

И.В. Кокшенев, В.В. Колодяжный, И.П. Плисс

АЛГОРИТМЫ ОБУЧЕНИЯ ГИБРИДНЫХ НЕО- И НЕЙРО-ФАЗЗИ СИСТЕМ

1. Введение

Гибридные нейро-фаззи системы находят все более широкое применение благодаря уникальному сочетанию таких свойств как интерпретируемость и способность к обучению. Но, к сожалению, существует масса реальных задач, адекватно решаемых нейро-фаззи системами лишь в лабораторных условиях. Причиной этого чаще всего являются высокие требования алгоритмов к вычислительным ресурсам. В связи с этим, в данной работе будет уделено внимание архитектурам и алгоритмам обучения, способным функционировать в режиме последовательного поступления наблюдений.

В работах [1–3] был предложен так называемый нео-фаззи нейрон, являющийся расширением обучаемого формального нейрона и содержащий вместо линейных синаптических весов нелинейные синапсы NS_i , $i = 1, 2, \dots, n$, реализующие нечеткие правила вида

$$\text{IF } x_i \text{ IS } X_{ji} \text{ THEN } f_i(x_i) = \sum_{j=1}^{h_i} \mu_{ji}(x_i) w_{ji},$$

где x_{ji} — лингвистическое значение на i -м входе в antecedенте j -го правила, $\mu_{ji}(x_i)$ — j -тая функция принадлежности i -го входного сигнала, w_{ji} — синглетон в консеквенте j -го правила (настраиваемого синаптического веса), h_i — количество функций принадлежности в i -м нелинейном синапсе NS_i .

При подаче на вход нео-фаззи нейрона векторного сигнала $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$ (здесь $k = 1, 2, \dots$ — текущее дискретное время) на его выходе появляется скалярный сигнал

$$y(k) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i(k)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{h_i} \mu_{ji}(x_i(k)) w_{ji}(k), \quad (1)$$

определяемый как значениями функций принадлежности $\mu_{ji}(x_i(k))$, так и настраиваемыми синаптическими весами $w_{ji}(k)$.

На рис. 1 приведена схема нео-фаззи нейрона для случая $n = h_1 = h_2 = h_3 = 3$, при этом авторами конструкции в качестве функций принадлежности предложено использовать треугольные формулы

$$\mu_{ji}(x_i(k)) = \begin{cases} 1 - d_{ji}^{-1} |c_{ji} - x_i(k)|, & \text{если } |c_{ji} - x_i(k)| \leq d_{ji}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

где c_{ji} , d_{ji} — параметры центра и ширины функции принадлежности μ_{ji} соответственно. Вводя индикатор

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } |c_{ji} - x_i(k)| \leq d_{ji}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

можно переписать (2) в виде

$$\mu_{ji}(x_i(k)) = (1 - d_{ji}^{-1} |c_{ji} - x_i(k)|) \delta_{ji},$$

при этом предполагается, что выполняется условие нормализации

$$\sum_{j=1}^{h_i} \mu_{ji}(x_i(k)) = 1. \quad (3)$$

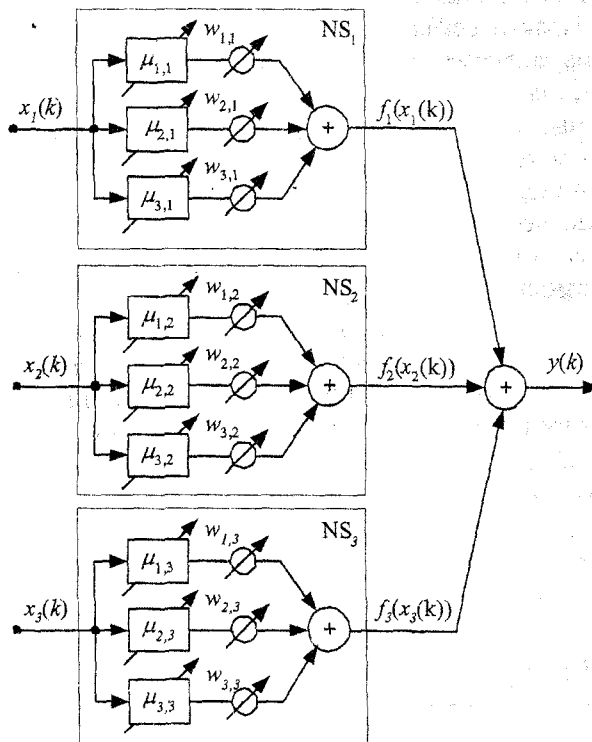


Рис. 1. Схема нео-фаззи нейрона ($n = h_1 = h_2 = h_3 = 3$)

Поскольку условие (3) накладывает достаточно жесткие ограничения на значения параметров функций принадлежности, нелинейный синапс NS_i может быть модифицирован к виду, приведенному на рис. 2, при этом условие нормализации выполняется автоматически, а выходной сигнал нео-фаззи нейрона имеет вид

$$y(k) = \sum_{i=1}^n w_i^T(k) \cdot \frac{\mu_i(x_i(k))}{E_i^T \mu_i(x_i(k))},$$

где

$$\mu_i(x_i(k)) = (\mu_{1i}(x_i(k)), \mu_{2i}(x_i(k)), \dots, \mu_{h_i i}(x_i(k)))^T,$$

$$w_i(k) = (w_{1i}(k), w_{2i}(k), \dots, w_{h_i i}(k))^T, \quad E_i = (1, 1, \dots, 1)^T$$

— $(h_2 \times 1)$ -векторы.

