

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Євсовичу Олексію Олеговичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання та оптимізація квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу

затверджена наказом по університету від 21 листопада 2019 р. № 1732 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математичні моделі магістрального водоводу

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ ст. викл. Матвієнко О.І.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 79 с., 17 табл., 17 рис., 1 дод., 18 джерел.

ОПТИМАЛЬНЕ СТОХАСТИЧНЕ КЕРУВАННЯ, НАСОСНА СТАНЦІЯ, ТРИЗОННИЙ ТАРИФ НА ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЮ, РЕСУРСОЗБЕРЕЖЕННЯ, МАГІСТРАЛЬНИЙ ВОДОВОД.

Об'єкт дослідження – стохастичні процеси квазістаціонарних режимів роботи систем водопостачання.

Мета роботи – математичне моделювання та оптимізація режимів роботи магістрального водоводу.

Метод дослідження – узагальнений метод Ньютона.

Дипломна робота присвячена дослідженню та розв'язку задачі математичного моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу (МВ).

МВ відноситься до класу штучних систем, цільовим призначенням яких є забезпечення усіх споживачів системи подачі і розподілу води (СПРВ) питною водою у необхідних об'ємах. СПРВ включає в себе ряд підсистем, основними з яких є: насосні станції (НС) другого та третього підйомів, резервуари чистої води (РЧВ), МВ, водопровідні розподільчі мережі.

ABSTRACT

Introductory note: 79 pages, 17 tables, 17 figures, 1 appendixes, 18 sources.

OPTIMAL STOCHASTIC CONTROL, PUMPING STATION, THREE-ZONE ELECTRICITY TARIFFS, RESOURCE SAVINGS, WATER MAIN.

The object of the study is a stochastic processes of quasistationary modes of operation of water supply systems.

The purpose of the work is a systematic analysis of the problem of mathematical modeling and optimization of the modes of operation of the water main.

The research method is a generalized Newton method.

The graduate is devoted to research and solution of the problem of mathematical modeling and optimization of quasistationary modes of work of water main.

Water main is refers to a class of artificial systems whose purpose is to provide all drinking water consumers in required volumes. In turn, water supply and distribution system includes a number of subsystems, the main of which are: the second and third lifting PSs, RSV, Water main, water supply distribution networks.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу.....	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	11
1.1.4 Інформаційна модель системи	14
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу	15
1.2.1 Модель аналізу проблеми	15
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	17
1.2.3 Модель вирішення проблеми	23
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.3.1 Змістовна постановка задачі	24
1.3.2 Формальна постановка задачі	24
1.4 Математичні моделі елементів системи	27
1.4.1 Детермінована математична модель насосного агрегату	27
1.4.2 Стохастична математична модель насосного агрегату	29
1.4.3 Детермінована математична модель регулюючих засувок	30
1.4.4 Стохастична математична модель регулюючих засувок	31
1.4.5 Детермінована математична модель ділянок трубопроводів	31
1.4.6 Стохастична математична модель ділянок трубопроводів	32

1.4.7 Детермінована математична модель резервуара чистої води.....	32
1.4.8 Стохастична модель резервуара чистої води	33
1.5 Стохастична модель квазістаціонарних режимів роботи МВ	33
1.6 Детермінований еквівалент стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ.....	37
1.7 Задача оптимального стохастичного керування	39
2 Вибір та обґрунтування метода розв’язання	40
2.1 Метод Ньютона	40
2.2 Узагальнений метод Ньютона.....	42
2.3 Метод Лобачова-Кросса	43
2.4 Метод покоординатного спуску	45
2.5 Аналіз методів	48
3 Програмна реалізація	50
3.1 Особливості програмної реалізації за допомогою мови С#.....	50
3.2 Опис програми.....	50
4 Результати обчислювального експерименту	53
5 Аналіз можливих застосувань	63
Висновки	64
Перелік джерел посилання	65
Додаток А Програмний код	68

ВСТУП

Різке зростання тарифів на електроенергію і введення тризонного тарифу створили необхідні умови для переходу до енергозберігаючих технологій управління магістральних водоводів (МВ).

МВ являє собою складну технічну систему, призначену для транспорту води на великі відстані. МВ складається з послідовності багатоцехових насосних станцій (НС) і багатониткових магістральних трубопроводів. На вході кожної НС є резервуари чистої води (РЧВ). У РЧВ першої насосної станції (НС) МВ надходить підготовлена вода з одного або декількох підйомів. На виході МВ, як правило, є РЧВ значною ємності, використовувані в якості джерел водопостачання для міст і населених пунктів.

Основними керованими елементами МВ є насосні агрегати (НА) НС. Кожен цех НС представляє декілька паралельно з'єднаних НА. Керування роботою НА здійснюється шляхом вмикання/вимикання НА НС, зміною положення регулюючої засувки (РЗ), регулюванням частоти обертання приводних електродвигунів НА. Керування роботою МВ здійснюється зміною режимів роботи НС.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ РОБОТИ МАГІСТРЬНОГО ВОДОВОДУ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – стохастичні процеси квазістаціонарних режимів роботи систем водопостачання.

Предмет аналізу – стохастичні моделі та обчислювальні методи оптимізації квазістаціонарних режимів роботи систем водопостачання.

Точка зору: дослідник.

Ціль: математичне моделювання та оптимізація квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу.

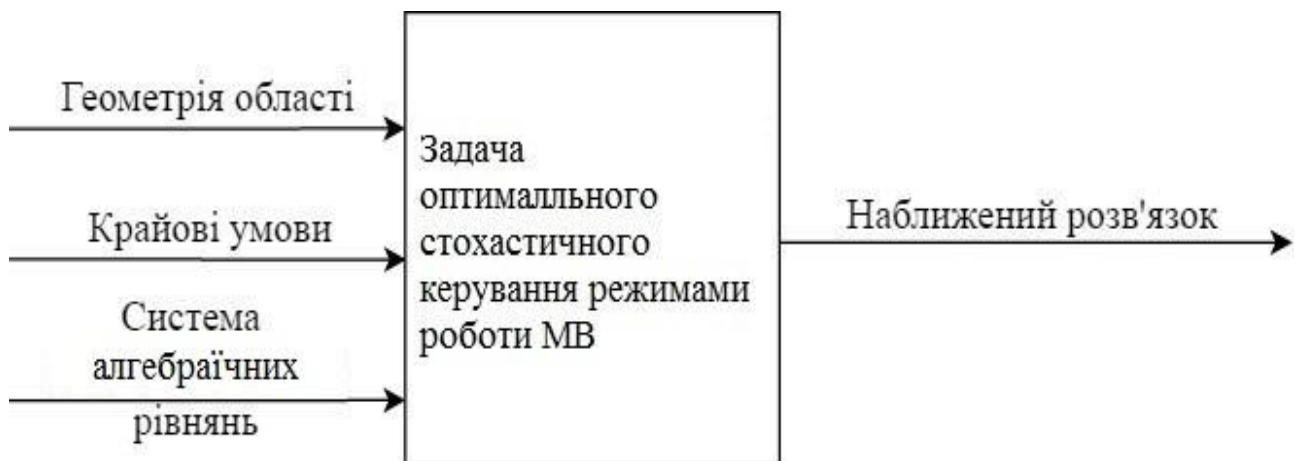


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

Модель типу «чорний ящик» акцентує увагу на взаємодії системи із зовнішнім середовищем. Акцент робиться на призначенні та поведінці системи,

а про її будову є тільки опосередкована інформація, що відображається у зв'язках із зовнішнім середовищем. Зв'язки з середовищем, що йдуть у систему (входи), дають можливість впливати на неї, використовувати її як засіб, а зв'язки, що йдуть із системи (виходи), є результатами її функціонування, які або впливають на зміни у середовищі, або споживаються зовні системи.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи розглянемо з опису зовнішнього середовища яке приведене на рис. 1.2.

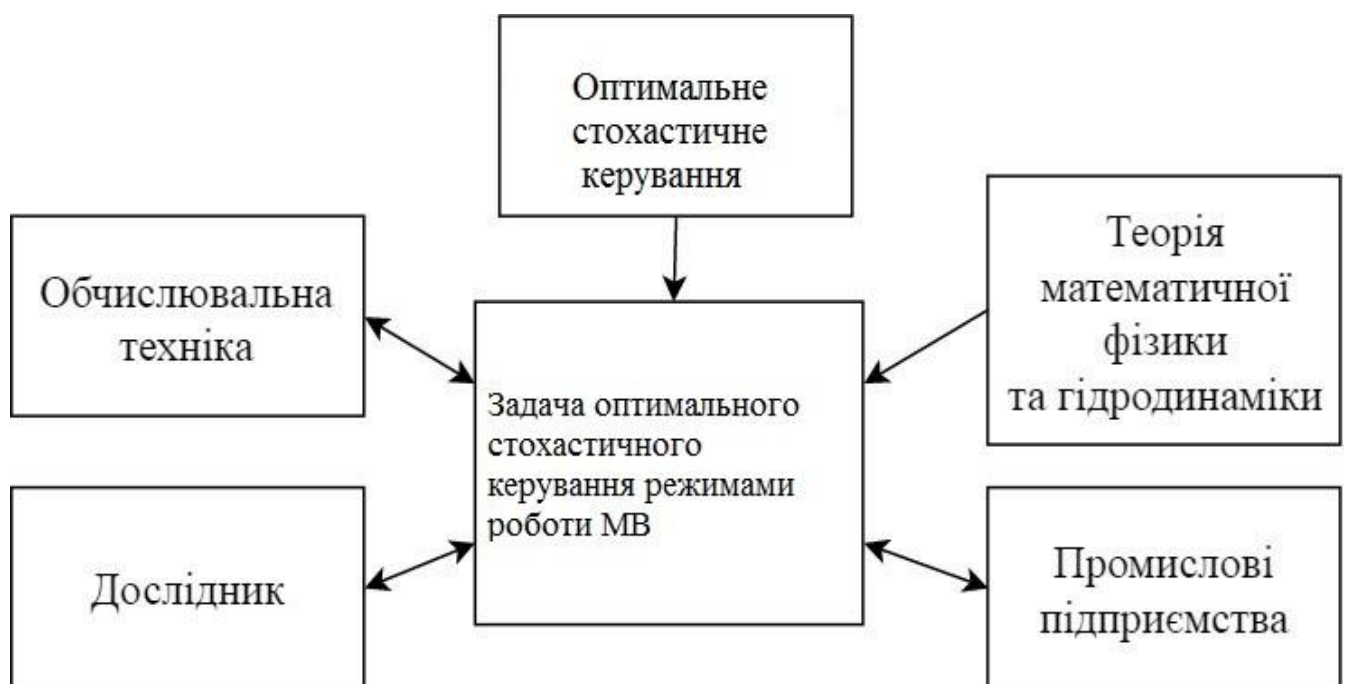


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – це сукупність всіх об'єктів по межі системи, зміна властивості яких впливають на систему, а також тих об'єктів, чії властивості змінюються в результаті поведінки системи.

1.1.3 Функціональна модель системи

Функціональна модель IDEF0 являє собою набір блоків, кожен з яких представляє собою «чорний ящик» з входами і виходами, управлінням та механізмами, які деталізуються (декомпозируються) до необхідного рівня. Найбільш важлива функція розташована у верхньому лівому кутку. А з'єднуються функції між собою за допомогою стрілок і описів функціональних блоків. При цьому кожен вид стрілки або активності має власне значення. Дана модель дозволяє описати всі основні види процесів, як адміністративні, так і організаційні.

Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому (рис. 1.3). В рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів, які взаємодіють між собою, а також показуються ресурси, що споживаються кожною роботою.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагменти. Цей процес називається функціональною декомпозицією, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодія фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції.

Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, до досягнення потрібного рівня деталізації опису.

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на попередній діаграмі. Декомпозиція контекстної діаграми (рис. 1.4) демонструє основні функції системи і їх деталізації за рівнями (рис. 1.5).

IDEF3 – це метод, який має основною метою дати можливість аналітикам описати ситуацію, коли процеси виконуються в певній послідовності, а також описати об'єкти, які беруть участь спільно в одному процесі.

