УДК 51-7

**В.В. Семенец[1], Ю.В. Наталуха[2], О.А. Тарануха[3], В.В. Токарев[4]**

[1,2]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[3]ХНМУ, г. Харьков, Украина

[4]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, tvv.v@mail.ru

# ЗРИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА ЧЕЛОВЕКА И МЕТОД НУЛЬ – ОРГАН

В статье рассматривается зрительная система человека. Предлагается использовать частный случай метода сравнения – метод нуль – орган, для которого применяется математический аппарат предикатов специального вида, а в качестве входных спектров световых излучений применяется функциональное пространство.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, СЕТЧАТКА, ПСИХОФИЗИКА, ЗРЕНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ПРЕДИКАТ, МЕТОДА СРАВНЕНИЯ, ЧЕРНЫЙ ЯЩИК, ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ СИГНАЛОВ

## Введение

Зрительная система человека является одной из самых совершенных систем, созданных эволюцией в процессе длительного филогенеза. Зрительное восприятие – сложный нейрофизиологический процесс, формирующийся под действием световых раздражителей на фоторецепторы сетчатки.

Спектральная чувствительность глаза совпадает с максимумом кривой распределения солнечного спектра.

Максимальная чувствительность глаза на свету наблюдается к более длинноволновым лучам (область зелёно-оранжевой части спектра), в сумерках – к более коротковолновым лучам (область сине-фиолетовой части спектра). В общем понимании по форме глаз напоминает неправильный шар из-за немного вытянутой передней части рис. 1.

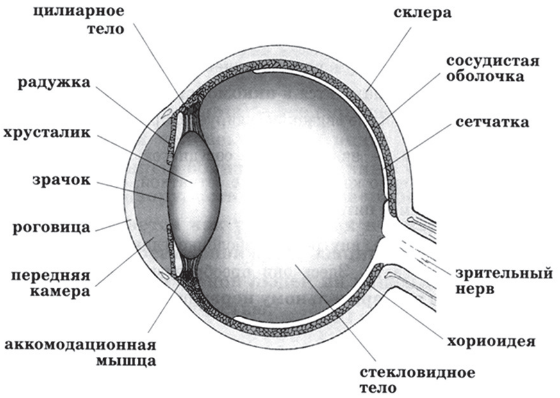


Рис. 1. Человеческий глаз

Внутри этого шара, непосредственно в радужке, имеется зрачок. Так как он является, по сути, отверстием, то кажется чёрным, ведь за ним находится тёмная внутренность глаза.

Радужная оболочка (радужка) имеет форму диска с отверстием (зрачком) в центре. У каждого человека радужка окрашена в определённый цвет: оттенки серого или коричневого. За радужкой расположен хрусталик. По форме это двояковыпуклая линза.

Хрусталик активно участвует в приспособлении глаза к внешним условиям. Наружную оболочку глаза составляют склера (белок) и роговица. Склера – обволакивает всё глазное яблоко и является своеобразным кожухом, выполняя функцию защиты и обеспечивая постоянство формы глаза. Шарообразная форма глазного яблока человека по функциональным возможностям напоминает камеру с полем зрения $160^0$ по ширине и $135^0$ по высоте. Как и любая оптическая система, глаз подвержен различным видам геометрических и хроматических аберраций.

Передняя выпуклая и прозрачная часть наружной оболочки называется роговицей, которая представляет собой объектив.

Между радужной оболочкой и роговицей находится «камерная жидкость», которая, как и хрусталик, является линзой. Задняя внутренняя поверхность глаза «выстлана» сетчаткой, которая образована из миллионов светочувствительных клеток. Сетчатка – это приёмник световых импульсов, благодаря её сложной работе мы видим тот или иной объект.

## 1. Как работает глаз человека

При ярких лучах радужка расширяется, а зрачок суживается. В темноте же всё происходит наоборот. Пройдя сквозь зрачок, лучи преломляются хрусталиком, форма хрусталика может меняться в зависимости от расстояния между предметом и человеческим глазом. Если предмет расположен близко к глазу, то хрусталик утолщается, а если далеко – то становится тоньше. Затем свет попадает на сетчатку, где светочувствительные клетки посредством сложных химических процессов преобразуют его в нервный импульс.