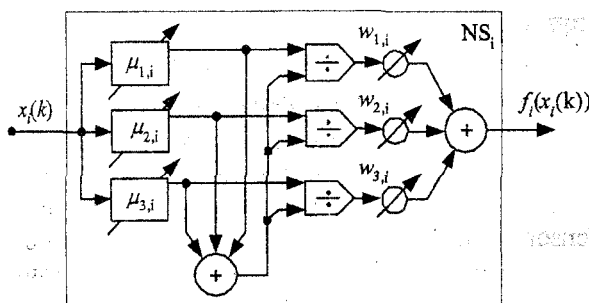


Рис. 2. Модифицированный нечеткий синапс

Для обучения нео-фаззи нейрона было предложено использовать градиентную процедуру минимизации критерия

$$E(k) = \frac{1}{2}(d(k) - y(k))^2 = \frac{1}{2}e^2(k) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(d(k) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{h_i} \mu_{ji}(x_i(k)) w_{ji} \right)^2 \quad (4)$$

(здесь $d(k)$ — внешний обучающий сигнал), имеющую вид $w_{ji}(k+1) = w_{ji}(k) + \eta e(k) \mu_{ji}(x_i(k))$, где η — скалярный параметр, определяющий скорость настройки и выбираемый из эмпирических соображений.

В работе [4] была предложена конструкция многовыходового нео-фаззи нейрона и соответствующий алгоритм обучения, а в [5] путем минимизации квадрата апостериорной ошибки обучения синтезирован градиентный оптимальный по быстродействию алгоритм вида

$$w(k+1) = w(k) + \frac{e(k)\mu(x(k))}{\|\mu(x(k))\|^2} = w(k) + e(k) \left(\mu^T(x(k)) \right)^+$$

и его модификация, обладающая сглаживающими свойствами

$$\begin{cases} w(k+1) = w(k) + \alpha^{-1}(k) \cdot e(k) \cdot \mu(x(k)), \\ \alpha(k+1) = \alpha\alpha(k) + \|\mu(x(k))\|^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases}$$

где $\mu(x(k)) = (\mu_1^T(x_1(k)), \mu_2^T(x_2(k)), \dots, \mu_n^T(x_n(k)))^T$, $w(k) = (w_1^T(k), w_2^T(k), \dots, w_n^T(k))^T$ — $(h \times 1)$ -векторы,

$h = \sum_{i=1}^n h_i$, $(\cdot)^+$ — символ псевдообращения, α — параметр сглаживания. Заметим также, что с учетом

введенных обозначений уравнение нео-фаззи нейрона (1) может быть переписано в простом виде:

$$y(k) = w^T(k) \mu(x(k)).$$

2. Нео-фаззи нейрон с настраиваемыми функциями принадлежности

Функциональные возможности нео-фаззи нейрона могут быть существенно расширены, если настраивать не только его синаптические веса w_{ji} , но и параметры центров c_{ji} и ширины d_{ji} , при этом применение градиентной процедуры к критерию (4) ведет к системе рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} w_{ji}(k+1) = w_{ji}(k) - \eta^w(k) \frac{\partial E(k)}{\partial w_{ji}}, \\ c_{ji}(k+1) = c_{ji}(k) - \eta^c(k) \frac{\partial E(k)}{\partial c_{ji}}, \\ d_{ji}^{-1}(k+1) = d_{ji}^{-1}(k) - \eta^d(k) \frac{\partial E(k)}{\partial d_{ji}}, \end{cases} \quad (5)$$

или

$$\begin{cases} w_{ji}(k+1) = w_{ji}(k) - \eta^w(k) e(k) \mu_{ji}(x_i(k)), \\ c_{ji}(k+1) = c_{ji}(k) - \eta^c(k) e(k) d_{ji}^{-1}(k) \cdot \\ \quad \cdot \text{sign}(c_{ji}(k) - x_i(k)) w_{ji}(k) \delta_{ji}, \\ d_{ji}^{-1}(k+1) = d_{ji}^{-1}(k) - \eta^d(k) e(k) \cdot \\ \quad \cdot |c_{ji}(k) - x_i(k)| w_{ji}(k) \delta_{ji}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\eta^w(k)$, $\eta^c(k)$, $\eta^d(k)$, — параметры шага обучения по соответствующим переменным.