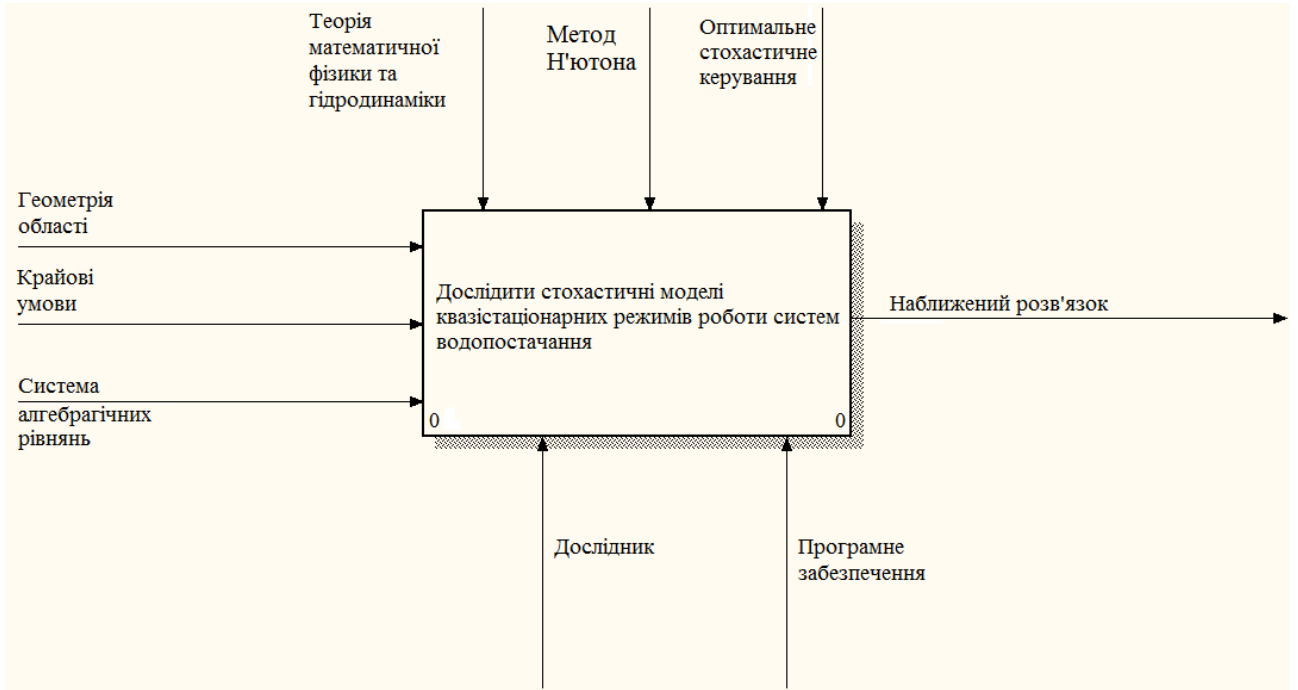


Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

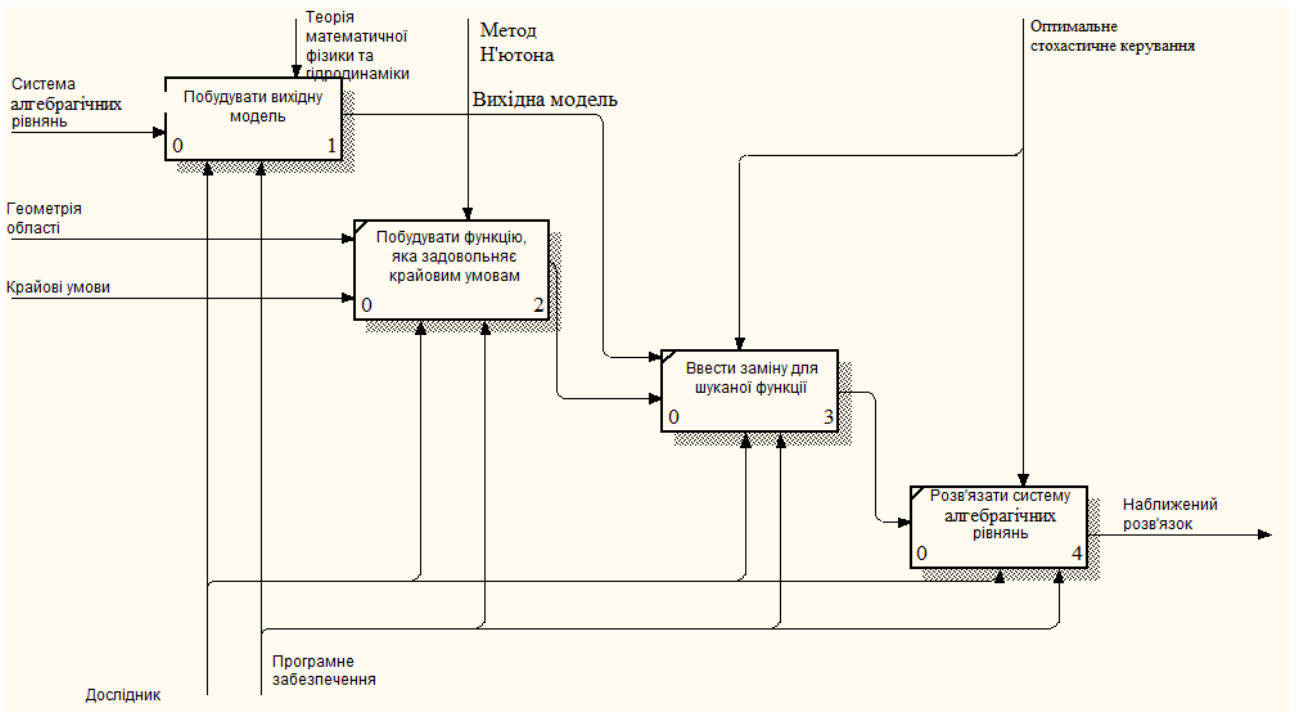


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Дослідити стохастичні моделі квазістаціонарних режимів роботи систем водопостачання»: (рівень А0)

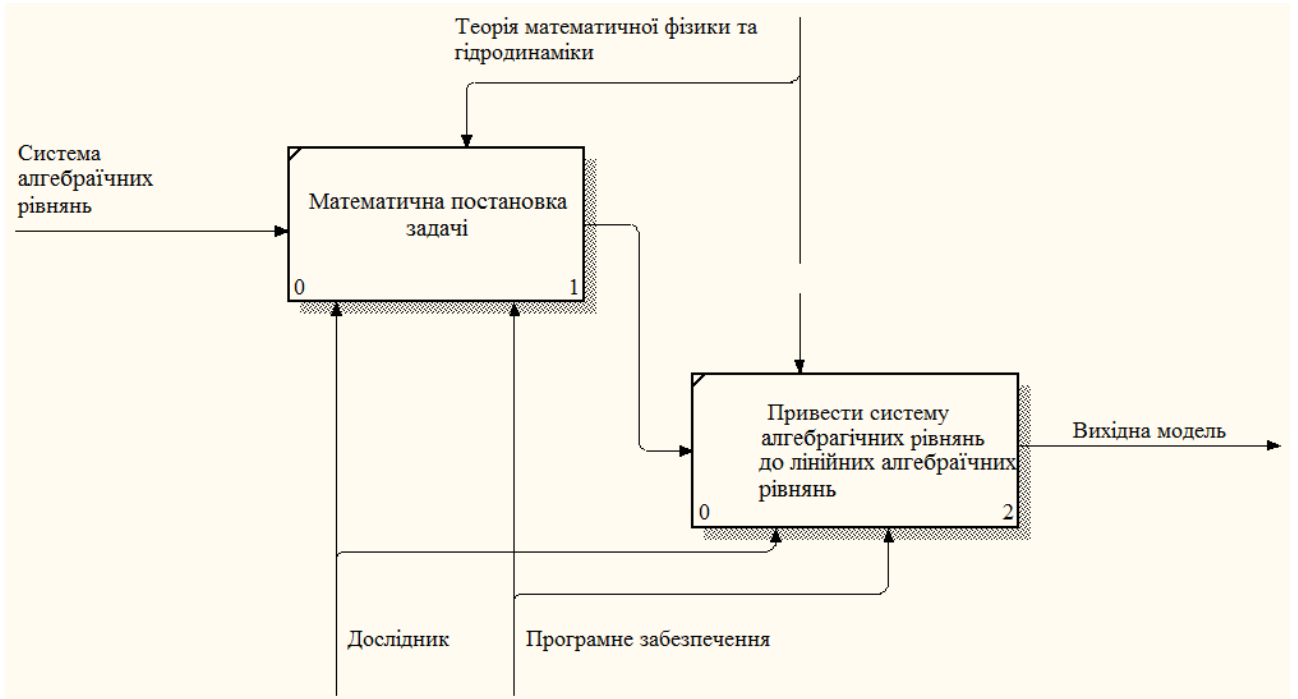


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Отримати вихідну модель»: (рівень A1)

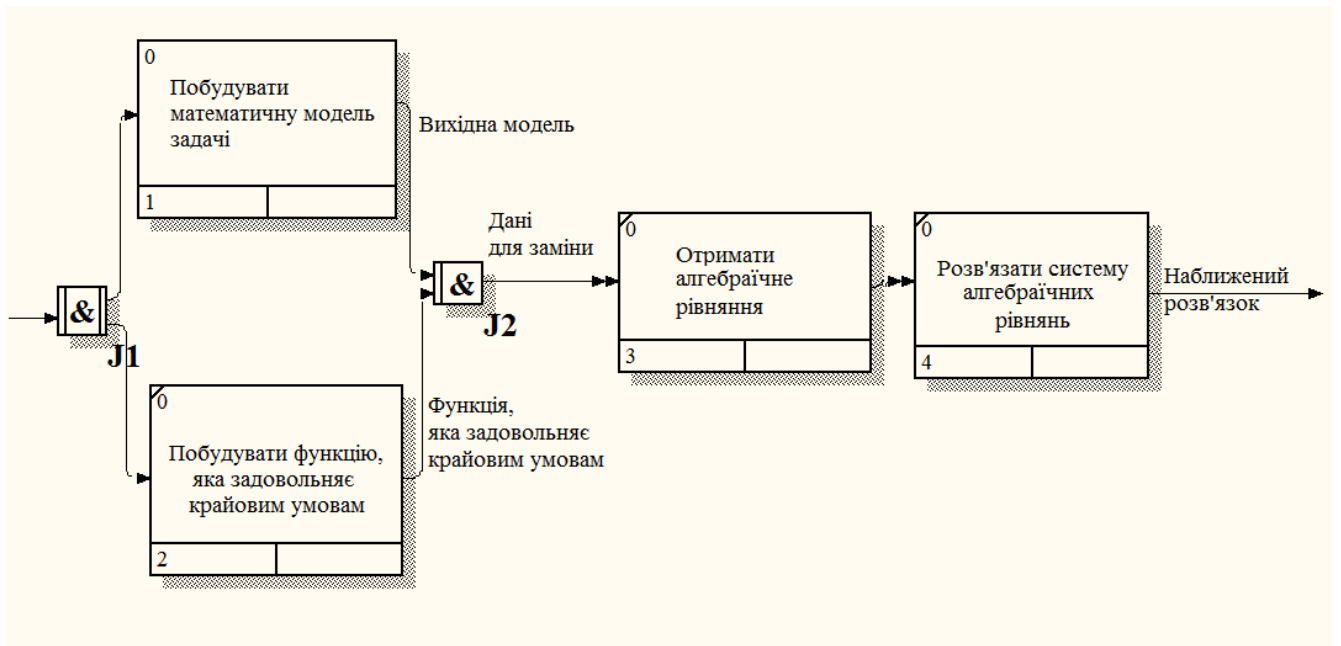


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Дослідити стохастичні моделі квазістаціонарних режимів роботи систем водопостачання»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

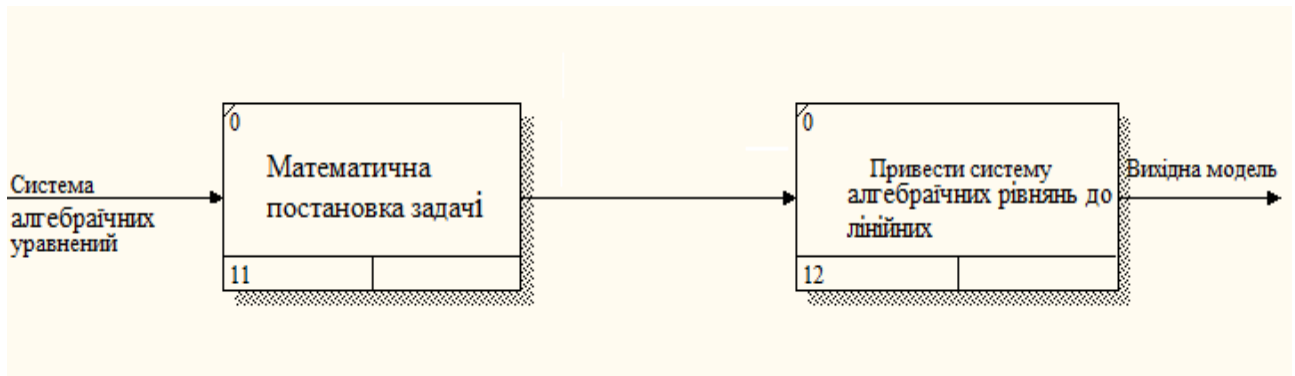


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Отримати вихідну модель»:
(рівень A1) (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель – модель об'єкта, представлена у вигляді інформації, яка описує суттєві для даного розгляду параметри і змінні величини об'єкта, зв'язку між ними, входи і виходи об'єкта і дозволяє шляхом подачі на модель інформації про зміни вхідних величин моделювати можливий стан об'єкта. Інформаційні моделі не можна потрогати або побачити, вони не мають матеріального втілення, тому що будуються тільки на інформації. Інформаційна модель – сукупність інформації, що характеризує суттєві властивості і стан об'єкта, процесу, явища, а також взаємозв'язок із зовнішнім світом.

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagrams – DFD) є ієрархією функціональних процесів, пов'язаних потоками даних. Мета такого уявлення продемонструвати, як кожен процес перетворює свої вхідні дані у вихідні, а також виявити відносини між цими процесами.

DFD – діаграма представлена на рис. 1.8. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.9.

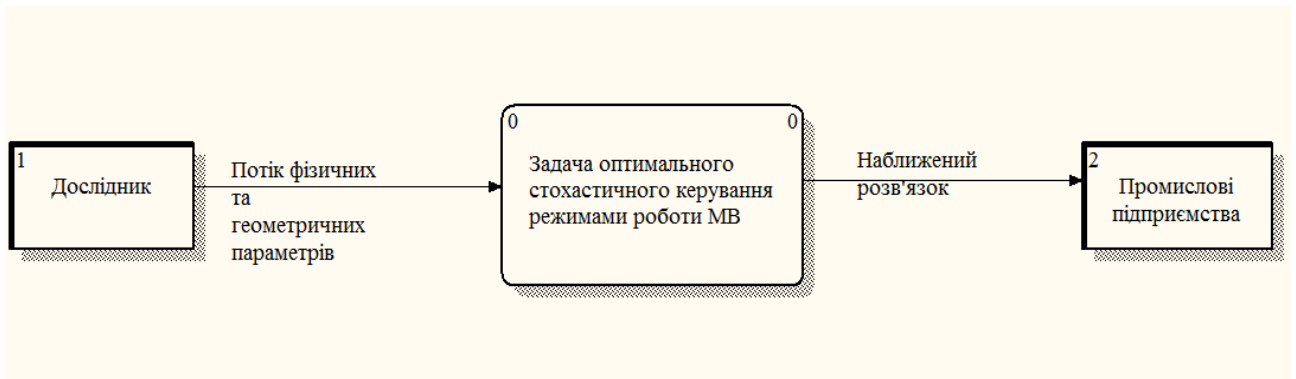


Рисунок 1.8 – DFD-Діаграма

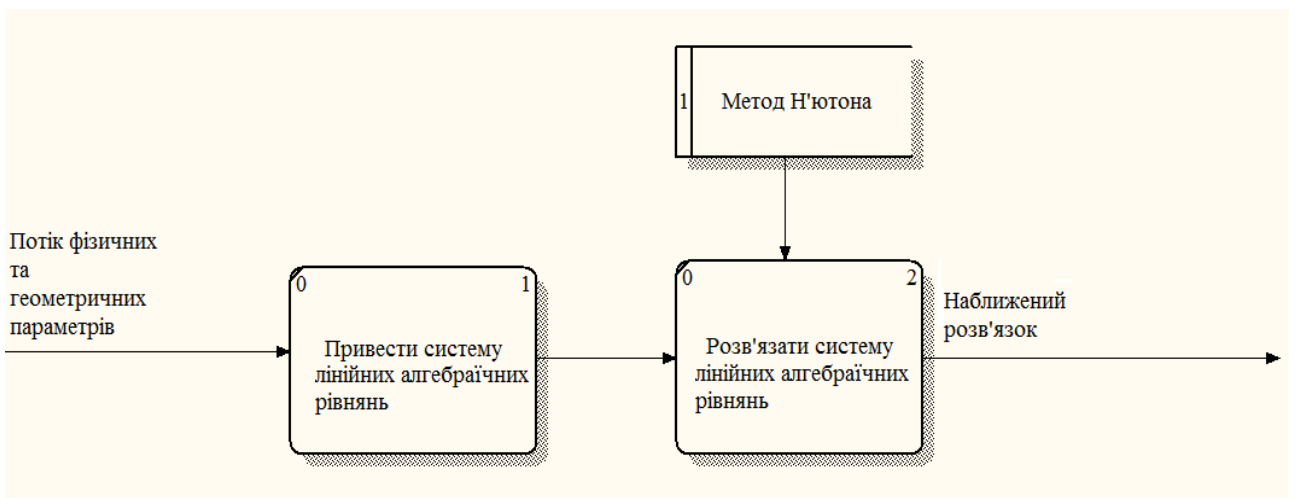


Рисунок 1.9 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Існують три типових підходу до математичного моделювання та оптимізації режимів роботи СПРВ.

а) Математичне моделювання та оптимізація на базі моделі сталого поточкорозподілу (СПР) в даний час ефективно використовується при аналізі стаціонарних режимів роботи СПРВ, проектуванні та реконструкції МВ і

водопровідних розподільчих мереж [1, 2, 3]. Однак, ця модель виявилася недостатньо ефективною для задач оперативного управління режимами роботи СПРВ. Детермінована модель СПР описує систему в конкретний момент часу $t \in [0, T]$. Тому, навіть незначна зміна параметрів моделі або граничних умов можуть не тільки істотно змінити оптимальне рішення, але і вивести його за межі допустимої області, що є неприпустимим в задачах оперативного управління.