Этот импульс передаётся зрительным нервом в отдел мозга, отвечающего за зрение, где и обрабатывается, после чего воссоздаётся зрительный образ рассматриваемого предмета. Часть нервных волокон зрительного нерва улавливает красный, другая – зеленый и третья – синий свет. Мозг обрабатывает всю информацию, и в результате человек видит цвет.

Изначально восприятие многообразия цветовой гаммы окружающего мира осуществляется колбочками – клетками сетчатой оболочки глаза. В них заложены три типа цвето-воспринимающих элементов (светочувствительных пигментов), каждый из которых воспринимает только один из трех основных цветов – красный, зеленый или фиолетовый. Все остальные цвета и оттенки могут быть получены различными вариантами смешения этих цветов. В процессе цветоощущения это происходит благодаря тому, что видимая часть спектра светового излучения включает волны различной длины. Длинноволновые излучения (552-557 нм) воздействуют на красный цвето-воспринимающий элемент, средневолновые (530 нм) – на зеленый, коротковолновые (426 нм) – на фиолетовый, рис. 2.

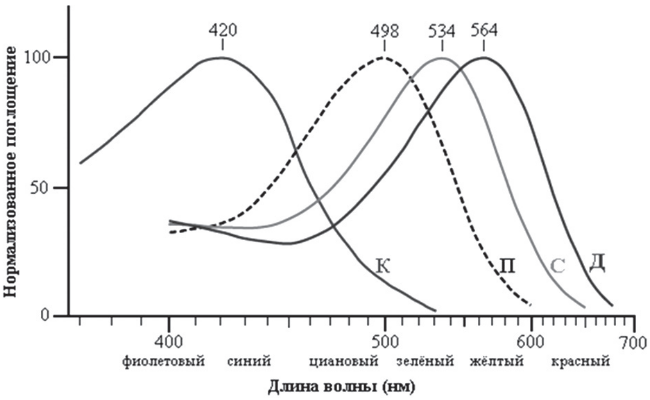


Рис. 2. Чувствительность трёх типов колбочек и палочек (штриховая линия) к излучению с разной длиной волны

В зависимости от интенсивности воздействия различаются оттенки чистых цветов: при длинноволновом – от пурпурного до оранжевого, при средневолновом — от изумрудного до желтого, при коротковолновом – от голубого до фиолетового.

Световой поток, содержащий излучения из волн различной длины, вызывает различное, неодинаковое по интенсивности возбуждение всех трех цветовоспринимающих элементов, благодаря чему в зрительных центрах коры головного мозга формируется полноценный цветовой образ. Кора головного мозга синтезирует эти возбуждения в единый результирующий цвет предмета по законам оптического смешения цветов, причем анализ и синтез цветоошущения происходит постоянно и одновременно. Цветоощущение – это функция колбочек сетчатки, папилломакулярного пучка зрительного нерва и корковых центров зрения головного мозга.

## 2. Актуальность

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам, связанным с изучением психофизических явлений, при этом объектом исследования служат: – ощущения человека; – физические процессы, действующие на наши органы чувств и вызывающие ощущения; – отношения, которые связывают ощущения с соответствующими им предметами внешнего мира.

Область науки, изучающая преобразования информации органами чувств, называется психофизикой. Психофизика имеет многочисленные практические и технические приложения.

На результаты ее исследований опирается кибернетика, системотехника, вычислительная техника, автоматика, светотехника, техника кино и телевидения и многие другие области практической деятельности человека. Математическое описание ощущений человека ставит перед исследователями задачу по разработке математического аппарата.

Классическая задача психофизики зрения заключается в изучении связи между световым излучением, т.е. зрительными картинами и характеристиками зрительных образов (насыщенность, цветовой тон и др.). Основным инструментом колориметрии – науки об измерении цвета – является метод сравнения цветов.

## 3. Постановка задачи исследований

Предлагается использовать частный случай метода сравнения – метод нуль – орган, для которого применяется математический аппарат предикатов специального вида, а в качестве входных спектров световых излучений используется функциональное пространство. Согласно этому методу, наблюдателю предъявляют на двух небольших полях, имеющих общую границу, рис. 3, световые излучения, характеризующиеся соответственно спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. Наблюдатель воспринимает эти излучения в виде двух соприкасающихся цветных пятен.

