрямках з постійною інтенсивністю, що дорівнює 1. У цьому випадку:

$$F(x,y,t) = \delta(x-0,23, y-0,23) - \delta(x-0,73, y-0,73),$$

де $\delta(x,y)$ – двовимірна дельта-функція Дірака.

Для розглянутого режиму перемішування були знайдені стаціонарні точки. Встановлено, що існує по дві стаціонарні точки, координати яких співпадають з координатами вихорів. Обидві стаціонарні точки – точки типу «центр».

На рис. 1, 2 наведено отримані лінії рівня функції течії і поля швидкостей рідини.

На сітці з кроком 0,25 було побудовано фазові траєкторії маркерів (рис. 3). Видно, що траєкторії руху частинок стягуються до околів вихору і залишаються там до кінця перемішування, що свідчить про неефективне перемішування в цьому випадку.

V. Висновки

В роботі запропонований метод чисельного аналізу перемішування в'язкої суміші, викликаного дією зовнішньої сили. Метод заснований на використанні методу *R*-функцій з апроксимацією невизначеної компоненти структури методом Гальоркіна для нестаціонарних задач. Завдяки цьому наближений розв'язок задачі для функції течії дістається в аналітичному вигляді і може бути побудований для досить геометрично складних областей, що робить запропонований метод більш універсальним в порівнянні з існуючими. Розв'язання другої частини задачі перемішування дозволяє моделювати процес перемішування, аналізувати його ефективність, ґрунтуючись на вивченні поведінки окремих частинок.

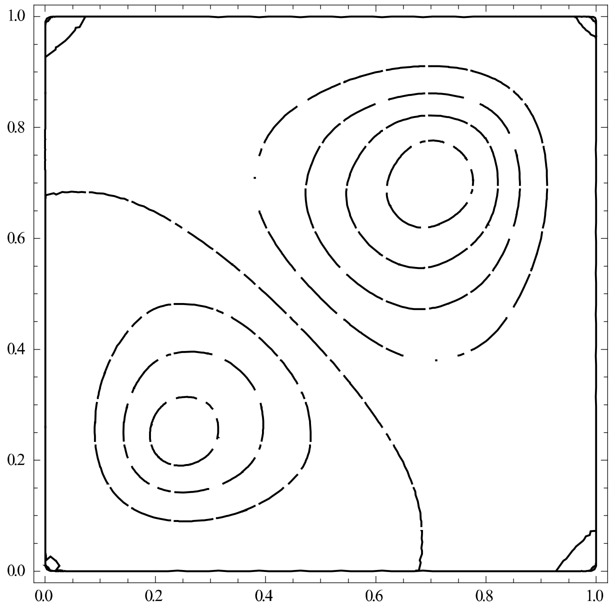

Рис. 1. Лінії рівня функції течії.

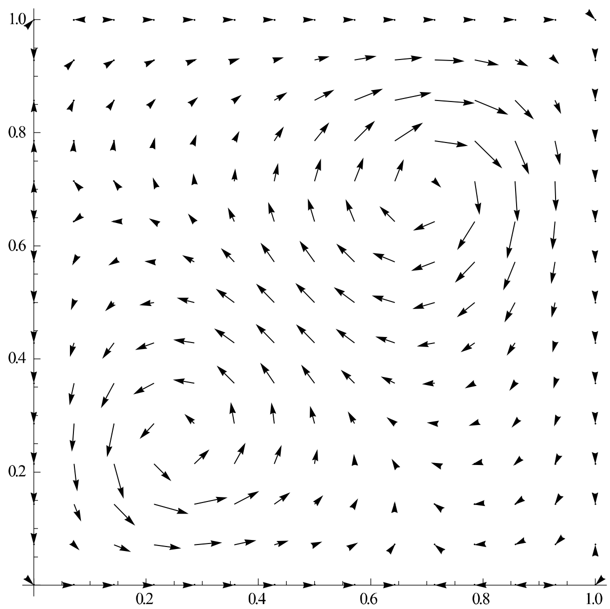

Рис. 2. Поле швидкостей.

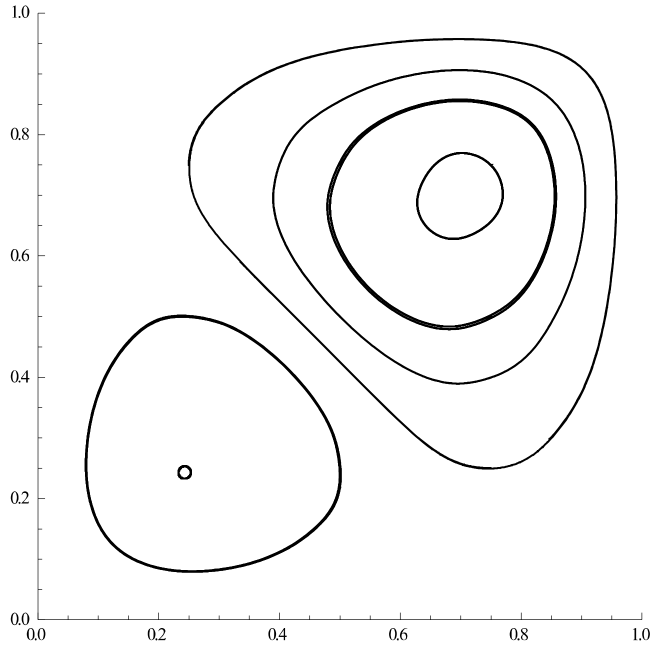

Рис. 3. Фазові траекторії.

ЛІТЕРАТУРА REFERENCES

[1] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. "Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы", *Автоматика и телемеханика*, № 5, с. 3 – 45, 2003.

[2] Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. "Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения", *Автоматика и телемеханика*, № 4, с. 3 – 34, 2004.

[3] Ареф Х. "Развитие хаотической адвекции", *Нелинейная динамика*, т. 2, № 1, с. 111 – 133, 2006.

[4] Артюх А.В., Гибкина Н.В. Сидоров М.В. "Об одном методе математического моделирования некоторых процессов перемешивания с помощью метода R-функций", *АСУ и приборы автоматики*, вып. 143, с. 67 – 73, 2008.

[5] Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В. "Численный анализ процессов перемешивания методом R-функций", *Радиоэлектроника и информатика*, № 3 (58), с. 28 – 34, 2012.

[6] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

[7] Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.

[8] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

[9] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

[10] Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / Под. ред. А.В. Борисова, И.С. Мамаева и М.А. Соколовского. Москва-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 704 с.

[11] Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.