б) Математичне моделювання аварійних ситуацій і гідравлічних ударів у СПРВ на базі детермінованої моделі нестационарних режимів роботи СПРВ у даний час не знайшли широкого поширення, що пов'язано зі значними обчислювальними труднощами, викликаними необхідністю вирішувати системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, і відсутністю необхідного інформаційного базису для завдання фактичних значень початкових і граничних умов. Проте, ці моделі використовуються для визначення умов запобігання виникненню гідравлічних ударів в результаті виникнення розривів ділянок трубопроводу, пусках і зупинках НА на НС [4, 10, 11].

в) Математичне моделювання стаціонарних режимів транспорту і розподілу води в СПРВ з витоками. В сучасних СПРВ існує величезна кількість невиявлених і не усунених дефектів трубопроводів (свищів, розломів, порушення стикових з'єднань), що призводить до невиявлених і неконтрольованих витоків води, обсяги яких істотно залежать від величини надлишкового напору у вузлах водопровідної мережі. Спроба побудови більш адекватних моделей для цих умов привела до появи ряду робіт моделювання стаціонарних режимів транспорту і розподілу води в СПРВ з витоками [5, 7, 8], проте ці моделі в даний час не набули широкого поширення через відсутність необхідного інформаційного базису для їх використання – вимірених значень фактичних напорів у вузлах ВС і витрат по її ділянках.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде вирішуватися задача оптимального стохастичного керування режимами роботи магістрального водоводу (МВ). Проблема буде вирішуватися за наступними критеріями:

Критерій 1 (K1): кількість ітерацій;

Критерій 2 (K2): швидкість збіжності;

Критерій 3 (K3): час виконання однієї ітерації;

Критерій 4 (K4): обсяг оперативної пам'яті.

Обирати будемо з множини альтернатив:

Альтернатива 1 (A1): Метод Лобачева-Кросса;

Альтернатива 2 (A2): Узагальнений метод Ньютона;

Альтернатива 3 (A3): Метод покоординатного спуска.

Для представлення результатів оцінок у кількісному виразі Т. Сааті вводить шкалу парних порівнянь. Згідно з цією шкалою нас не цікавитиме відсутність фізичних чи об'єктивних одиниць виміру. Основною перевагою цього методу є те, що він є безрозмірним і не виникає проблем при приведенні до однакових одиниць виміру.

Правомірність цієї шкали доведена теоретично і практично при порівнянні з багатьма іншими відомими даними. Досвід показав, що при проведенні парних порівнянь, в основному, ставляться запитання: “Який з елементів є важливішим? Який найвірогідніший?”.

Побудуємо ієрархічну структуру, використовуючи метод парних порівнянь. Ієрархічна структура проблеми вибору має вигляд, поданий на рис. 1.10.

Спочатку сформуємо матрицю попарних порівнянь для елементів першого рівня ієрархій і порахуємо вектор локальних пріоритетів.

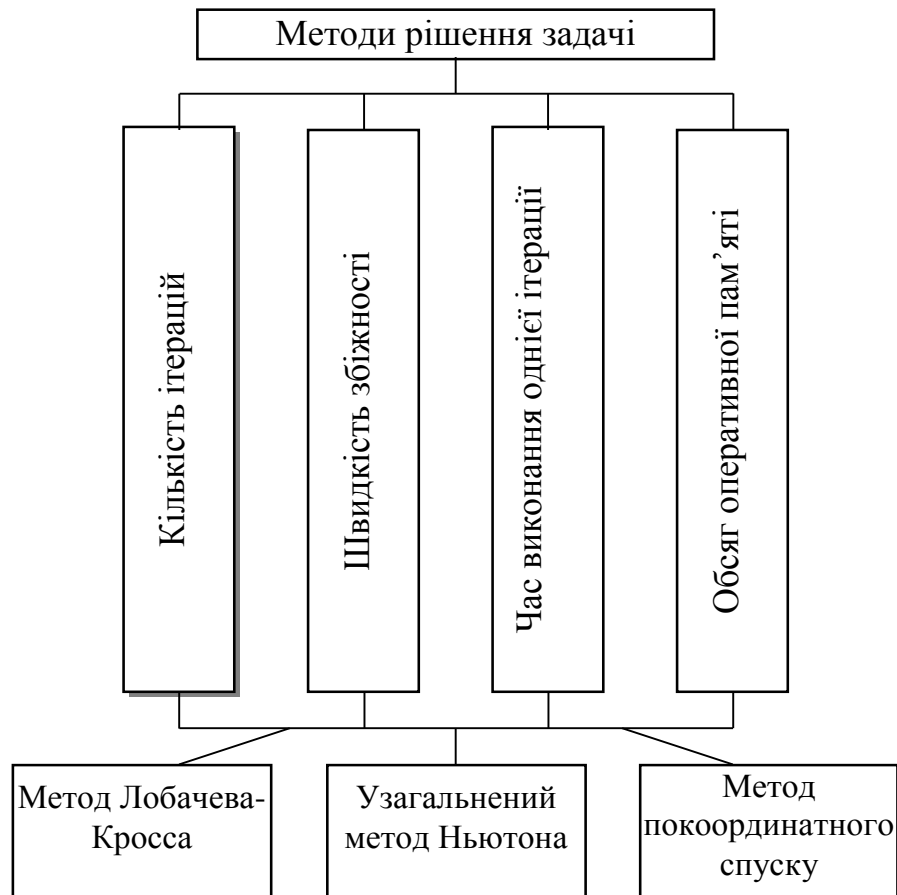


Рисунок 1.10 – Ієрархічна структура проблеми вибору

Для обчислення індексу узгодженості знаходимо суми елементів матриці за стовбцями:

$$y_1 = 1,644, \quad y_2 = 13,143, \quad y_3 = 4,343, \quad y_4 = 22. \quad (1.1)$$

Тоді

$$\lambda_{\max}^k \approx 0,9011 + 1,4194 + 1,2903 + 0,8397 = 4,4505 \quad (1.2)$$

та індекс узгодженості

$$CI^k = \frac{4,4505 - 4}{4 - 1} = 0,1502. \quad (1.3)$$

Таблиця 1.1 – Розрахунок вектора локальних пріоритетів критеріїв

	K1	K2	K3	K4	Середнє геометричне за строками	Вектор пріоритетів
K1	1	5	3	9	$x_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9} = 3,4087$	$p_1^k = \frac{x_1}{\Sigma} = 0,548$
K2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{7}$	7	$x_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot 7} = 0,6687$	$p_2^k = \frac{x_2}{\Sigma} = 0,108$
K3	$\frac{1}{3}$	7	1	5	$x_3 = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 1 \cdot 5} = 1,8481$	$p_3^k = \frac{x_3}{\Sigma} = 0,297$
K4	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{5}$	1	$x_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1} = 0,2374$	$p_4^k = \frac{x_4}{\Sigma} = 0,038$
					$\Sigma = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6,2199$	

Оскільки матриця попарних порівнянь критеріїв є матрицею четвертого порядку, то $RI^k = 0,9$, та відношення узгодженості буде дорівнювати

$$CR^k = \frac{CI^k}{RI^k} = \frac{0,1502}{0,9} = 0,167. \quad (1.4)$$

Оскільки відношення узгодженості є близьким до 0,1, то вважатимемо, що матриця парних порівнянь критеріїв побудована правильно. Вектор локальних пріоритетів критеріїв відносно проблеми вибору дорівнює

$$\vec{p}^k = (0,548; 0,108; 0,297; 0,038)^T. \quad (1.5)$$

Таблиця 1.2 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К1

К1	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{3}$	7
A2	3	1	6
A3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	1

Таблиця 1.3 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К2

К2	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{5}$	6
A2	5	1	8
A3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	1

Таблиця 1.4 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К3

К3	A1	A2	A3
A1	1	4	$\frac{1}{6}$
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$
A3	6	7	1

Таблиця 1.5 – Матриця попарних порівнянь альтернатив за К4

К4	A1	A2	A3
A1	1	$\frac{1}{3}$	4
A2	3	1	5
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1

Для кожної матриці (аналогічно як і для матриці попарних порівнянь критеріїв) розраховуємо вектори локальних пріоритетів:

$$\vec{p}_1^A = \begin{pmatrix} 0,313 \\ 0,619 \\ 0,068 \end{pmatrix}, \vec{p}_2^A = \begin{pmatrix} 0,223 \\ 0,719 \\ 0,058 \end{pmatrix}, \vec{p}_3^A = \begin{pmatrix} 0,187 \\ 0,070 \\ 0,743 \end{pmatrix}, \vec{p}_4^A = \begin{pmatrix} 0,280 \\ 0,627 \\ 0,094 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Оскільки матриці попарних порівнянь альтернатив – це матриці третього порядку, то $RI^A = 0,58$. Індеси узгодженості та відношення узгодженості для матриць парних порівнянь альтернатив за кожним критерієм дорівнюють:

$$CI_{K1}^A = 0,088, CI_{K2}^A = 0,099, CI_{K3}^A = 0,086, CI_{K4}^A = 0,043. \quad (1.6)$$

$$CR_{K1}^A = 0,153, CR_{K2}^A = 0,170, CR_{K3}^A = 0,147, CR_{K4}^A = 0,074. \quad (1.7)$$

Усі відношення узгодженості близькі до 0,1, що свідчить про добру узгодженість думок експерта.

Розрахуємо вектор глобальних пріоритетів альтернатив. Для цього з векторів локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм складемо

матрицю

$$P^A = \begin{pmatrix} 0,313 & 0,223 & 0,187 & 0,280 \\ 0,619 & 0,719 & 0,070 & 0,627 \\ 0,068 & 0,058 & 0,743 & 0,094 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

і скористаємося формулою

$$\vec{p} = P^A \vec{p}^K. \quad (1.9)$$

Отже, вектор глобальних пріоритетів дорівнює

$$P^A \cdot \begin{pmatrix} 0,548 \\ 0,108 \\ 0,297 \\ 0,038 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,262 \\ 0,461 \\ 0,268 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Розрахуємо індекс узгодженості та відношення узгодженості для всієї ієрархії:

$$CI = CI^k = \left(\vec{p}^k, \vec{CI}^A \right) = 0,1502 + 0,548 \cdot 0,088 + 0,108 \cdot 0,099 + \\ + 0,297 \cdot 0,086 + 0,038 \cdot 0,043 = 0,236, \quad (1.11)$$

$$RI = RI^K + RI^A = 0,90 + 0,58 = 1,48, \quad (1.12)$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = 0,159, \quad (1.13)$$

що теж можна вважати доброю узгодженістю.

Таблиця 1.6 – Кінцеві дані

Критерій / Альтернатива	К1	К2	К3	К4	Глобальні пріоритети
A1	0,313	0,223	0,187	0,280	0,262
A2	0,619	0,719	0,070	0,627	0,461
A3	0,068	0,058	0,743	0,094	0,268

Максимальна компонента вектора глобальних пріоритетів відповідає другій альтернативі, тобто ми обираємо узагальнений метод Ньютона.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

На підставі викладеного вище можна зробити наступні висновки. Математичні моделі СПР дозволяють адекватно описувати стаціонарний режим роботи СПРВ в фіксований момент часу t . Фактичні режими роботи СПРВ є суттєво нестационарними, проте використання нестационарних моделей дозволяє адекватно описувати режими роботи СПРВ на інтервалі часу $[0, T]$, але вимагає такого обсягу оперативної інформації, який в реальних умовах забезпечити неможливо. Тому виникає проблема розробки математичних моделей квазістаціонарних режимів роботи СПРВ, які дозволяють не розраховувати кожен траєкторію (зміна напорів у вузлах і витрат по ділянках ВС для кожного моменту часу $t \in [0, T]$), а розраховувати тільки верхню і нижню межу цих траєкторій. В реальних умовах основними збуджуючими факторами є стохастичні процеси споживання води, які залежать від величезної кількості неконтрольованих і некеруваних факторів, а параметри моделі СПР, які оцінюються за вибірками експериментальних даних кінцевої довжини, самі є

випадковими величинами. Для оперативного керування і планування раціональних режимів функціонування СПРВ більш адекватними є стохастичні моделі квазістаціонарних режимів подачі і розподілу води на заданому інтервалі часу $[0, T]$ [3, 6, 12].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Для розробки ефективних методів управління режимами роботи МВ необхідно враховувати та використовувати специфічні особливості МВ як об'єкта управління. Специфічними особливостями сучасних МВ являється наявність в них РЧВ достатньо великого об'єму та можливостей використання тризонного тарифу на електроенергію. Врахування цих особливостей МВ дозволяє побудувати стратегію оптимізації режимів його роботи, основу на максимально можливому використанні всього об'єму резервуарів та тризонного тарифу на електроенергію [3, 5]. Суть стратегії полягає в тому, що подача води в РЧВ із МВ повинна бути мінімальною на інтервалі часу із максимальним тарифом та максимальною на інтервалі часу з мінімальним тарифом.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Для стаціонарних режимів транспорту і розподілу води в СПРВ характерно, що змінні стану водопровідної мережі (ВМ) (витрати і напори) не змінюються протягом часу, тобто витрати і напори води на входах/виходах ВМ і на всіх її ділянках приймаються постійними. Математичні моделі стаціонарних режимів роботи СПРВ – це детерміновані моделі СПР в СПРВ, які описують поточний розподіл в системі в конкретний момент часу $t \in [0, T]$.

Фактичні режими можуть бути апроксимовані взаємозалежною послідовністю моделей квазістаціонарних режимів. Квазістаціонарний режим – послідовність стаціонарних режимів, параметри яких змінюються стрибкоподібно кінцеве число раз на заданому інтервалі часу. Для оперативного управління і планування раціональних режимів функціонування СПРВ більш адекватними є моделі квазістаціонарних режимів подачі і розподілу води на заданому інтервалі часу $[0, T]$. Квазістаціонарні режими характеризуються тим, що параметри СПРВ змінюються в часі щодо деяких своїх середніх значень.

Величезна розмірність СПРВ, обмеженість інформаційних ресурсів і оперативних даних не дозволяють досить адекватно оцінити параметри технологічних елементів СПРВ і структуру СПРВ через нестачу коштів обліку і контролю і відсутності (недостатньої) паспортизації технологічних елементів СПРВ. Параметри моделі СПР, які оцінюються за вибірками експериментальних даних кінцевої довжини, самі є випадковими величинами. Більш того, основними збуджуючими факторами є стохастичні процеси споживання води різними категоріями споживачів. Ці процеси мають надзвичайно складну кореляційну структуру і залежать від трьох основних груп факторів: хронологічних, метеорологічних і організаційних. При вирішенні завдань оптимізації значення прогнозів процесів водоспоживання використовуються в якості граничних умов. Це призводить до необхідності розглядати СПРВ як стохастичний об'єкт, що функціонує в стохастичному середовищі. Стохастичний характер середовища проявляється в тому, що процеси споживання води носять виражений випадковий характер. Стохастичний характер об'єкта управління проявляється в тому, що параметри технологічного обладнання СПРВ апіорно невідомі, а оцінюються за експериментальними даними вибірок кінцевої довжини, які є випадковими величинами [13]. Тому при вирішенні задач оптимізації режимів роботи СПРВ необхідно використовувати стохастичну модель квазістаціонарних режимів роботи СПРВ, яка дозволяє більш адекватно враховувати як стохастичний

характер процесів споживання води, так і статистичні властивості параметрів моделі на заданому інтервалі управління $[0, T]$.

