

УДК 517.927.4: 517.988.8

МЕТОД ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ОДНОВИМІРНОЇ МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

Кончаковська О.С.

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ
м. Харків, Україна

тел. +38(093) 253-05-86, email: oksana.konchakovska@nure.ua

The paper considers the numerical analysis of an electrostatic microelectromechanical system under the influence of external pressure. The first boundary value problem for a nonlinear one-dimensional elliptic equation represents the mathematical model of this process. To solve this problem, we have constructed an algorithm that obtains two-sided approximations to the unique positive solution of the problem using the method of successive approximations. The method of successive approximations is used to solve nonlinear equations by iteratively computing a sequence of approximations until a desired level of accuracy is achieved. To demonstrate the effectiveness of our proposed method, we conducted a series of computational experiments.

Розглянемо математичну модель одновимірної електростатичної МЕМС під дією зовнішнього тиску [1]:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\lambda f(x)}{(1-u)^2} + P(x), \quad x \in (-l, l), \quad (1)$$

$$u(x) > 0, \quad x \in (-l, l), \quad (2)$$

$$u(-l) = 0, \quad u(l) = 0, \quad (3)$$

де u – величина прогину, $f(x)$ – функція, що описує діелектричні властивості, $0 \leq f(x) \leq 1$, $P(x)$ – зовнішній тиск, $P(x) \geq 0$, λ – параметр, що характеризує сили Кулона.

Задача (1) – (3) еквівалентна нелінійному операторному рівнянню $u = Tu$, де

$$Tu(x) = \int_{-l}^l G(x,s) \left[\frac{\lambda f(s)}{(1-u(s))^2} + P(s) \right] ds, \quad (4)$$

$G(x,s)$ – функція Гріна оператора $-\frac{d^2u}{dx^2}$ за крайових умов (3).

Розглянемо банахів простір $C[-l, l]$ неперервних на відрізку $[-l, l]$ функцій, де $\|u\| = \max_{x \in [-l, l]} |u(x)|$. Визначимо конус невід’ємних функцій $\mathcal{K}_+ = \{u \in C[-l, l] : u(x) \geq 0, x \in [-l, l]\}$ і введемо напівупорядкованість у $C[-l, l]$ за правилом: $u \leq v$, якщо $u(x) \leq v(x)$ для всіх $x \in [-l, l]$. Оператор T вигляду (4) є ізотонним.

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (4).

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(x) = T v^{(k)}(x), \quad w^{(k+1)}(x) = T w^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$v^{(0)}(x) = 0, \quad w^{(0)}(x) = \beta. \quad (6)$$

Нерівність $v^{(0)} \leq v^{(1)}$ завжди виконується, а $w^{(1)} \leq w^{(0)}$ виконуватиметься, якщо $\beta \in (0, 1)$ задовольняє нерівність $\lambda M_f \leq (\beta - M_p)(1 - \beta)^2$, де

$$M_f = \max_{x \in [-l, l]} \int_{-l}^l G(x, s) f(s) ds, \quad M_p = \max_{x \in [-l, l]} \int_{-l}^l G(x, s) P(s) ds.$$

Тоді з огляду на ізотонність оператора T ітераційний процес (5), (6) двобічно [2, 3] збігається до єдиного додатного розв'язку задачі (1) – (3):

$$0 = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \beta.$$

Для обчислювального експерименту обрано функції для опису діелектричних властивостей та впливу зовнішнього тиску у вигляді $f(x) = |2x|^\alpha$

та $P(x) = \text{const}$ відповідно. Тоді $M_f = \frac{2^\alpha l^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$, $M_p = \frac{l^2 P}{2}$. Двобічний

характер збіжності послідовних наближень проілюстровано рис. 1, де представлені графіки верхніх (суцільна лінія) та нижніх (пунктирна лінія) наближень до розв'язку задачі ($\alpha = 3$, $l = 1$, $P = 1$).

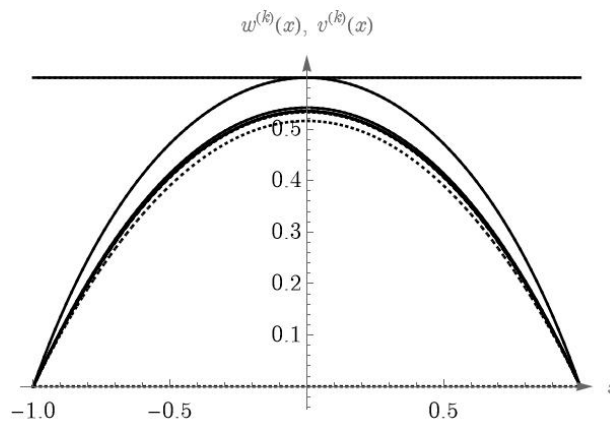


Рисунок 1 – Графіки верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі

Список використаних джерел:

1. Beckham, J. R., & Pelesko, J. A. (2011). An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure. *Mathematical and computer modelling*, 54 (11–12), 2686–2708.

2. Красносельский, М. А. (1962). *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа*. Физматгиз.

3. Опойцев, В. И., & Хуродзе, Т. А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Изд-во Тбилис. ун-та.