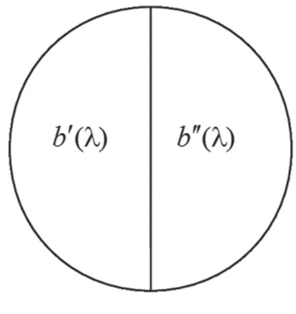


Рис. 3. Световые излучения, характеризующиеся соответственно спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ предъявляемые наблюдателю на двух небольших полях, имеющих общую границу

От него требуется дать ответ на вопрос, совпадают или не совпадают друг с другом цвета полей сравнения. Формирование ответа существенно облегчается тем, что в случае совпадения цветов граница между цветными пятнами исчезает. Таким образом, наблюдатель фактически принимает решение о совпадении или различии цветов с помощью очень тонкого индикатора – отсутствия или наличия видимой границы между полями сравнения.

О высокой чувствительности метода сравнения свидетельствует такой факт. Если подать на поля сравнения пару идентичных излучений $(b'(\lambda), b''(\lambda))$, то наблюдатель зарегистрирует равенство цветов. Однако если предъявить пару излучений $(b(\lambda), 1{,}01 \cdot b(\lambda))$, т.е. на правом поле энергетический уровень излучения повысить всего лишь на 1% без изменения спектрального состава света, то наблюдатель с нормальным зрением отчетливо зафиксирует различие цветов.

Установлено, что методом сравнения можно различить по цвету много миллионов световых излучений. На первый взгляд может показаться, что цвета взаимно однозначно связаны с порождающими их световыми излучениями, и поэтому наблюдатель регистрирующий равенство или неравенство цветов тем самым обнаруживает совпадение или различие соответствующих световых излучений.

Однако, существует множество (совершенно различных по спектру и по мощности световых излучений (их называют метамерными), которые для глаза совершенно неотличны по цвету). Отсюда следует, что различных цветов гораздо меньше, чем различных световых излучений. Орган зрения реагирует одним и тем же цветом на огромное число различных световых излучений. Таким образом, глаз, формируя цвет, тем самым группирует световые излучения в некоторые классы. Установлено, кроме того, что различные наблюдатели классифицируют световые излучения не совсем одинаково. Поэтому световые излучения, видимые одним наблюдателем как одноцветные, для другого наблюдателя будут, как правило, выглядеть неодинаковыми по цвету.

Из этих фактов следует, что каждый человек представляет собой особый объект для колориметрического обследования.

Более того, оказывается, что один и тот же наблюдатель в различные периоды своей жизни в колориметрических опытах может реагировать поразному. Это означает, что параметры зрительной системы человека с течением времени меняются, эволюционируют.

Несмотря на эти обстоятельства и на то, что в колориметрических опытах приходится иметь дело с субъективными ощущениями наблюдателя и с его субъективно формируемым решением о равенстве или неравенстве цветов, тем не менее эти опыты вполне объективны и вполне могут быть отнесены к разряду чисто объективных физических экспериментов.

Исход колориметрических опытов совершенно не зависит от желания наблюдателя. Хотя наблюдатель может произвольно выдумать свой ответ или же ошибаться в выработке правильного ответа (например при отвлечении внимания в процессе сравнения цветов), однако исследователь имеет все возможности обнаружить такие ответы и отвергнуть их, подобно тому, как в процессе обработки результатов физического эксперимента удается выявить и исключить промахи экспериментатора. Наблюдатель в колориметрическом опыте действует вполне машинообразно: повторное предъявление той же самой пары световых излучений приводит к тому же самому ответу (если, конечно, не растягивать проведение эксперимента на многие годы, когда сам наблюдатель станет иным).

Правда, в особых случаях, а именно когда цвета находятся на границе между равенством и неравенством, наблюдается элемент случайности в ответе. Но такой же элемент случайности появляется в любом физическом эксперименте в тех случаях, когда приходится работать на пределе возможностей измерительных приборов. В этих случаях точность исхода физических опытов обычно повышают за счет многократного повторения одних и тех же испытаний с последующей статистической обработкой результатов экспериментов. Такая же статистическая обработка ответов испытуемого возможна и в колориметрических опытах. Точность, достигаемая в колориметрических опытах, составляет 2–3 знака, а при глубокой статистической обработке может доходить до четырех знаков. Такая точность находится на уровне точности весьма совершенного физического эксперимента. Из всего сказанного вывод таков: в колориметрических опытах мы имеем тот, по существу поразительный, случай, когда субъективные ощущения человека и его субъективные действия, производимые им при сравнении цветов, успешно исследуются вполне объективными чисто физическими методами.