Для більш адекватного опису режимів роботи МВ будемо використовувати послідовність зміни квазістаціонарних режимів.

МВ являє собою взаємопов'язану систему величезної кількості технологічних елементів: ділянок трубопроводів, НА, регульованих і нерегульованих засувок та іншої арматури, РЧВ. Входами МВ являються усі його вузлові вершини, через які в МВ надходить вода, а виходами – усі вузлові вершини, через які здійснюється відбір води.

Для побудови стохастичних моделей технологічних елементів квазістаціонарних режимів роботи технологічного обладнання СПРВ введемо ряд позначень: нехай (Ω, B, P) – декартовий добуток імовірнісних просторів:

$$(\Omega_i, B_i, P_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n, \quad B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n, \quad P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n, \quad (1.14)$$

де Ω_i – простор елементарних подій;

B_i – алгебри подій з Ω_i ;

P_i – імовірнісні заходи на B_i .

Кожен з елементів МВ представляється своєю математичною моделлю – рівнянням, що зв'язує падіння напору h на цій ділянці з витратою q через нього. Для того, щоб реальній системі поставити у відповідність розрахункову схему, що складається з вузлів, гілок і їх параметрів, необхідно побудувати математичні моделі для наступних елементів системи: НА, резервуару чистої води (РЧВ), ділянки трубопроводу, регулюючих заглушок (РЗ).

1.4 Математичні моделі елементів системи

1.4.1 Детермінована математична модель насосного агрегату

Під насосом розуміється гідравлічна машина, що створює напірне переміщення рідини при наданні їй енергії. Насос в сукупності з електроприводом і передавальним механізмом утворює НА [14]. Основними параметрами, що характеризують режим роботи НА, є напір H , подача Q , потужність N і коефіцієнт корисної дії η [15]. Напір визначається як різниця питомих енергій рідини в напірних і усмоктувальних патрубках насоса, необхідна для підйому рідини на задану висоту і подолання сил тертя в трубопроводі. Виражений у метрах напір насоса визначає висоту підйому або дальність переміщення рідини. Подача – обсяг рідини, що перекачується насосом за одиницю часу. Потужність – енергія, що витрачається насосом для створення потрібного напору і подолання всіх видів втрат, неминучих при перетворенні підводиться до НА механічної енергії в енергію руху рідини по трубопроводах. Коефіцієнт корисної дії враховує всі види втрат пов'язаних з перетворенням насосом механічної енергії двигуна в енергію рідини, що рухається. ККД визначає економічну доцільність експлуатації насоса при зміні інших його робочих параметрів (напору, подачі, потужності).

Кожен НА характеризується взаємозалежною системою залежностей між основними режимними і енергетичними параметрами насоса, так званими робочими характеристиками НА. Робочими характеристиками НА називають залежність напору, потужності і ККД від величини подачі при постійній частоті обертання приводу електродвигуна НА. Залежність "тиск – подача" ($H - Q$) називають напірною характеристикою НА. Залежності "потужність подача" ($N - Q$) і "ККД - подача" ($\eta - Q$) називають енергетичними характеристиками НА. При введенні в експлуатацію кожен НА проходить випробування, в ході яких знімаються вище зазначені залежності, ці характеристики іменуються паспортними. Однак в процесі

експлуатації НА відбувається знос їх вузлів і механізмів, тому реальні характеристики значно змінюються.

Залежності характеристик НА описуються поліномами другого ступеня (формули Е. А. Прагера):

$$H_H(Q) = a_0 + a_1 \cdot Q + a_2 \cdot Q^2, \quad (1.15)$$

$$N_H(Q) = c_0 + c_1 \cdot Q + c_2 \cdot Q^2, \quad (1.16)$$

$$\eta_H(Q) = d_0 + d_1 \cdot Q + d_2 \cdot Q^2, \quad (1.17)$$

де $a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ – параметри насосного агрегату.

Вище наведені рівняння описують співвідношення між параметрами НА при фіксованій частоті обертання ротора приводного електродвигуна. Якщо частота обертання відрізняється від номінальної, або на НА використовується регульований привід, то, в цьому випадку, для перерахунку характеристик НА використовується:

$$H_{HA}(Q) = a_0 \cdot (n_1/n_0)^2 + a_1 \cdot (n_1/n_0) \cdot Q + a_2 \cdot Q^2, \quad (1.18)$$

$$N_{HA}(Q) = c_0 \cdot (n_1/n_0)^3 + c_1 \cdot (n_1/n_0)^2 \cdot Q + c_2 \cdot (n_1/n_0) \cdot Q^2, \quad (1.19)$$

$$\eta_{HA}(Q) = 1 - \frac{1 - \eta_{n_0}}{(n_0/n_1)^{0,36}} = 1 - \frac{1 - d_0 - d_1 \cdot Q - d_2 \cdot Q^2}{(n_0/n_1)^{0,36}}, \quad (1.20)$$

де n_0 і n_1 – номінальна і робоча частоти обертання (об/хв) ротора приводного електродвигуна.

Апроксимація параметрів $a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ здійснюється як за паспортними характеристиками, так і за експериментальними даними, отриманими в результаті спеціально спланованого і проведеного натурального експерименту, або по спеціально відібраним даними експлуатації НС.

1.4.2 Стохастична математична модель насосного агрегату

Оцінка параметрів $a_0, a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$ проводиться за експериментальними даними кінцевої довжини, а це призводить до того, що отримані оцінки параметрів стають випадковими величинами [14], тобто:

$$\begin{aligned} a_0 = a_0(\omega), a_1 = a_1(\omega), a_2 = a_2(\omega), c_0 = c_0(\omega), c_1 = c_1(\omega), c_2 = c_2(\omega), \\ d_0 = d_0(\omega), d_1 = d_1(\omega), d_2 = d_2(\omega), \omega \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Таким чином математичні моделі НА є нелінійними випадковими функціями, які містять випадкові параметри. Крім того, так як процеси споживання води є випадковими процесами, то в реальних умовах витрати через НС для будь-якого моменту часу потрібно розглядати як випадкову величину. Це призводить до того, що математичні моделі є нелінійними детермінованими функціями, залежними не тільки від випадкових параметрів $a_0(\omega), a_1(\omega), a_2(\omega), c_0(\omega), c_1(\omega), c_2(\omega), d_0(\omega), d_1(\omega), d_2(\omega)$, але і від випадкової змінної $Q(\omega)$:

$$H_H(Q(\omega)) = a_0(\omega) + a_1(\omega) \cdot Q(\omega) + a_2(\omega) \cdot Q(\omega)^2, \quad (1.22)$$

$$N_H(Q(\omega)) = c_0(\omega) + c_1(\omega) \cdot Q(\omega) + c_2(\omega) \cdot Q(\omega)^2, \quad (1.23)$$

$$\eta_H(Q(\omega)) = d_0(\omega) + d_1(\omega) \cdot Q(\omega) + d_2(\omega) \cdot Q(\omega)^2, \quad (1.24)$$

$$H_{HA}(Q(\omega)) = a_0(\omega) \cdot (n_1/n_0)^2 + a_1(\omega) \cdot (n_1/n_0) \cdot Q(\omega) + a_2(\omega) \cdot Q(\omega)^2, \quad (1.25)$$

$$N_{HA}(Q(\omega)) = c_0(\omega) \cdot (n_1/n_0)^3 + c_1(\omega) \cdot (n_1/n_0)^2 \cdot Q(\omega) + c_2(\omega) \cdot (n_1/n_0) \cdot Q(\omega)^2, \quad (1.26)$$

$$\eta_{HA}(Q(\omega)) = 1 - \frac{1 - \eta_{n_0}}{(n_0/n_1)^{0,36}} = 1 - \frac{1 - d_0(\omega) - d_1(\omega) \cdot Q(\omega) - d_2(\omega) \cdot Q(\omega)^2}{(n_0/n_1)^{0,36}}. \quad (1.27)$$

1.4.3 Детермінована математична модель регулюючих засувок

Регульовані засувки (затвори) призначені для управління витратою рідини що проходить через них. Ці пристрої широко використовуються спільно з нерегульованим НА, і призначені для управління режимами роботи останнього. Регульовані засувки, що застосовуються на НС у складі з НА, обладнані, як правило, електричним або гідравлічним приводом.

Залежно від конструкції засувки поділяються на паралельні і клинові. Засувки великого діаметра, а також які працюють з дистанційним і автоматичним управлінням, обладнуються гідравлічними або електричними приводами. Для врівноваження тиску по обидва боки диска у великих засувках передбачається обводна засувка (байпас) [16].

Залежність між падінням напору на РЗ H_3 , витратою Q і положенням штока (або кутом повороту осі) E_3 має вигляд

$$H_3 = \frac{C}{E_3^2} sqn(Q) \cdot |Q|, \quad (1.28)$$

де C – еквівалентний гідравлічний опір РЗ в положенні «відкрито»;

$E_3 (0,1)$ – ступінь відкриття РЗ, причому $E_3 = 1$ в положенні «відкрито», E_3 прагне до нуля, в положенні «закрито».

Гідравлічний опір у натуральному вираженні (1.14) в загальному випадку залежить від геометричних розмірів РЗ, режиму руху рідини. Однак, у зв'язку зі складною геометричною структурою внутрішньої поверхні РЗ і його тривалою експлуатацією, чисельне значення C відомо наближено і має бути оцінений за результатами натурного експерименту.

1.4.4 Стохастична математична модель регулюючих засувок

У зв'язку зі складною геометричною структурою внутрішньої поверхні РЗ та її тривалою експлуатацією, чисельне значення C відомо наближено і оцінюється за експериментальними даними вибірок кінцевої довжини, тому є випадковою величиною $C = C(\omega)$. Втрата напору на РЗ крім гідравлічного опору, залежить також від обсягу протікає через неї рідини [10]. Так як витрата, що протікає через РЗ рідини є випадковою величиною, то і падіння напору на РЗ також є випадковою величиною.

Стохастична модель РЗ має вигляд

$$h_{RZ}(Q(\omega)) = \frac{Q(\omega)C(\omega)}{E^2}. \quad (1.29)$$

1.4.5 Детермінована математична модель ділянок трубопроводів

Математична модель ділянки трубопроводу визначається залежністю втрати напору H на даній ділянці від витрати рідини, що перекачується через нього за одиницю часу – витрати Q . Емпіричні залежності $H = H(Q)$ для різних типів труб розглянуті в [3, 4, 7] і в більшості випадків можуть бути апроксимувати наступною формулою

$$H(Q) = \operatorname{sgn}(Q) \cdot \phi \cdot |Q|^x, \quad (1.30)$$

де Q – витрата через трубопровід [$\text{м}^3/\text{с}$];

$\operatorname{sgn}(Q)$ – знак Q ($\operatorname{sgn}(Q) = 1$, якщо $Q \geq 0$; $\operatorname{sgn}(Q) = -1$, якщо $Q < 0$), Що визначає парність функції (1.30) – тобто, незалежність H від напрямку потоку через ділянку трубопровода;

$\varphi > 0$ – гідравлічний опір і ділянки трубопроводу;

$\chi > 1$ – коефіцієнт нелінійності ділянки трубопроводу.

Гідравлічний опір у натуральному вираженні (1.30) в загальному випадку залежить від геометричних розмірів ділянки – довжини L і діаметра d , і режиму руху рідини. коефіцієнт нелінійності χ в більшості випадків варіюється в межах 2.

1.4.6 Стохастична математична модель ділянок трубопроводів

Як вже зазначалося раніше витрати води, що протікає через ділянку трубопроводу, є випадковою величиною, тому стохастична модель ділянки трубопроводу має вигляд

$$H(Q(\omega)) = sqn(Q(\omega)) \cdot \phi \cdot |Q(\omega)|^\chi. \quad (1.31)$$

1.4.7 Детермінована математична модель резервуара чистої води

РЧВ представляє собою акумулюючу ємність з об'ємом V який визначаються наступним виразом

$$V = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} S(h)dh, \quad (1.32)$$

де h_{\max} – максимально допустимий рівень рідини в приймальному резервуарі;

$S(h)$ – функція залежності площі поперечного перерізу приймального резервуара від його висоти.

Стан резервуара визначається його рівнем рідини h . Рівень рідини повинен знаходитися в заданому діапазоні: $h \in (h_{\min}, h_{\max})$. В іншому випадку, може статися перелив ($h > h_{\max}$), або спорожнення ($h < h_{\min}$).

1.4.8 Стохастична модель резервуара чистої води

Так як подача води в РЧВ та відбір води з РЧВ є випадковими величинами, то стохастичну модель РЧВ представимо у вигляді:

$$\frac{dV(\omega, t)}{dt} = Q_{vh}(\omega, t) - Q_{vih}(\omega, t), \quad (1.33)$$

$$P(H^{\min} \leq H(\omega, t)) \cong 1, \quad (1.34)$$

$$P(H(\omega, t) \leq H^{\max}) \cong 1. \quad (1.35)$$

1.5 Стохастична модель квазістаціонарних режимів роботи МВ

Для побудови загальної стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ будемо використовувати отримані стохастичні моделі НА, РЗ, ділянки трубопроводу, РЧВ.

Для подання структури МВ у вигляді орграфу $G(V, E)$, де V – множина вершин, E – множина дуг ($e = \text{Card}(E)$, $v = \text{Card}(V)$), реальний МВ додається нульовою вершиною і фіктивними хордами, що з'єднують нульову вершину з усіма входами і виходами МВ. Множину E дуг графа МВ можна представити як $E = L \cup M \cup K \cup R$, де L – множина дуг графа МВ, що відповідають ділянкам з НА; M – множина дуг графа МВ, що відповідають пасивним ділянкам ($M = M_1 \cup M_2$, M_1, M_2 відповідають множині гілок і реальних хорд дерева графа); K – множина фіктивних ділянок МВ ($K = I \cup N$, де I – множина

фіктивних дуг, що відповідають входам МВ, N – множина фіктивних дуг, відповідних виходів МВ), R – множина дуг графа МВ, відповідних РЗ. Для математичного формулювання задачі роблять наступне кодування МВ: дерево графа МВ обирають таким чином, щоб фіктивні ділянки МВ стали хордами, ділянки, що відповідають НА і РЗ – гілками. При цьому реальні ділянки частково стануть хордами, а частково – гілками дерева. Кожну з множин M, N, I розбиваємо на дві, що відповідають гілкам дерева $M1, N1, I1$ і хордам $M2, N2, I2$ ($N_1 \neq \emptyset$) [19]. Так як в кожному вузлі, що відповідає входу або виходу МВ задається значення напору або витрати, то кожна з множин $I1, I2, N2$ розбивається на дві, залежно від того, задана в цих дугах витрата $I11, I21, N21$, або напір $I12, I22, N22$. Гілці дерева, що відповідає одному з виходів з РЧВ, привласнюють номер 1, іншим гілкам – від 2 до $v-1$, хордам реальних ділянок – від v до $v + \eta_2 - 1$, фіктивним із заданими вузловими витратами - від $v + \eta_2$ до $v + \eta_2 + \xi_1 - 1$, де η_2 – кількість хорд реальних ділянок; хордам з іншими виходами з РЧВ – від $v + \eta_2 + \xi_1$ до e , де ξ_1 – кількість виходів із заданими вузловими витратами.

$\xi_2 = e - (v + \eta_2 + \xi_1)$ кількість входів в МВ (з РЧВ) (хорд). ($Card(I1) = 1$; $Card(I2) = \xi_2 = e - (v + \eta_2 + \xi_1)$; $Card(N2) = \xi_1$; $Card(M1) = v$; $Card(M2) = \eta_2$.)

Інтервал управління $[0, T]$ розбивається на K підінтервалів $[0, k \cdot \Delta t]$, ($k = 1, 2, \dots, K$). Тоді стохастична математична модель квазістаціонарних режимів роботи МВ для кожного підінтервалу $[k, k + 1]$ на заданому інтервалі часу $[0, T]$ набуде вигляду:

$$M_{\omega} \left(h_r(q_r(\omega, k)) + \sum_{i \in L} b_{1ri} h_{NAi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} h_{RZi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} h_i(q_i(\omega, k)) \right) = 0, \\ (r = v, \dots, v + \eta_2 - 1), \quad (1.36)$$

$$M_{\omega} \left(h_r^c(q_r(\omega, k)) - H_1(\omega, k) + \sum_{i \in L} b_{1ri} h_{NAi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} h_{RZi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in M_1} (b_{1ri} h_i(q_i(\omega, k)) + h_i^g) \right) = 0, \quad (r = v + \eta_2, \dots, v + \eta_2 + \xi_1 - 1), \quad (1.37)$$

$$M_{\omega} \left(h_r(q_r(\omega, k)) + h_r^g - H_z(\omega, k) + H_1(\omega, k) + \sum_{i \in L} b_{1ri} h_{NAi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} h_{RZi}(q_i(\omega, k)) + \sum_{i \in M_1} (b_{1ri} h_i(q_i(\omega, k)) + h_i^g) \right) = 0, \quad (r = v + \eta_2 + \xi_1, \dots, e; \quad z = 1, \dots, Z), \quad (1.38)$$

$$M_{\omega} \left(\sum_{r=v}^{v+\eta_2-1} b_{1ri} q_r(\omega, k) + \sum_{r=v+\eta_2}^e b_{1ri} q_r(\omega, k) - q_i(\omega, k) \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, v-1), \quad (1.39)$$

$$P(q_i(\omega, k) > 0) \geq \alpha, \quad \alpha \cong 1, \quad i \in L. \quad (1.40)$$

$$h_i(q_i(\omega, k)) = \text{sgn } q_i(\omega, k) S_i(\omega) q_i^2(\omega, k), \quad i \in M, \quad (1.41)$$

$$h_{NAi}(q_i(\omega, k)) = a_{0i}(\omega) \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^2 + a_{1i}(\omega) q_i(\omega, k) \frac{n_{1i}}{n_{0i}} + a_{2i}(\omega) q_i^2(\omega, k), \quad i \in L, \quad (1.42)$$

$$\eta_{NAi}(q_i(\omega, k)) = 1 - \frac{1 - d_{0i}(\omega) - d_{1i}(\omega) q_i(\omega, k) - d_{2i}(\omega) q_i^2(\omega, k)}{(n_{0i} / n_{1i})^{0,36}}, \quad i \in L, \quad (1.43)$$

$$N_{NAi}(q_i(\omega, k)) = c_{0i}(\omega) \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^3 + c_{1i}(\omega) \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^2 q_i(\omega, k) + c_{2i}(\omega) \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right) q_i^2(\omega, k), \quad i \in L, \quad (1.44)$$

$$N_{NAi}(q_i(\omega, k)) = \frac{9,81 \cdot h_{NAi}(q_i(\omega, k)) \cdot q_i(\omega, k)}{0,9 \cdot \eta_{NAi}(q_i(\omega, k))}, \quad i \in L, \quad (1.45)$$

$$h_{RZi}(q_i(\omega, k)) = \frac{q_i(\omega, k) C_i(\omega)}{E_i^2}, \quad i \in R, \quad (1.46)$$

$$H_z(\omega, k) = H_z(\omega, k-1) + c_z(q_{zvh}(\omega, k) - q_{zvih}(\omega, k)), \quad (z = 1, \dots, Z), \quad (1.47)$$

$$P(H_z^{\min} \leq H_z(\omega, k)) \geq \beta_1, \quad \beta_1 \cong 1, \quad (z = 1, \dots, Z), \quad (1.48)$$

$$P(H_z(\omega, k) \leq H_z^{\max}) \geq \beta_2, \quad \beta_2 \cong 1, \quad (z = 1, \dots, Z), \quad (1.49)$$

$$P(h_r^c(q_r(\omega, k)) \geq h_r^+) \geq \gamma, \quad \gamma \cong 1, \quad (r = v + \eta_2, \dots, v + \eta_2 + \xi_1 - 1), \quad (1.50)$$

де випадкові величини характеризують: $q_i(\omega, k)$ – витрата води на i -ий ділянці трубопроводу на k -му інтервалі часу;

$h_{NAi}(q_i(\omega, k))$ – напір i -го НА на k -му інтервалі часу;

$h_r^c(q_r(\omega, k))$ – вільний напір в r -му вузлі МВ на k -му інтервалі часу
($r = v + \eta_2, \dots, v + \eta_2 + \xi_1 - 1$);

h_r^+ – мінімальний допустимий напір в r -му вузлі МВ.

$S_i(\omega)$ – оцінка гідравлічного опору i -го ділянки трубопроводу ($i \in M$);

$h_{RZi}(q_i(\omega, k))$ – оцінка падіння напору на i -ий РЗ на k -му інтервалі часу;

$\eta_{NAi}(q_i(\omega, k))$ – оцінка ККД i -го НА на k -му інтервалі часу;

$a_{0i}(\omega), a_{1i}(\omega), a_{2i}(\omega), d_{0i}(\omega), d_{1i}(\omega), d_{2i}(\omega)$ – оцінки параметрів НА ($i \in L$);

$C_i(\omega)$ – оцінка параметрів РЗ ($i \in R$);

Ei – ступінь відкриття РЗ ($E \in (0, 1]$);

h_i^s – геодезична відмітка i -ого ділянку трубопроводу ($i \in M$);

b_{1ri} – елемент цикломатичної матриці;

$N_{NAi}(q_i(\omega, k))$ – оцінка потужності НА на k -му інтервалі часу;

$H_z(\omega, k)$ – оцінка рівня води в z -ому РЧВ на k -ому інтервалі часу;

$H_1(\omega, k)$ – оцінка рівня води в РЧВ, відповідному гілки дерева номер 1 на k -ому інтервалі часу;

H_z^{\min}, H_z^{\max} – задані межі зміни рівня води в z -ом РЧВ;

$q_{zvh}(\omega, k), q_{zvih}(\omega, k)$ – об'ємна подача води в z -ий РЧВ і об'ємний відбір води з z -го РЧВ на k -ому інтервалі часу;

c_z – нормований множник для z -го РЧВ.

Стохастична модель (2.40) – (2.44) квазістаціонарних режимів роботи МВ дозволяє здійснити розрахунок параметрів і стану квазістаціонарного режиму роботи МВ на заданому інтервалі часу $[0, T]$. Передбачається, що всі випадкові величини, що входять в модель, мають нормальний розподіл з відомими статистичними характеристиками – МС і дисперсіями. Граничні умови також

задаються у вигляді випадкових величин, що мають нормальний розподіл, і також задаються своїми параметрами - МО напорів або витрат води на входах і виходах МВ і їх дисперсіями. При цьому на одному з входів або виходів МВ має бути задано граничну умову у вигляді МС напору.

Таке завдання граничних умов дозволяє здійснити розрахунок параметрів і стану стохастичною моделі квазістаціонарного режиму роботи МВ.

1.6 Детермінований еквівалент стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ

Детермінований еквівалент стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ набуде вигляду:

$$f_r = \bar{h}_r(\bar{q}_r(k)) + \sum_{i \in L} b_{1ri} \bar{h}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} \bar{h}_{RZi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} \bar{h}_i(\bar{q}_i(k)) = 0, \quad (r = v, \dots, v + \eta_2 - 1), \quad (1.51)$$

$$f_r = \bar{h}_r^c(\bar{q}_r(k)) - \bar{H}_1(k) + \sum_{i \in L} b_{1ri} \bar{h}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} \bar{h}_{RZi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\bar{h}_i(\bar{q}_i(k)) + h_i^g) = 0, \quad (r = v + \eta_2, \dots, v + \eta_2 + \xi_1 - 1), \quad (1.52)$$

$$f_r = \bar{h}_r(\bar{q}_r(k)) + h_r^g - \bar{H}_z(k) + \bar{H}_1(k) + \sum_{i \in L} b_{1ri} \bar{h}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in R} b_{1ri} \bar{h}_{RZi}(\bar{q}_i(k)) + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\bar{h}_i(\bar{q}_i(k)) + h_i^g) = 0, \quad (r = v + \eta_2 + \xi_1, \dots, e; \quad z = 1, \dots, Z), \quad (1.53)$$

$$\bar{q}_i(k) = \sum_{r=v}^{v+\eta_2-1} b_{1ri} \bar{q}_r(k) + \sum_{r=v+\eta_2}^e b_{1ri} \bar{q}_r(k), \quad (i = 1, \dots, v-1), \quad (1.54)$$

$$\bar{q}_i(k) > 0, \quad i \in L. \quad (1.55)$$

$$\bar{h}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) = \bar{a}_{0i} \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^2 + \bar{a}_{1i} \bar{q}_i(k) \frac{n_{1i}}{n_{0i}} + \bar{a}_{2i} \bar{q}_i^2(k), \quad i \in L, \quad (1.56)$$

$$\bar{\eta}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) = 1 - \frac{1 - \bar{d}_{0i} - \bar{d}_{1i}\bar{q}_i(k) - \bar{d}_{2i}\bar{q}_i^2(k)}{(n_{0i}/n_{1i})^{0,36}}, \quad i \in L, \quad (1.57)$$

$$\bar{N}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) = \bar{c}_{0i} \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^3 + \bar{c}_{1i} \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right)^2 \bar{q}_i(k) + \bar{c}_{2i} \left(\frac{n_{1i}}{n_{0i}} \right) \bar{q}_i^2(k), \quad i \in L, \quad (1.58)$$

$$\bar{N}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) = \frac{9,81 \cdot \bar{h}_{NAi}(\bar{q}_i(k)) \cdot \bar{q}_i(k)}{0,9 \cdot \bar{\eta}_{NAi}(\bar{q}_i(k))}, \quad i \in L, \quad (1.59)$$

$$\bar{h}_{RZi}(\bar{q}_i(k)) = \frac{\bar{q}_i(k) \bar{C}_i}{E_i^2(k)}, \quad i \in R, \quad (1.60)$$

$$\bar{h}_i(\bar{q}_i(k)) = \text{sgn} \bar{q}_i(k) \bar{S}_i \bar{q}_i^2(k), \quad i \in M, \quad (1.61)$$

$$\bar{H}_z(k) = \bar{H}_z(k-1) + c_z(\bar{q}_{zvh}(k) - \bar{q}_{zvi}(k)), \quad (z=1, \dots, Z), \quad (1.62)$$

$$H_z^{\min} \leq \bar{H}_z(k), \quad (1.63)$$

$$\bar{H}_z(k) \leq H_z^{\max}, \quad (1.64)$$

$$\bar{h}_r^c(\bar{q}_r(k)) \geq h_r^+. \quad (1.65)$$

Таким чином, детермінований еквівалент стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ представляє собою взаємопов'язані системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (1.51) – (1.55), системи рівнянь зв'язку (1.54), (1.56) – (1.62) і системи односторонніх нерівностей (1.55), (1.63) – (1.65).

Особливістю системи рівнянь (1.49) – (1.52) є те, що вона містить $\eta_2 + \xi_2$ рівнянь з $e - (\xi_1 - 1) = e - \xi_1 + 1$ невідомими. При цьому кількість рівнянь менше, ніж кількість невідомих, на величину, рівну сумарній кількості входів і виходів МВ $\xi_1 + \xi_2$.

Для виконання необхідних умов розв'язання системи рівнянь (1.51) – (1.54) (збігу кількості рівнянь з кількістю невідомих) вона доповнюється значеннями граничних умов, які розглядаються як незалежні змінні. В якості незалежних змінних моделі (1.51) – (1.65) будемо використовувати МО граничних умов: напорів $\bar{H}_r (r \in I_{12} \cup I_{22} \cup N_{22})$, що задаються на гілки дерева під номером 1 (I_{12}) та на входах I_{22} і виходах N_{22} МВ, відповідних фіктивним

хордам; витрат $\bar{q}_i (i \in I_{21} \cup N_{21})$, що задаються на входах I_{21} і виходах N_{21} МВ. Як показано в [19], отримана система нелінійних алгебраїчних рівнянь (1.51) – (1.54) збігається з системою рівнянь СПР і, як показано в роботі [19], має єдиний розв’язок при виконанні умов (1.54) – (1.65).

1.7 Задача оптимального стохастичного керування

Оптимальне керування – вибір і здійснення найкращої програми дій для досягнення бажаного стану керованого об’єкта (виходячи з його певного початкового стану) впливом на параметри керування. Критерієм оптимального керування можуть бути різні технічні, економічні та інші показники функціонування об’єкта.

Цільову функцію задачі оптимального стохастичного керування режимами роботи МВ за добу можемо представити у вигляді математичного сподівання сумарної вартості електроенергії, витраченої всіма НС МВ на інтервалі керування $[0, T]$

$$M \sum_{\omega} \sum_{k=1}^{24} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} N_{ij}(q_i(\omega, k)) \cdot r(k) \rightarrow \min_{u(k) \in \Omega}. \quad (1.66)$$

Області обмежень Ω визначається стохастичною моделлю квазістаціонарних режимів роботи МВ [15], формули (1.36) – (1.50).

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДА РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод Ньютона

Підставивши значення складових q_i $(v-1)$ -мірного вектора послідовної змінної \bar{q}_1 , отримаємо систему μ нелінійних рівнянь з μ невідомими складовими \bar{q}_r вектора послідовної змінної \bar{q}_2

$$f_r = f_r(q_v, \dots, q_e) = 0, \quad (R = v, \dots, e). \quad (2.1)$$

Припустимо, що знайдено k -е наближення кореня цієї системи $\bar{q}_2^{-(k)'} = (q_v^{(k)}, \dots, q_e^{(k)})$. Уявімо точний корінь системи $\bar{q}_2' = (q_v, \dots, q_e)$ у вигляді

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_2^{-(k)} + \Delta \bar{q}_2^{-(k)}, \quad (2.2)$$

де вектор $\Delta \bar{q}_2^{-(k)'} = (\Delta q_v^{(k)}, \dots, \Delta q_e^{(k)})$ – поправка (похибка кореня).