Иными словами, колориметрические опыты демонстрируют нам принципиальную возможность объективного изучения субъективных состояний человека, дают конкретный прецедент такого изучения. Это заключение очень ответственно, поскольку из него можно извлечь ряд далеко идущих выводов. В самом деле, если это так, то тогда нет непроходимой пропасти между объективным физическим миром и субъективным миром человека.

Значит, понятия, выражаемые словами "объективный" и "субъективный" логически не исключают друг друга, и второе поглощается первым. Это значит также, что субъективные состояния поддаются вполне объективному изучению чисто физическими методами. В связи со столь кардинальными выводами, тезис о возможности успешного объективного изучения некоторых субъективных состояний человека с помощью колориметрических опытов, на котором эти выводы основываются, должны быть подвергнуты тщательной проверке.

**Целью работы** является построение математической модели органа зрения человека на основе метода сравнения, который описывается с помощью предикатов, а так же выполнения свойств предикатов и численная реализация на персональном компьютере задач данным методом.

### 4. Материал и результаты исследований

В колориметрических опытах, действительно, изучается объективно регистрируемое поведение человека. В них наблюдатель выступает в роли некоего “черного ящика” с двумя входами и одним выходом рис. 4. На входы “черного ящика” поступают световые излучения, характеризуемые своими спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ .

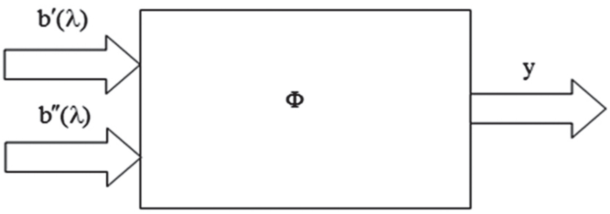


Рис. 4. Черный ящик

С математической точки зрения эти спектры представляют собой некоторые функции вещественного аргумента $\lambda$ , заданного на интервале $[\lambda_1,\lambda_2]$, с вещественными значениями $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ . На выходе “черного ящика” формируется двоичный сигнал $y \in \{0,1\}$. Его значение 1 будем интерпретировать как ответ наблюдателя “да”, означающий равенство цветов на полях сравнения, а значит 0 – как ответ “нет”, означающий неравенство цветов.

Таким образом, наблюдатель своим поведением реализует некоторый предикат:

$$y = \Phi(b'(\lambda), b''(\lambda)) , \tag{1}$$

и именно свойства этого предиката изучаются в колориметрических экспериментах. Как входные сигналы $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ , так и выходной сигнал $y$ могут быть зарегистрированы физическими приборами и поэтому дают вполне объективную информацию для установления вида предиката Ф.

Однако во всем этом еще нет места для субъективных состояний наблюдателя; пока ни слова не сказано о цветах зрительных ощущений и об операции сравнения цветов, осуществляемой сознанием наблюдателя.

Правда, основываясь на своем субъективном опыте, мы можем утверждать, что:

1) когда наблюдатель формирует сигнал $y=1$, то при этом цвета его ощущений в самом деле равны.

2) при этом наблюдатель действительно каким-то условием своего сознания сравнивает между собой цвета и приходит к заключению об их равенстве.

Тем не менее, в справедливости этих двух утверждений мы не можем удостовериться посредством объективных наблюдений. Как можно бороться с этим возражением? Оно утратило бы силу, если бы нам удалось, исходя только из объективно наблюдаемых свойств предиката Ф, каким-то образом доказать, что преобразователь сигналов, изображенный на рис. 4, можно представить в виде схемы, показанной на рис. 5.

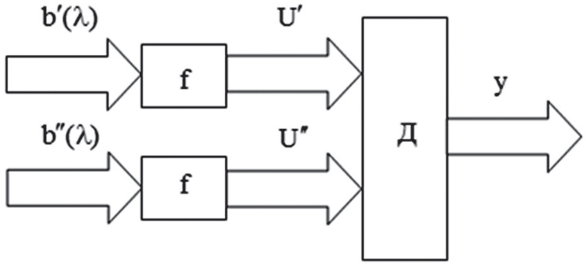


Рис. 5. Структурная схема органа зрения человека

Здесь сигналы:

$$U' = (U'_1, U'_2, U'_3) ,$$

и (2)

$$U'' = (U''_1, U''_2, U''_3) ,$$

трехмерные векторы с вещественными компонентами $U'_1, U'_2, U'_3$ и $U''_1, U''_2, U''_3$ , вычисляемые по формулам:

$$U'_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda ,$$

$$U'_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda , \tag{3}$$

$$U'_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda ,$$

и

$$U''_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_1(\lambda) d\lambda ,$$

$$U''_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_2(\lambda) d\lambda , \tag{4}$$

$$U''_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) K_3(\lambda) d\lambda ,$$