Підставивши вираз (2.2) в систему рівнянь (2.1), отримаємо

$$f_r(q_v^{(k)} + \Delta q_v^{(k)}, \dots, q_e^{(k)} + \Delta q_e^{(k)}) = 0, \quad (R = v, \dots, e). \quad (2.3)$$

Розкладемо ліву частину рівнянь (2.3) в околиці точки $\bar{q}_2^{-(k)}$ за ступенями малого вектора $\Delta \bar{q}_2^{-(k)}$. Обмежувачись лінійними членами:

$$f_r(\bar{q}_2^{-(k)}) + \sum_{i=v}^e \frac{\partial f_r}{\partial q_j}(\bar{q}_2^{-(k)}) \Delta q_j^{(k)} = 0, \quad (R = v, \dots, e), \quad (2.4)$$

або

$$W(\bar{q}_2^{-(k)})\Delta\bar{q}_2^{-(k)} = -\bar{f}(\bar{q}_2^{-(k)}), \quad (2.5)$$

де матриця Якобі W системи функцій f_r ($R = v, \dots, e$), представлена у вигляді вектор-функції \bar{f} , збігається з матрицею Гесса H функції $Z = Z(\bar{q}_2)$, позитивно визначена для всіх \bar{q}_2 .

Система рівнянь (2.5) являє собою лінійну систему щодо вектора-поправки $\Delta\bar{q}_2$. Матриця цієї системи є Якобіан вектор-функції $\bar{f}^{(k)}$, а стовпець вільних членів – вектор-функція, взята з протилежним знаком, при k -наближенні кореня системи нелінійних рівнянь (2.1). Крім того, з позитивної визначеності цієї матриці у будь-якій точці слідує її неособливість і існування оберненої матриці. Отже, рішення лінійної системи рівнянь (2.2) можна представити у вигляді

$$\Delta\bar{q}_2^{-(k)} = -(W^{-1})^{(k)}\bar{f}^{(k)}. \quad (2.6)$$

Звідси, беручи до уваги вираз (2.1), маємо

$$\bar{q}_2^{-(k+1)} = \bar{q}_2^{-(k)} - (W^{-1})^{(k)}\bar{f}^{(k)}. \quad (2.7)$$

Оскільки для визначення вектора-поправки $\Delta\bar{q}_2^{-(k)}$ враховувалися тільки лінійні члени розкладання $(k + 1)$ -го наближення кореня не є точним, але воно ближче до точного, ніж k -е. Повторюючи розглянутий цикл обчислень для $(k+1)$ -го наближення кореня системи рівнянь (1.64), отримуємо $(k+2)$ -е наближення і т.д. Ітераційний процес уточнення кореня триває до тих пір, поки не буде досягнута задана точність обчислення ε , тобто Бувай $|f_r| - \varepsilon \leq 0$ для всіх r ($r = v, \dots, e$). Підставляючи отримані значення складових вектора послідовної змінної \bar{q} в (1.35), визначаємо другий вектор, що характеризує стан

потокораспределения инженерної мережі, – вектор паралельної змінної \bar{h} .

2.2 Узагальнений метод Ньютона

Розглянутий раніше метод Ньютона є різновидом ітераційного обчислювального процесу безумовної мінімізації функції. При цьому $\lambda^{(k)} = 1$, а спрямований вектор

$$\Delta \bar{x}^{-(k)} = -(H^{-1})^{(k)} \left(\partial y / \partial \bar{x} \right)^{(k)}. \quad (2.8)$$

Більш того, можна показати, що в основі методу Ньютона лежить апроксимація функції, що мінімізується на кожному кроці з квадратичною формою і мінімізація цієї квадратичної форми за методом Ейлера. Дійсно, розкладемо функцію $y(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$ в ряд Тейлора в околиці точки $\bar{x}^{-(k)}$

$$\Delta y = \left(\partial y / \partial \bar{x} \right)^{(k)'} \Delta \bar{x} + \frac{1}{2} \Delta \bar{x}' H^{(k)} \Delta \bar{x}. \quad (2.9)$$

І будемо шукати таке збільшення $\Delta \bar{x}$, яке мінімізує квадратичну форму (2.9). Один із шляхів рішень такого завдання, що дозволяє знайти рішення за один крок, заснований на застосуванні методу Ейлера і полягає в рішенні згідно з формулою (2.5) системи лінійних рівнянь

$$\left(\partial y / \partial \bar{x} \right)^{(k)'} + H^{(k)} \Delta \bar{x} = 0. \quad (2.10)$$

Якщо в разі посереднього матриці $H^{(k)}$ можна представити у вигляді виразу (2.9). Тепер, з огляду на співвідношення $\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta \bar{x}^{(k)}$ при $\lambda^{(k)} = 1$, Легко

прийти до основного рекурентному співвідношенню методу Ньютона.

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - (H^{(-1)})^{(k)} \left(\partial y / \partial \bar{x} \right)^{(k)}. \quad (2.11)$$

Для нелінійної квадратичної функції $y(x) \rightarrow \min_{x \in R^n}$ апроксимація вираження (1.72) не є точною, оскільки викинуті члени третього і більш високого порядку, причому відхилення значень апроксимуючої і істинної функції буде тим більше, чим більше $\Delta \bar{x}^{(k)}$. Тому рекурентне співвідношення (2.11) модифікують, ввівши позитивний параметр $\lambda^{(k)}$

$$\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} (H^{(-1)})^{(k)} \left(\partial y / \partial \bar{x} \right)^{(k)}. \quad (2.12)$$

В результаті приходять до узагальненого методу Ньютона, або метода Ньютона з регулюванням кроку.

2.3 Метод Лобачова-Кросса

При розрахунку водопровідних мереж В.Г.Лобачевим і Х. Кроссом був інтуїтивно знайдений метод послідовних наближень. Модифікація цього методу була отримана в 1932 р Радянським інженером М.М.Андріяшевим. Обидва методи набули широкого поширення в практиці розрахунку процесів поточкораспределения в водопровідних та газових мережах. Нижче буде показано, що метод Лобачова-Кросу є наближеним методом Ньютона, отриманим в результаті ряду математично некоректних припущень, а метод Андріяшева - різновидом методу покоординатного спуску.

У разі методу Лобачова-Кросу (наближеного методу Ньютона) все недиагональні елементи матриці Якобі системи рівнянь (2.2) прирівнюють до

нуля, а поправку кореня k -й ітерації визначають по більш простим наближеним формулами:

$$\Delta q_r^{(k)} = -\frac{f_r^{(k)}}{\left(\partial f_r / \partial q_r\right)^{(k)}}, \mathbf{R} = (\mathbf{v}, \dots, \mathbf{e}). \quad (2.13)$$

Іноді можна зробити такі грубі математичні допущення, оскільки для інженерної мережі елементи головної діагоналі матриці Якобі додатні і переважають над будь-яким елементом у рядка або стовпці, а багато недіагональні елементи цієї матриці дорівнюють нулю. Особливе значення при вирішенні системи рівнянь наближеним методом Ньютона набуває вибір системи незалежних циклів в мережі. Зокрема, при формуванні системи фундаментальних циклів дерево графа мережі необхідно вибирати таким чином, щоб його гілки належали якомога меншій кількості фундаментальних циклів одночасно (більше нульових елементів в матриці B_1), А хордами були дуги, що володіють великими опорами. Від вибору дерева значно залежить швидкість збіжності методу.

Класична задача безумовної мінімізації функцій формулюється так

$$y(\bar{x}) \rightarrow \min_{\bar{x} \in R^n}, \quad (2.14)$$

де R^n – n -мірний евклідов простір; $y(\bar{x})$ – безперервна функція, що має перші і другі похідні.

Як відомо, необхідні умови для точки локального мінімуму цього завдання мають вигляд

$$\left(\partial y / \partial \bar{x}\right)^* = 0, \quad (2.15)$$

а для виконання достатніх умов необхідно, щоб в цій точці матриця других часткових похідних (матриця Гесса)

$$H = \left[\partial^2 y / \partial x_i \partial x_j \right], (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.16)$$

була додатньо визначена.

2.4 Метод покоординатного спуску

Метод покоординатного спуску зводить задачу мінімізації функції n змінних до деякої послідовності кроків, на кожному з яких здійснюється мінімізація функції однієї змінної. Нерідко цей метод називають методом Гаусса-Зейделя. На кожному кроці цього методу змінюється тільки одна змінна x_r , по якій не виконується умова (2.16)

$$x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \Delta x_r^{(k)}. \quad (2.18)$$

Оскільки розкладання функції (2.15) в околиці точки $\bar{x}^{(k)}$ в ряд Тейлора, обмежений лінійними членами, за умови, що змінюється тільки одна змінна x_r , дає

$$\Delta y^{(k)} = (\partial y / \partial x_r)^{(k)} \Delta x_r^{(k)}, \quad (2.19)$$

$$\Delta x_r^{(k)} < 0, \text{ якщо } (\partial y / \partial x_r)^{(k)} > 0, \quad (2.20)$$

$$\Delta x_r^{(k)} > 0, \text{ якщо } (\partial y / \partial x_r)^{(k)} < 0. \quad (2.21)$$

Дійсно, зміна координати $x^{(k)}$, що приводить до зменшення функції цілі

у, має бути протилежно по знаку значенню похідної $(\partial y / \partial x_r)^{(k)}$, Бо тільки в цьому випадку відповідно до (2.19) $\Delta y < 0$.

Величину кроку в обраному напрямку $\Delta x_r^{(k)}$ визначимо з умови звернення до нуля похідної $(\partial y / \partial x_r)^{(k+1)}$, Попередньо розклавши її в околиці точки, $\bar{x}^{(k)}$ в ряд Тейлора, обмежений лінійними членами, і враховуючи, що тільки одна координата змінюється, а інші залишаються незмінними

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k+1)} = \frac{\partial y}{\partial x_r} (\bar{x} + \Delta \bar{x})^{(k)} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)} \Delta x_r^{(k)} = 0, \quad (2.22)$$

де $\Delta \bar{x}^{(k)'} = (0, \dots, 0, \Delta x_r^{(k)}, 0, \dots, 0)$.

Безпосередньо з виразу (2.22) випливає

$$\Delta x_r^{(k)} = - \left(\frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)} / \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)}. \quad (2.23)$$

Проробивши спуск по координаті $x_r^{(k)}$, Переходимо до наступної і т.д. поки не прийдемо до нової точки $\bar{x}^{(k+1)'} = (x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$, В якій обчислюють весь вектор $(\partial y / \partial \bar{x})^{(k+1)}$ і порівнюють його складові із заданою точністю рішення ε . Після досягнення цієї точності рішення припиняють. В іншому випадку необхідний перехід до наступної ітерації на повторний цикл обчислень.

Розглянутий конкретний метод покоординатного спуску заснований на таких передумовах:

а) крок вибирають послідовно по кожній із змінних, тобто поточні значення похідних $(\partial y / \partial \bar{x})^{(k)}$ не впливають на вибір змінною змінної;

б) величину кроку в обраному напрямку визначають в результаті рішення задачі мінімізації функції однієї змінної за методом Ньютона, званому іноді методом дотичних.

Існує велика кількість інших методів мінімізації функцій однієї змінної. Застосування кожного з них в методі покоординатного спуску призводить до нової модифікації цього алгоритму. Те ж саме відбувається і при використанні інших стратегій щодо вибору змінною змінної.

Застосуємо розглянуту процедуру покоординатного спуску до вирішення прямої задачі аналізу, тобто величину кроку в потрібному напрямку виберемо шляхом безумовної мінімізації функції однієї змінної за методом дотичних, а при виборі послідовності кроків на кожній ітерації зупинимося на циклічному способі, тобто на першому кроці k -ї ітерації будемо аналізувати, а в разі необхідності змінювати змінну q_v , на другому q_{v+1} і т.д. до q_e . Тоді, враховуючи вираз (2.23) стосовно функції, значення $q_r^{(k+1)}$ на r -му кроці k -ї ітерації необхідно вибирати відповідно до виразу:

$$q_r^{(k+1)} = q_r^{(k)} - f_r(\bar{q}^{-(kr)}) / \frac{\partial f_r}{\partial q_r}(\bar{q}^{-(kr)}), \quad (2.24)$$

$$\bar{q}^{-(kr)'} = (q_r^{(k+1)}, \dots, q_{r-1}^{(k+1)}, q_r^{(k)}, q_{r+1}^{(k)}, \dots, q_e^{(k)}). \quad (2.25)$$

На перший погляд може здатися, що метод покоординатного спуску розв'язання прямої задачі аналізу аналогічний наближеному методу Ньютона, оскільки поправка на r -му кроці k -ї ітерації здійснюється по одній і тій же формулі. Однак це не так. Відмінність методів полягає в тому, що при застосуванні наближеного методу Ньютона все μ поправок визначають

одночасно і тільки після цього роблять корекцію вектора \bar{q}_1 і обчислення нев'язок f_r і їх похідних $\partial f_r / \partial q_r$ ($R = v, \dots, e$). У разі застосування методу покоординатного спуску процес обчислення цих поправок розпадається на μ кроків, на кожному з яких обчислюють поправку тільки для однієї компоненти вектора \bar{q}_2 , і після кожного кроку здійснює корекцію складових вектора \bar{q}_1 згідно з першим постулату мереж і обчислення значень наступної функції f_{r+1} і її похідної $\partial f_{r+1} / \partial q_{r+1}$. Причому так як на r -му кроці змінюється значення тільки однієї складової вектора \bar{q}_2 , значення вектора \bar{q}_1 на цьому етапі можна визначити по більш простим формулам

$$q_i^{(kr)} = q_i^{(k(r-1))} + b_{1ri} \Delta q_r^{(k)}, \quad (I = 1, \dots, v-1). \quad (2.26)$$

Наведена модифікація методу покоординатного спуску розв'язання прямої задачі аналізу повністю збігається з методом інженера Андріяшева.

2.5 Аналіз методів

Дамо порівняльну характеристику розглянутих методів розв'язання прямої задачі аналізу з точки зору доцільності їх застосування на ПК за критеріями витрат машинного часу і займаного обсягу оперативної пам'яті.

Метод Ньютона (особливо його модифікація, яка називається узагальненим методом Ньютона) сходиться значно швидше інших методів, але вимагає великого обсягу обчислень на кожній ітерації. Цей метод завжди призводить до вирішення даної системи рівнянь. Швидкість збіжності методу залежить від початкових наближень, але в меншій мірі, ніж у інших методів. Вибір дерева графа мережі впливає тільки на час виконання однієї ітерації.

Число ітерацій не залежить від прийнятого дерева і призводить до слабкої залежності швидкості збіжності методу Ньютона від вибору системи фундаментальних циклів.

Метод Лобачова-Кросу, будучи найпростішим з обчислювальної схеми, не є математично обґрунтованим, часто розходиться, а якщо і дає збіжність, то дуже повільну, більшою мірою залежить від вибору дерева графа мережі. Це дерево необхідно вибирати таким чином, щоб його гілки належали одночасно якомога меншій кількості незалежних циклів і володіли малими аеродинамічними або гідравлічними опорами.

Метод покоординатного спуску сходиться при будь-яких початкових наближеннях, але має більш повільно сходимість, ніж метод Ньютона. Цей метод менш трудомісткий за кількістю елементарних операцій в кожному циклі обчислень і вимагає меншого обсягу пам'яті для зберігання проміжних результатів. Недоліком методу є те, що його швидкість збіжності залежить від вибору системи незалежних циклів мережі. Для більш швидкої збіжності методу дерево графа мережі необхідно вибирати таким чином, щоб хордами були гілки з великими аеродинамічними або гідравлічними опорами, тобто щоб дерево мало мінімальну довжину (2.20), де під довжиною дуги мається на увазі величина відповідного опору цієї дуги.

Модифікований метод Ньютона не забезпечує сходимість рішення прямої задачі аналізу при довільних початкових приближень.

Застосовувати для рішень прямої задачі аналізу модифікований метод Ньютона, методи Лобачова-Кросу та Девідона-Флетчера-Рівса недоцільно. Перші два – через погану сходимість, а останній – через відсутність у нього будь-яких переваг у порівнянні із методом Ньютона та із узагальненим методом Ньютона.

Таким чином, найбільш ефективним методом розв'язання прямої задачі аналізу за витратами машинного часу є узагальнений метод Ньютона. Якщо немає обмежень за обсягом займаної пам'яті, то краще використовувати цей метод.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Особливості програмної реалізації за допомогою мови C#

C# – об'єктно-орієнтована мова програмування з безпечною системою типізації для платформи NET. Розроблена Андерсом Гейлсбергом, Скотом Вілтанутом та Пітеров Гольде під егідою Microsoft Research (при фірмі Microsoft).

Синтаксис C# близький до C++ і Java. Мова має строгу статичну типізацію, підтримує поліморфізм, перевантаження операторів, вказівники на функції-члени класів, атрибути, події, властивості, винятки, коментарі у форматі XML. Переїнявши багато що від своїх попередників – мов C++, Delphi, Smalltalk – C#, спираючись на практику їхнього використання, виключає деякі моделі, що зарекомендували себе як проблематичні при розробці програмних систем, наприклад множинне спадкування класів (на відміну від C++). C# надає масу додаткових бібліотек.

C# являється об'єктно-орієнтованою мовою. Об'єктно-орієнтований підхід дозволяє вирішити завдання з побудови великих, але в той же час гнучких, масштабованих і розширюваних програм.

3.2 Опис програми

Для вирішення детермінованого еквівалента стохастичною моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ був розроблений і використовувався програмний комплекс «WaterSupply», призначений для моделювання різних режимів і оптимізації роботи МВ [21, 22]. Програмна реалізація розроблених математичних моделей і методів проводилася на мові програмування C # [18, 20]. У ПК реалізований графічний інтерфейс, що дозволяє вводити схему МВ. Інформаційна прив'язка графічних об'єктів схеми до вихідних даних

здійснюється за допомогою таблиць MS Excel.

Блок 1. Створення нової мережі. У файлах Excel вводимо вихідні дані, режим за добу по годинах і витрати споживачів. (Граф – Створити) (рис 3.1). Маємо в своєму розпорядженні елементи мережі в потрібному порядку і зберігаємо координати мережі (Граф – Зберегти граф – ім'я файлу).

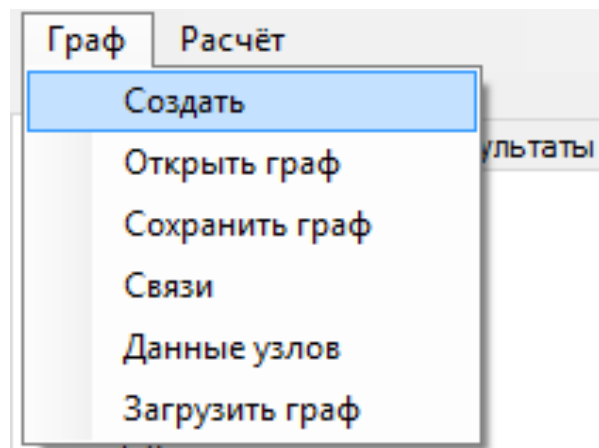


Рисунок 3.1 – Створення схеми мережі МВ

Блок 2. Розрахунок поточкорозподілу. Завантажуємо раніше створену схему мережі (Граф – Завантажити граф). Або (Граф – Відкрити граф – ім'я файлу), (Розрахунок – поточкорозподіл) (рис 3.2). В результаті розв'язку детермінованість еквівалента задачі стохастичної моделі квазістаціонарних режимів роботи МВ для кожної години доби отримуємо: витрати і втрати напору води на кожній ділянці МВ, напори води на виходах МВ (у кінцевих споживачів), рівень води в РЧВ-3.

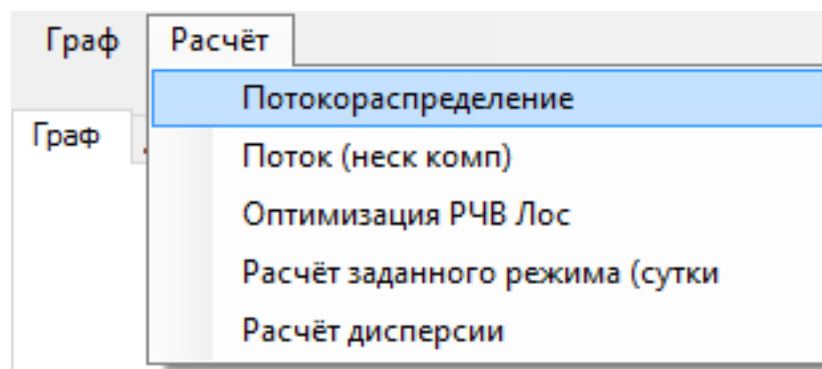


Рисунок 3.2 – Розрахунок поточкорозподілу

Блок 3. Рішення задачі оптимізації. (Розрахунок – Розрахунок заданого режиму (добу)) (рис 3.3). В результаті рішення задачі оптимізації отримуємо кількість витраченої електроенергії по годинах, рівень води в РЧВ по годинах, добове споживання електроенергії, фінансові витрати на електроенергію за добу.

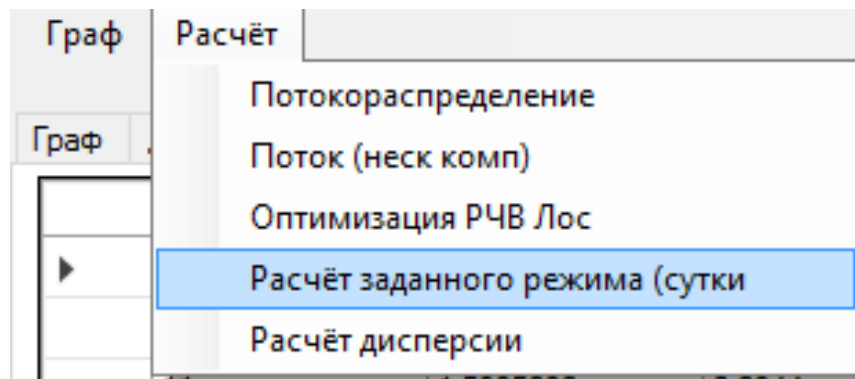


Рисунок 3.3 – Розв'язання задачі оптимізації

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Як приклад розглянемо МВ, представлений на рис 4.1. Який складається з двох НС другого підйому, які працюють на РЧВЗ. Вихідними даними для задачі оптимального стохастичного управління режимами роботи МВ на інтервалі часу $[0, T]$ є статичні дані: структура МВ, довжини, діаметри, геодезичні позначки ділянок трубопроводу, оцінки параметрів математичних моделей НА по кожній НС, оцінки гідравлічних опорів РЗ на кожній НС табл. 4.3 – табл. 4.7, фізичні розміри кожного з РЧВ; динамічні дані: прогноз добового водоспоживання з РЧВ-3, прогноз водоспоживання споживачами табл. 4.8 – табл. 4.10, режим роботи МВ за добу (номера працюючих НА по годинах, положення РЗ, напори і витрати на виходах НС по годинах, рівні води в РЧВ-1 і РЧВ-2 по годинах, добове споживання електроенергії кожної НС) табл. 4.9.

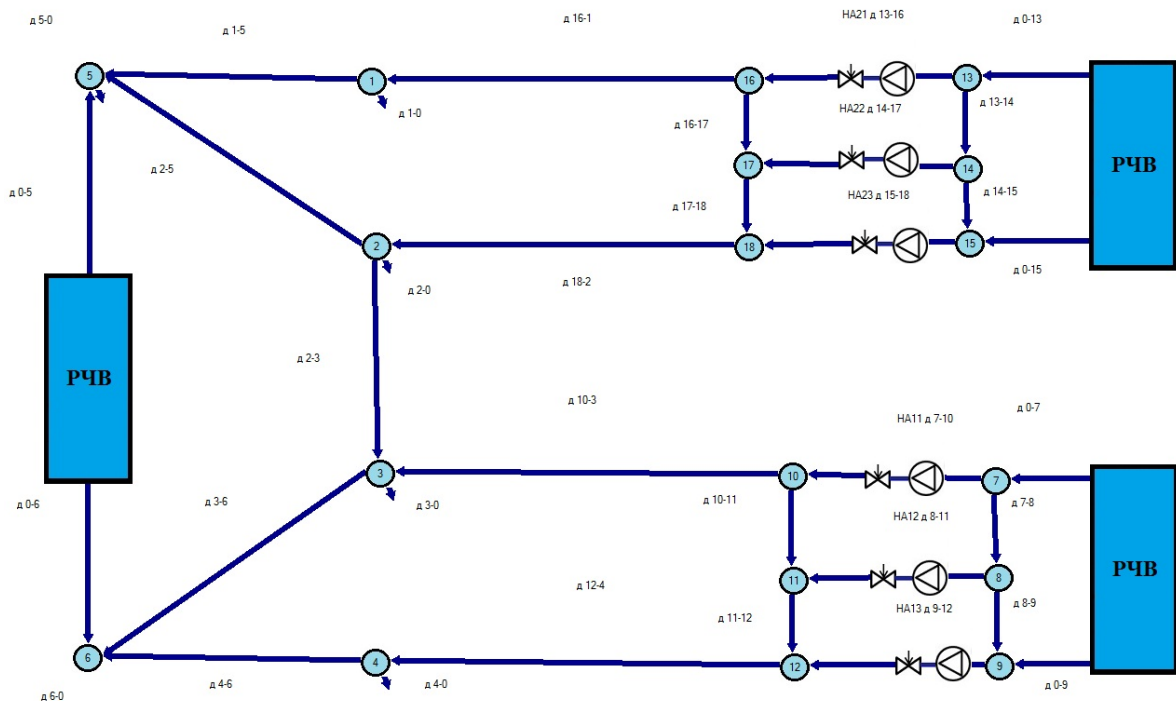


Рисунок 4.1 – Схема мережі МВ

НС другого підйому НС1 і НС2 оснащені трьома однотипними, паралельно підключеними НА з однаковими характеристиками. Допустимі діапазони зміни рівнів води в РЧВ-3 [1,45 ... 4,9].

Робота МВ розглядається за період часу одну добу. У нульовий момент часу $k = 0$ для фактичного і оптимального режиму використовувалися однакові умови:

а) МС рівнів води в РЧВ-1 $H_2 = 2,6$ м; в РЧВ-2 $H_1 = 3,9$ м;

б) на НС1 працював НА-1; на НС-2 працювали НА-4 та НА-5

Фактичні параметри технологічного обладнання МВ наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Фактичні параметри технологічного обладнання МВ

НС	Тип НА	q , м ³ /ч	h , м	N , кВт	n_l , хв ⁻¹	d , мм	Кількість НА
НС1	20 НДС	3420	71	960	1000	765	3
НС2	24 НДС	6500	79	1600	750	1040	3

Тариф і вартість 1 кВт/год електроенергії (S) визначається за тризонним тарифом табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Тариф за електроенергію по годинах

Години	6.00–8.00	8.00–10.00	10.00–18.00	18.00–22.00	22.00–23.00	23.00–6.00
Тарифи	1,02	1,8	1,02	1,8	1,02	0,35
S , грн.	1,6	2,82	1,6	2,82	1,6	0,39

На рис. 4.4 наведено графік прогнозу процесу годинного споживання води з РЧВ-2, який вираховується в момент часу $k = 8$ з випередженням $l = 1, \dots, 23$ для кожного з семи днів.

Вихідні дані для завдання оптимального стохастичного управління режимами роботи МВ на інтервалі часу $[0, T]$.

Таблиця 4.3 – Дані входу

№ узла	№ дуги	Н вх	l	d
7	0	3	1	0,75
9	29	3	1	0,75
13	30	3	1	0,75
15	31	3	1	0,75
5	32	2	1	0,75
6	33	2	1	0,75

Таблиця 4.4 – Дані пасивних ділянок

вузол1	вузол2	l	d	№ дуги
7	8	2	0,75	1
8	9	2	0,75	2
13	14	2	0,75	6
14	15	2	0,75	7
16	1	1000	0,75	11
1	5	1000	0,75	12
18	2	1000	0,75	13
2	5	1000	0,75	14
10	3	1000	0,75	15
12	4	1000	0,75	16
3	6	1000	0,75	17
4	6	1000	0,75	18
16	17	2	0,75	19
17	18	2	0,75	20
10	11	2	0,75	21
11	12	2	0,75	22
2	3	10	0,75	34

Таблиця 4.5 – Дані насосних агрегатів

НА №	№ дуги	вузол1	вузол2	n0	n1	a0	a1	a2
11	3	7	10	960	960	85,0124	-0,15429	-15,7371
12	4	8	11	960	960	85,0124	-0,15429	-15,7371
13	5	9	12	960	960	85,0124	-0,15429	-15,7371
21	8	13	16	750	750	103,1836	-0,22791	-4,3193
22	9	14	17	750	750	103,1836	-0,22791	-4,3193
23	10	15	18	750	750	103,1836	-0,22791	-4,3193

c0	c1	c2	d0	d1	d2	№дуги пер
205,2343	64,28571	60,17143	-0,14286	96,4543	-26,1514	666
205,2343	64,28571	60,17143	-0,14286	96,4543	-26,1514	666
205,2343	64,28571	60,17143	-0,14286	96,4543	-26,1514	666
0	0	0	-0,12887	90,69302	-23,4072	666
0	0	0	-0,12887	90,69302	-23,4072	666
0	0	0	-0,12887	90,69302	-23,4072	666

Таблиця 4.6 – Дані регулюючих засувок

РЗ №	№ дуги	вузол1	вузол2	С	Е
11	3	7	10	5	0,6
12	4	8	11	5	0,6
13	5	9	12	5	0,6
21	8	13	16	5	0,6
22	9	14	17	5	0,6
23	10	15	18	5	0,6

Таблиця 4.7 – Дані виходів

№ вузла	q0	№ дуги
1	0,442	23
2	0,497	24
3	0,442	25
4	0,497	26
5	2,208	27
6	2,208	28

Таблиця 4.8 – Режими роботи НА по годинах протягом доби

години	0	1	2	6	7	8
	НС21 НА1	НС21 НА2	НС21 НА3	НС22 НА4	НС22 НА5	НС22 НА6
9	1	0	0	1	1	0
10	1	0	0	1	1	0
11	1	0	0	1	1	0
12	1	0	0	1	1	0
13	1	0	0	1	1	0
14	1	0	0	1	1	0
15	1	0	0	1	1	0
16	1	0	0	1	1	0
17	1	0	0	1	1	0
18	1	0	0	1	1	0
19	1	0	0	1	1	0
20	1	0	0	1	1	0
21	1	0	0	1	1	0
22	1	0	0	1	1	0
23	1	0	0	1	1	0
24	1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0
2	1	0	0	1	1	0
3	1	0	0	1	1	0
4	1	0	0	1	1	0
5	1	0	0	1	1	0
6	1	0	0	1	1	0
7	1	0	0	1	1	0
8	1	0	0	1	1	0