Формулы (4) и (5) математически описывают вид функции $U'_1 = f(b'(\lambda))$ и $U''_1 = f(b''(\lambda))$ . Буквой Д обозначен предикат равенства, определяемый следующим образом:

$$Д(U', U'') = \begin{Bmatrix} 1, \text{если } U' = U'' \\ 0, \text{если } U' \neq U'' \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

Только что описанное представление предиката Ф легко интерпретируется в психологических терминах. Сигналы $U'$ и $U''$ можно понимать как цвета полей сравнения, субъективно переживаемые наблюдателем. Функцию $f$ интерпретируем как преобразование светового излучения в цвет зрительного ощущения, производимое зрительной системой человека. Предикат Д будем интерпретировать как операцию сравнения цветов полей сравнения, осуществляемую сознанием наблюдателя. Если бы удалось доказать, что предикат (1) может быть представлен в виде соотношений (2) – (5), то это дало бы нам право утверждать, что:

1) сигналы $U'$ и $U''$ могут быть приняты в качестве математического описания цветов на полях сравнения;

2) функция $f$ может быть принята в качестве математического описания преобразования светового излучения, действующего на сетчатку глаза, в цвет зрительного ощущения, возникающего в сознании наблюдателя. В результате была бы полностью решена задача логического обоснования объективными методами математической модели цветового зрения (3) – (4), предложенной Максвеллом. Описанный подход, однако, тоже может быть подвергнут критике. Возражение состоит в том, что при этом подходе имеется в виду лишь доказательство возможности представления преобразования сигналов в зрительной системе в виде структурной схемы, изображенной на рис.5.

Надо же доказывать необходимость такой структуры. Согласно этой точки зрения следует доказывать, что зрительный анализатор действительно обладает анатомофизиологическими структурами, вычисляющими в процессе зрения значения интегралов (3) – (4), и что цвет зрительных ощущений на самом деле есть тройки числовых кодов, материально представленных в виде некоторого физико – химического процесса. На это возражение можно ответить следующим образом. Спору нет, было бы очень заманчиво получить не только функциональные, но и структурное описание зрительного анализатора. Однако получение математических зависимостей, описывающих лишь способ функционирования зрительной системы, это тоже немало.

В физике в большинстве случаев ограничиваются функциональным (феноменологическим) описанием процессов.

Небесная механика, ядерная физика и многие другие важные разделы физики идут почти исключительно по этому пути. Если же мы хотим ограничиться функциональной стороной дела, тогда с неизбежностью придется довольствоваться лишь возможными математическими моделями изучаемых процессов. Все возможные различающиеся между собой по структуре тождественные формулы, описывающие одну и ту же функцию, придется при этом считать равноценными. Ни одной из этих формул нельзя отдать предпочтение при функциональном подходе, сколь бы сильно они ни отличались друг от друга по своей структуре.

Выбор видов изучающих предикатов определяется практикой и целесообразно изучать преобразователи, наиболее часто встречающиеся в реальной жизни. Одним из таких преобразователей является линейное отображение $F: H \to R^n$, где $H$ – гильбертово пространство входных сигналов, а $R^n$ – $n$-мерное евклидово пространство. Реальные системы, как правило, в качестве входных сигналов имеют какие-либо функциональные зависимости и обладают свойствами линейности. При этом, чаще всего, сами входные сигналы образуют линейное пространство, а введение на нем скалярного произведения позволяет удобным образом описывать линейные функционалы.

В силу известной теоремы Рисса об общем виде линейного функционала каждый линейный непрерывный функционал $\alpha(x)$ на $L_2[\alpha,b]$ задается формулой:

$$\alpha(x) = \int_{\alpha}^{b} g(t)x(t)dt,\ g(t) \in L_2\ , \tag{6}$$

В дальнейшем будет использовано следующее утверждение.

**Лемма 1.** Линейные непрерывные функционалы $\alpha_i(x)(i = 1,...,k)$ вида (6) линейно независимы тогда и только тогда, когда соответствующие функции $g_i(x)$ линейно независимы.

Доказательство. Если $\alpha_1 g_1(x) + ... + \alpha_n g_n(x)$ – функция, равная нулю почти всюду на $L_2$, то в силу (6) $\alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0$. Наоборот, предположим, что $\alpha_1 f_1(x) + ... + \alpha_n f_n(x) = 0$. Тогда из (6) получаем $\int_{\alpha}^{b}(\alpha_1 g_1(t) + ... + \alpha_n g_n(t))\alpha(t)dt = 0$ для всех $x(t) \in L_2$. Но известно, что всякая функция $y(x) \in L_2$, ортогональная ко всем функциям из $L_2$, равна нулю почти всюду. **Лемма доказана.**

Используя полученные выше вспомогательные результаты, будем изучать теперь специальные предикаты $T(x,y)$. Введем предикат равенства:

$$Д(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } (x \neq y) \\ 1, \text{ если } (x = y) \end{cases},\ x,y \in L_2\ , \tag{7}$$

Пусть $A: L_2 \to H$ – непрерывный линейный оператор, отображающий $L_2$ на конечномерное линейное пространство $H$ над полем вещественных чисел. Основным результатом настоящей работы является аксиоматическая характеризация предикатов $T(x,y)$ вида:

$$T(x,y) = D(A(x),A(y))\ , \tag{8}$$

заданных на декартовом квадрате. Прежде всего заметим, что если предикат $T(x,y)$ представим в виде (8), то он предстанет также в виде:

$$T(x,y) = D(Px,Py)\ , \tag{9}$$

где $P$ – оператор проектирования $L_2$ на некоторое подпространство $H$ пространства $L_2$.

В самом деле, пусть $S_1$ – ядро отображения $A: S_1 = \{x \in L_2, A(x) = 0\}$. Так как $A$ – непрерывный оператор, то $S_1$ – замкнутое подпространство пространства $L_2$. По основной теореме гомоморфных линейных пространств фактор-пространство $L_2 | S_1$ изоморфно пространству $H$. В силу замкнутости $S_1$ имеет место ортогональное разложение:

$$L_2 = S_1 + S_2\,, \tag{10}$$

где, очевидно, $L_2 | S_1 \cong S_2 \cong H$. Ввиду (9) для любого элемента $x \in L_2$ имеет место одно значимое разложение $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in S_1, x_2 \in S_2$, причем $x_2 = P(x)$, где $P: L_2 \to S_2$ – оператор проектирования $L_2$ на $S_2$. Изоморфизм между пространствами $S_2$ и $H$ задается формулой $P(x) \leftrightarrow A(x)\,(x \in L_2)$ и поэтому:

$$T(x,y) = D(A(x),A(y)) = Д(P(x),P(y))\,, \tag{11}$$

что и требовалось доказать. Из (11) вытекает, что для всякого $x \in L_2$ $T(x,(P(x)) = 1$, причем если $T(x,y) = 1$ и $y \in S_2$, то $y = P(x)$.

Приступим теперь к аксиоматической характеризации предикатов вида (8). Так как отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно, то предикат $T(x,y)$ определяет отношение с такими свойствами: 1) $T(x,x)=1$; 2) если $T(x,y)=1$, то $T(y,x)=1$; 3) если $T(x,y)=1$ и $T(y,z)=1$, то $T(x,z)=1$. Остальные свойства предиката $T(x,y)$ должны учитывать линейность и непрерывность оператора $A$, а также конечномерность пространства $H = A(L_2)$.

**Теорема 1.** Предикат $T(x,y)$, заданный на $L_2 \times L_2$, тогда и только тогда представим в виде (8), когда $T(x,y)$ удовлетворяет аксиомам 1),2),3), а также следующим трем аксиомам: 4) если $T(x_1,y_1)=1$ и $T(x_2,y_2)=1$, то $T(x_1+x_2,y_1+y_2)=1$; 5) существует такая конечная система векторов: $l_1,...,l_n \in L_2$, что для каждого вектора $x \in L_2$ найдется единственный $n$-мерный вектор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, для которого $T(x_1\alpha_1 l_1+...+x_n\alpha_n l_n)=1$; 6) функционалы $\alpha_i(x)$ $(i=1,...,n)=1$ непрерывны на $L_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала необходимость условий теоремы. Пусть предикат $T(x,y)$ задается формулой (8). Тогда, очевидно, выполняются свойства 1),2),3).