Таблиця 4.9 – Прогноз водоспоживання споживачами по годинах за добу

години	тариф	1	2	3	4	5
9	2,823	0,342	0,385	0,342	0,385	1,712
10	2,823	0,333	0,374	0,333	0,374	1,664
11	1,6	0,294	0,331	0,294	0,331	1,472
12	1,6	0,262	0,295	0,262	0,295	1,312
13	1,6	0,204	0,229	0,204	0,229	1,019
14	1,6	0,191	0,215	0,191	0,215	0,955
15	1,6	0,177	0,199	0,177	0,199	0,885
16	1,6	0,217	0,244	0,217	0,244	1,083
17	1,6	0,241	0,271	0,241	0,271	1,203
18	1,6	0,229	0,257	0,229	0,257	1,144
19	2,823	0,305	0,343	0,305	0,343	1,525
20	2,823	0,304	0,342	0,304	0,342	1,52
21	2,823	0,324	0,364	0,324	0,364	1,619
22	2,823	0,356	0,4	0,356	0,4	1,779
23	1,6	0,314	0,353	0,314	0,353	1,568
24	0,392	0,162	0,182	0,162	0,182	0,811
1	0,392	0,13	0,146	0,13	0,146	0,651
2	0,392	0,2	0,182	0,2	0,182	0,363
3	0,392	0,23	0,176	0,23	0,176	0,336
4	0,392	0,13	0,182	0,13	0,182	0,363
5	0,392	0,186	0,197	0,186	0,197	0,429
6	0,392	0,147	0,365	0,147	0,365	0,733
7	1,6	0,667	0,478	0,667	0,478	1,101
8	1,6	0,843	0,82	0,843	0,82	1,421

Результати розрахунків рішення задачі оптимального стохастичного керування режимами роботи МВ на інтервалі часу $[0, T]$

Таблиця 4.10 – Фактичний режим роботи МВ по годинах за добу

Години	НС1			НС2			Рівень води в РЧВЗ, м
	НА 1	НА 2	НА 3	НА4	НА 5	НА 6	3
9	1	0	0	1	1	0	2,87
10	1	0	0	1	1	0	2,76
11	1	0	0	1	1	0	2,72
12	1	0	0	1	1	0	2,74
13	1	0	0	1	1	0	2,86
14	1	0	0	1	1	0	3
15	1	0	0	1	1	0	3,16
16	1	0	0	1	1	0	3,25
17	1	0	0	1	1	0	3,3
18	1	0	0	1	1	0	3,37
19	1	0	0	1	1	0	3,31
20	1	0	0	1	1	0	3,25
21	1	0	0	1	1	0	3,16
22	1	0	0	1	1	0	3,01
23	1	0	0	1	1	0	2,94
24	1	0	0	1	1	0	3,13
1	1	0	0	1	1	0	3,37
2	1	0	0	1	1	0	3,67
3	1	0	0	1	1	0	3,97
4	1	0	0	1	1	0	4,28
5	1	0	0	1	1	0	4,56
6	1	0	0	1	1	0	4,73
7	1	0	0	1	1	0	4,67
8	1	0	0	1	1	0	4,4

Сумарна
потужність за
добу
99 699 кВт

сумарні
витрати на
електроенергію
155 114 грн.

Таблиця 4.11 – Оптимальний режим роботи МВ по годинах за добу

Години	НС1			НС2			Рівень води в РЧВЗ, м
	НА 1	НА 2	НА 3	НА 4	НА 5	НА 6	3
9	1	0	0	1	0	0	2,78
10	1	0	0	1	0	0	2,58
11	1	0	0	1	0	0	2,45
12	1	0	0	1	0	0	2,38
13	1	0	0	1	0	0	2,41
14	1	0	0	1	0	0	2,47
15	1	0	0	1	0	0	2,55
16	1	0	0	1	0	0	2,56
17	1	0	0	1	0	0	2,53
18	1	0	0	1	0	0	2,52
19	1	0	0	1	0	0	2,37
20	1	0	0	1	0	0	2,22
21	1	0	0	1	0	0	2,04
22	1	0	0	1	0	0	1,8
23	1	0	0	1	1	0	1,73
24	1	1	0	1	1	1	2,04
1	1	1	0	1	1	1	2,4
2	1	1	0	1	1	1	2,81
3	1	1	0	1	1	1	3,23
4	1	1	0	1	1	1	3,65
5	1	1	0	1	1	1	4,04
6	1	1	0	1	1	1	4,33
7	1	0	0	1	1	0	4,27
8	1	0	0	1	1	0	4

Сумарна
потужність за
добу
101 602 кВт

сумарні
витрати на
електроенергію
129 035 грн.

label9	Время	Режим
N=4170,04 ur5=2,87	9	100110
N=4169,11 ur5=2,76	10	100110
N=4162,85 ur5=2,72	11	100110
N=4157,1 ur5=2,74	12	100110
N=4145,44 ur5=2,86	13	100110
N=4142,15 ur5=3	14	100110
N=4138,48 ur5=3,16	15	100110
N=4145,65 ur5=3,25	16	100110
N=4149,88 ur5=3,3	17	100110
N=4147,3 ur5=3,37	18	100110
N=4161,3 ur5=3,31	19	100110
N=4161,45 ur5=3,25	20	100110
N=4165,32 ur5=3,16	21	100110
N=4171,4 ur5=3,01	22	100110
N=4164,9 ur5=2,94	23	100110
N=4135,66 ur5=3,13	24	100110
N=4127,68 ur5=3,37	1	100110
N=4139,25 ur5=3,67	2	100110
N=4142,06 ur5=3,97	3	100110
N=4124,42 ur5=4,28	4	100110
N=4132,46 ur5=4,56	5	100110
N=4131,11 ur5=4,73	6	100110
N=4199,77 ur5=4,67	7	100110
N=4215,2 ur5=4,4	8	100110
мощность за сутки=99699,98		
стоимость за сутки=155114,186350464		

Рисунок 4.2 – Фактический режим работы МВ по годинах за добу

label9	Время	Режим
N=3057,48 ur5=2,78	9	100100
N=3057,24 ur5=2,58	10	100100
N=3053,05 ur5=2,45	11	100100
N=3049,23 ur5=2,38	12	100100
N=3041,09 ur5=2,41	13	100100
N=3039,05 ur5=2,47	14	100100
N=3036,67 ur5=2,55	15	100100
N=3042,22 ur5=2,56	16	100100
N=3045,65 ur5=2,53	17	100100
N=3044,09 ur5=2,52	18	100100
N=3054,75 ur5=2,37	19	100100
N=3055,29 ur5=2,22	20	100100
N=3058,59 ur5=2,04	21	100100
N=3063,56 ur5=1,8	22	100100
N=4171,83 ur5=1,73	23	100110
N=6619,91 ur5=2,04	24	110111
N=6607,55 ur5=2,4	1	110111
N=6623,58 ur5=2,81	2	110111
N=6626,79 ur5=3,23	3	110111
N=6603,2 ur5=3,65	4	110111
N=6614,03 ur5=4,04	5	110111
N=6617,94 ur5=4,33	6	110111
N=4202,29 ur5=4,27	7	100110
N=4217,81 ur5=4	8	100110
мощность за сутки=101602,89		
стоимость за сутки=129035,304801216		

Рисунок 4.3 – Оптимальный режим работы МВ по годинах за добу

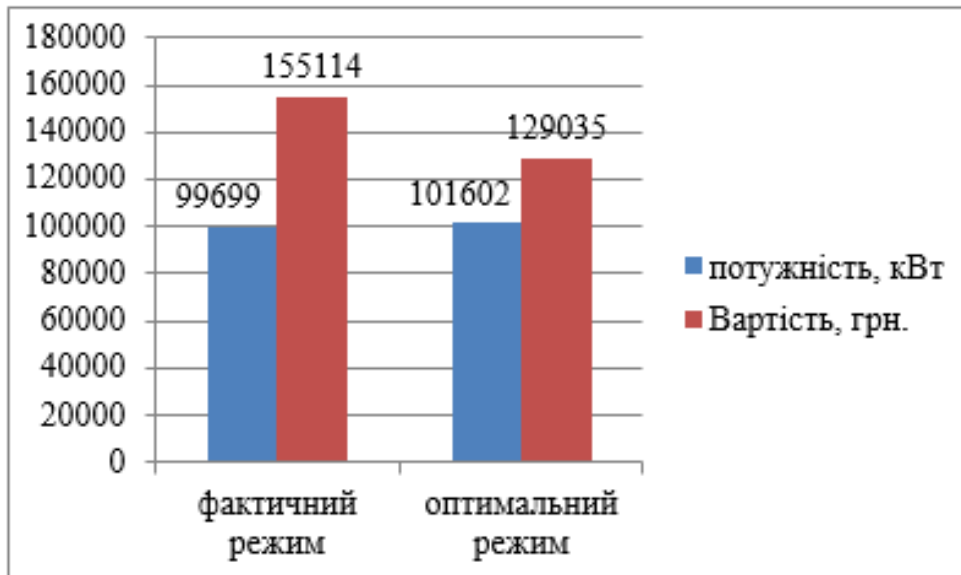


Рисунок 4.4 – Порівняльна діаграма

В результаті розв'язання задачі оптимального стохастичного керування вартість витрат на електроенергію зменшилась з 155 114 грн. до 129 035 грн., тобто на 16,8%.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Розглянуті в атестаційній роботі задачі можуть практично застосовуватись для розрахунку режимів роботи реальних магістральних водоводів. Програмне забезпечення дозволяє змоделювати режими роботи магістрального водоводу, змінювати вихідні данні та параметри технологічного обладнання магістральних водоводів.

МВ відноситься до класу штучних систем, цільовим призначенням яких є забезпечення усіх споживачів системи подачі і розподілу води (СПРВ) питною водою у необхідних об'ємах. СПРВ включає в себе ряд підсистем, основними з яких є: насосні станції (НС) другого та третього підйомів, резервуари чистої води (РЧВ), МВ, водопровідні розподільчі мережі.

Різке зростання тарифів на електроенергію і введення тризонного тарифу створили необхідні умови для переходу до енергозберігаючих технологій управління магістральних водоводом (МВ).

Результати атестаційної роботи можуть знайти застосування в комунальних підприємствах “Водоканал” у великих містах. Що дозволить оптимізувати роботу МВ, та знизити вартість витрат на електроенергію.

ВИСНОВКИ

В атестаційній роботі був проведений системний аналіз проблеми математичного моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу. У результаті чого був обран найбільш оптимальний з точки зору ефективності та трудомісткості метод математичного моделювання квазістаціонарних режимів роботи МВ.

Приведена математична модель задачі оптимального стохастичного керування режимами роботи магістрального водоводу, розв'язок якої дозволяє отримати мінімальне математичне сподівання вартості витрат на електроенергію при тризонному тарифі на інтервалі керування.

В результаті розв'язання задачі оптимального стохастичного керування вартість витрат на електроенергію зменшилась з 155 114 грн. до 129 035 грн. Був знайдений оптимальний режим роботи МВ який дозволяє заощадити 16,8% фінансових витрат на електроенергію.

Провели системний аналіз проблеми моделювання та оптимізації квазістаціонарних режимів роботи магістрального водоводу.

Програмно реалізували метод розв'язання задачі оптимального стохастичного керування режимами роботи магістрального водоводу для обраного магістрального водоводу.

Розв'язали задачу оптимального стохастичного керування режимами роботи магістрального водоводу для обраного магістрального водоводу.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Burgschweiger J., Gnadig B. B., Steinbach M. C. Nonlinear Programming Techniques for Operative Planning in Large Drinking Water Networks // The Open Applied Mathematics Journal. 2009. №3. P. 14–28.
2. Tevyashev A. D., Matviyenko O. I. About One Class of the Problems of Optimal Stochastic Control of Hybrid Dynamical Systems // Econtechmod. An International Quarterly Journal. 2016. V. 5, Iss. 3. P. 3–10.
3. Добровольська О. Г., Українець М. О. Практична реалізація методів з оптимізації потокорозподілу у водопровідних мережах // ТАРП. 2014. №4(20). С. 4–7.
4. Евдокимов А. Г., Тевяшев А. Д., Оперативное управление потоко распределением в инженерных сетях : уч. пос. Харьков : Высшая школа, 1980. 144 с.
5. Евдокимов А. Г., Дубровский В. В., Тевяшев А. Д. Потоко распределение в инженерных сетях : уч. пос. Москва : Стройиздат, 1979. 199 с.
6. Евсеева О. Н., Шамшев О. Н. Работа с базами данных на языке С#. Технология ADO.NET : уч. пос. Ульяновск : УлГТУ, 2009. 170 с.
7. Епифанов С. П., Новицкий Н. Н., Боровин Д. И. Развитие моделей и методов анализа чувствительности гидравлических сетей. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования : уч. пос. Новосибирск : Наука, 2015. С. 288–294.
8. Епифанов С. П., Зоркальцев В. И., Медвежонков Д. С. Симметричная двойственность в оптимизации и модели потокораспределения при ограничениях-неравенствах на переменные. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования : уч. пос. Новосибирск : Наука, 2015. С. 144–158.
9. Левин А. А., Таиров Э. А., Чистяков В. Ф. Расчёт потокораспределения в энергоустановках как гидравлических цепях с регулируемыми параметрами. Трубопроводные системы энергетики. Математическое моделирование и

оптимизация : уч. пос. Новосибирск : Наука, 2010. С. 115–124.

10. Сотников Д. В. Разработка методики повышения энергетической эффективности насосных станций // Вестник ВГТУ. 2014. №1. С. 105–106.

11. Тевяшев А. Д., Козыренко С. И. Применение линеаризованных моделей установившегося потокораспределения в задачах оперативного управления. Новые информационные технологии управления развитием и функционированием трубопроводных систем энергетики : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 1993. С. 20–33.

12. Тевяшев А. Д., Матвиенко О. И. Математическая модель и метод оптимального стохастического управления режимами работы магистрального водовода // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. № 6/4(78). С. 45–53.

13. Тевяшев А. Д., Козыренко С. И., Непочатова В. Д. Стохастическая модель квазистационарного потокораспределения в инженерных сетях // Восточно-Европейский журнал передовых технологий 2010. №11(45). С.57–60.

14. Шилдт Г. Полный справочник по С# М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. 752 с.

15. Юдовина Е. Ф., Пашенкова Е. С., Корелштейн Л. Б. Программный комплекс «Гидросистема» и его использование для гидравлических расчётов трубопроводных систем. Трубопроводные системы энергетики. Методические и прикладные проблемы математического моделирования : учеб. пос. Новосибирск : Наука, 2015. С. 438–446.

16. Тевяшев А. Д., Непочатова В. Д. Системный анализ проблемы повышения качества и эффективности функционирования систем водоснабжения и водоотведения // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2009. №7 (40). С. 29–35.

17. Хомко В. Є., Царинник О. Ю. Скорочення водоспоживання населенням – пріоритетний шлях до зменшення втрат води // зб. доповідей міжнародного конгресу "ЕТЕВК–2003" : Україна, Крим, м. Ялта. 2003 р. С. 98–102.

18. Шулик П. В. Стохастические модели и методы оперативного управления режимами работы насосных станций систем водоснабжения и водоотведения в реальном времени : учеб. пос. Харьков : ХНУРЭ, 2003. 268 с.