Если $T(x_1,y_1)=1$, $T(x_2,y_2)=1$, то в силу (8):

$$A(x_1) = A(y_1)\,,\ A(x_2) = A(y_2)\,,$$

а тогда $A(x_1)+A(x_2) = A(y_1)+A(y_2)$

или $A(x_1+x_2) = A(y_1+y_2)$,

т.е. $T(x_1+x_2,y_1+y_2) = Д(A(x_1+x_2),A(y_1+y_2)) = 1$.

Это доказывает свойство 4). Представим предикат $T(x,y)$ в виде (11) $T(x,y)=Д(Px,Py)$, где $P: L_2 \to H$ – оператор проектирования $L_2$ на некоторое конечномерное подпространство $H \subset L_2$.

Пусть $l_1,...,l_n$ – базис подпространства $H$ и $P(x) = (\alpha_1(x)l_1+...+\alpha_n(x)l_n)$.

Тогда $T(x,\alpha_1(x)l_1+...+\alpha_n(x)l_n)=1$, из $T(x,j_1l_1+...+j_nl_n)=1$ следует, что $j_1=\alpha_1,..,j_n=\alpha_n$ и, кроме того, $\alpha_1(x),..,\alpha_n(x)$ – непрерывные функционалы на $L_2$, то оператор проектирования $L_2 \to H$ непрерывен. Тем самым установлены свойства 5), 6) предиката $T(x,y)$ и доказана необходимость условий теоремы. Докажем их достаточность. Пусть $T(x,y)$ на $L_2 \times L_2$ удовлетворяет свойствам 1) ÷ 6). Тогда векторы $l_1,...,l_n$ – линейно независимы. Действительно, если для $(j_1,...,j_k) \neq (0,...,0)\, j_1 1_1+...+j_n 1_n = 0$, то, в силу 1), $T(0,0)=1$, $T(0,j_1l_1+...+\alpha_n l_n)=1$, а это равенство противоречит аксиоме 5). Обозначим через $H$ подпространство пространства $L_2$, натянутое на векторы $l_1,...,l_n$ и положим, в силу 5), $А(x) = \alpha_1(x)l_1+...+\alpha_n(x)l_n$. Имеем:

$$T(x,A(x))=1\,, \tag{12}$$

Тогда $A$ – линейный оператор из $L_2$ на $H$, так как из $T(x,A(x))=1$, $T(y,A(y))=1$ на основании 4) получаем $T(x+y,A(x)+A(y))=1$, что ввиду (12) дает $A(x+y) = A(x)+A(y)$. Из непрерывности функционалов $\alpha_i(x)$ $(i=1,...,n)$ следует непрерывность оператора $A$. Из равенств $T(x,y)=1$, $T(x,A(x))=1, T(y,A(y))=1$, в силу 1) ÷ 3), вытекает формула:

$$T(x,y) = T(A(x),A(y))\,, \tag{13}$$

Далее:

$$T(A(x),A(y)) = Д(A(x),A(y))\,, \tag{14}$$

В самом деле, $T(\alpha_1l_1+...+\alpha_nl_n, j_1l_1+...+j_nl_n)=1$, где $(\alpha_1,...,\alpha_n) \neq (j_1,...,j_n)$.

Сравнение этого равенства с равенством $T(\alpha_1l_1+...+\alpha_nl_n,\alpha_1l_1+...+\alpha_nl_n)=1$ протеворечит аксиоме 5). Равенство (14) завершает доказательство достаточности условий теоремы 1.

Замечание. Равенство (14) можно записать в виде:

$$T(x,y) = Д(U(x),U(y))\,, \tag{15}$$

где $U(x) = (\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))$. По теореме Рисса функционалы $\alpha_i(x)$ задаются равенствами:

$$\alpha_i(x) = \int_\alpha^b g_i(t)x(t)dt,\ (i=1,...,n)\,, \tag{16}$$

причем по лемме 1 линейная независимость функционалов $\alpha_1(x),...,\alpha_n(x)$ равносильны линейной независимости функций $g_1(x),...,g_n(x) \in L_2$ (т.е. соответствующих классов функций). Поэтому теорема 1 допускает следующую эквивалентную формулировку.

**Теорема 1.** Предикат $T(x,y)$ на $L_2 \times L_2$ тогда и только тогда представим в виде (15),(16) с линейно независимыми функционалами $g_1(x),...,g_n(x)$, когда он удовлетворяет свойствам 1) ÷ 6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если свойства 1) ÷ 6) выполняются, то, как только что было показано, имеют место равенства (15), (16) с линейно независимыми $g_1(x),...,g_n(x) \in L_2$. Обратно, если имеют место равенства (15),(16) с линейно независимыми $g_1(x),...,g_n(x) \in L_2$, то отображение

$A(x)=(\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))$ есть линейный непрерывный оператор из $L_2$ на $n$- мерное векторное пространство $H=\{(\alpha_1(x),...,\alpha_n(x))\}$, причем $T(x,y)= \quad (A(x),A(y))$. Тогда в силу теоремы 1 выполняются аксиомы 1) $\div$ 6). Теорема доказана.

**Выводы**

1) Получена математическая модель органа зрения, которая группирует световые излучения в некоторые классы.

2) Для увелечения точности при решении таких задач используется метод сравнения цветов.

3) Приведена аксиоматическая характеризация предиката $T(x,y)$.

4) Доказана теорема, что предикат $T(x,y)$, на $L_2 \times L_2$, тогда и только тогда представим в виде $T(x,y)= \quad (U(x),U(y))$ где $U(x)=(\alpha_1(x)....,\alpha_n(x))$, когда он удовлетворяет шести свойствам.

**Список литературы: 1.** *Вит В.В.* Строение зрительной системы человека / В.В. Вит. – М.: Астропринт, 2003. – 664 с. **2.** *Токарев В.В.* Метод сравнения на примере нуль – органа в нелинейных системах / В.В. Токарев, Ю.В. Наталуха // Материалы международной научно-технической конференции [«Автоматизация: проблемы, идеи, решения»], (Севастополь, 9–13 сентября 2013 года). – СевНТУ, 2013. – С. 157–159. **3.** *Токарев В.В.* Математическая модель метода сравнения в динамических системах / В.А.Афанасьев, Ю.В. Наталуха, В.В. Токарев, Ю.Е. Хорошайло // Материалы международной научно-технической конференции [«Искусственный интеллект интеллектуальные системы ИИ-2013»], (пос. Кацивели АР Крым, 23–27 сентября 2013года). – Донецк.: «Наука і освіта», 2013. – С. 9–11. **4.** *Токарев В.В.* Об одном подходе к идентификации динамических систем / Ю.В. Наталуха, М.А. Ильин, В.В. Токарев // Сборник научных статей по итогам Третьей Международной научно-практической конференции (в трех томах) [«Информатика, математическое моделирование, Экономика, Том 2»], (г. Смоленск, 22 апреля 2013 г). – Смоленск, 2013. – С. 103–109. **5.** *Ахиезер Н.И.* Теория линейнных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, Н.М. Глазман – М.: Наука, 1966. – 543 с. **6.** *Курош А.Г.* Теория групп. / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1967. – 648 с. **7.** *Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах / Б.Н. Паленичный, Ю.М. Данилин. – М.: Наука, 1975. – 3205 с. **8.** *Рисс Ф.,* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М: Мир, 1979. – 587 с. **9.** *Хаусхолдер А.С.* Основы численного анализа / А.С. Хаусхолдер. – М.: Издательство иностранной литературы, 1956. – 320 с.

***Поступила в редколлегию 01.07.2014***

УДК 51.7

**Зорова система людини та метод нуль – орган** / В.В. Семенець, Ю.В. Наталуха, О.А. Тарануха, В.В. Токарев // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2014. – № 2 (83). – С. 46–52.

У роботі для математичного опису перетворення світлового випромінювання, що діє на сітківку ока, в цветозрітельного відчуття, що виникає у свідомості спостерігача, пропонується використовувати функціональний простір і спеціальні предикати.

Бібліогр.: 9 найм.

UDC 51.7

**Human visual system and method of zero – body** / V.V. Semenets, Yu.V. Nataluha, O.A. Taranuha, V.V. Tokarev // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2014. – № 2 (83). – P. 46–52.

In this paper, for the mathematical description of the conversion of light radiation acting on the retina, in tsvetozritelnogo sensations arising in the mind of the observer, it is proposed to use a functional space and special predicates.

Ref.: 9 items.