Вводя в рассмотрение векторы

$$c_i(k) = (c_{1i}(k), c_{2i}(k), \dots, c_{h_i i}(k))^T,$$

$$d_i^{-1}(k) = (d_{1i}^{-1}(k), d_{2i}^{-1}(k), \dots, d_{h_i i}^{-1}(k))^T,$$

$$\delta_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{h_i i})^T, \quad E_i = (1, 1, \dots, 1)^T$$

размерности $(h_i \times 1)$ и

$$c(k) = (c_1^T(k), c_2^T(k), \dots, c_n^T(k))^T,$$

$$d^{-1}(k) = (d_1^{-T}(k), d_2^{-T}(k), \dots, d_n^{-T}(k))^T,$$

$$X(k) = (x_1(k)E_1^T, x_2(k)E_2^T, \dots, x_n(k)E_n^T)^T,$$

$$\delta = (\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_n^T)^T$$

размерности $(h \times 1)$, можно переписать алгоритм обучения (6) в векторной форме:

$$\begin{cases} w(k+1) = w(k) - \eta^w(k)e(k)\mu(x(k)), \\ c(k+1) = c(k) - \eta^c(k)e(k)w(k) \odot d^-(k) \odot \\ \quad \odot \text{sign}(c(k) - X(k)) \odot \delta, \\ d^-(k+1) = d^-(k) - \eta^d(k)e(k)w(k) \odot \\ \quad \odot |c(k) - X(k)| \odot \delta, \end{cases} \quad (7)$$

где \odot — символ скоттова произведения.

Скорость обучения может быть существенно увеличена путем использования вместо градиентной процедуры (5–7) алгоритма Левенберга-Марквардта, который путем введения вспомогательных $(h \times 1)$ -векторов $\mu^c(x(k)) = w(k) \odot d^-(k) \odot \text{sign}(c(k) - x(k)) \odot \delta$, $\mu^d(x(k)) = w(k) \odot |c(k) - X(k)| \odot \delta$ может для данной ситуации быть записан в виде:

$$\begin{cases} w(k+1) = w(k) - e(k) \cdot \\ \quad \cdot (\mu(x(k))\mu^T(x(k)) + \alpha^w I)^{-1} \mu(x(k)), \\ c(k+1) = c(k) - e(k) \cdot \\ \quad \cdot (\mu^c(x(k))\mu^{cT}(x(k)) + \alpha^c I)^{-1} \mu^c(x(k)), \\ d^-(k+1) = d^-(k) - e(k) \cdot \\ \quad \cdot (\mu^d(x(k))\mu^{dT}(x(k)) + \alpha^d I)^{-1} \mu^d(x(k)), \end{cases} \quad (8)$$

где $\alpha^w, \alpha^c, \alpha^d$ — неотрицательные регуляризирующие параметры, $I - (h \times h)$ — единичная матрица.

Применив к (8) формулу Шермана-Моррисона и проделав очевидные преобразования [6], можно переписать алгоритм обучения нео-фаззи нейрон в виде:

$$\begin{cases} w(k+1) = w(k) + \frac{e(k)\mu(x(k))}{\alpha^w + \|\mu(x(k))\|^2} = \\ = w(k) + \frac{e(k)\mu(x(k))}{\alpha^w(k)}, \\ c(k+1) = c(k) - \frac{e(k)\mu^c(x(k))}{\alpha^c + \|\mu^c(x(k))\|^2} = \\ = c(k) - \frac{e(k)\mu^c(x(k))}{\alpha^c(k)}, \\ d^-(k+1) = d^-(k) - \frac{e(k)\mu^d(x(k))}{\alpha^d + \|\mu^d(x(k))\|^2} = \\ = d^-(k) - \frac{e(k)\mu^d(x(k))}{\alpha^d(k)}, \end{cases} \quad (9)$$

в котором с целью придания процессу обучения дополнительных сглаживающих свойств переменные $\alpha^w(k), \alpha^c(k), \alpha^d(k)$ могут вычисляться согласно соотношениям

$$\begin{cases} \alpha^w(k+1) = \alpha\alpha^w(k) + \|\mu(x(k+1))\|^2, \\ \alpha^c(k+1) = \alpha\alpha^c(k) + \|\mu^c(x(k+1))\|^2, \\ \alpha^d(k+1) = \alpha\alpha^d(k) + \|\mu^d(x(k+1))\|^2, \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

3. Радиально-базисная нейронная сеть с настраиваемыми функциями активации

В случае, если аппроксимирующие свойства нео-фаззи нейрона не обеспечивают требуемого качества решения задачи, используя технику «Tensor Product Construction» [7] и введенные алгоритмы обучения (9), (10), можно построить радиально-базисную нейронную сеть, в которой радиально-базисные многомерные функции активации формируются одномерными функциями принадлежности. Схема такой нейронной сети для случая $n = h_1 = h_2 = h_3 = 3$ приведена на рис 3.

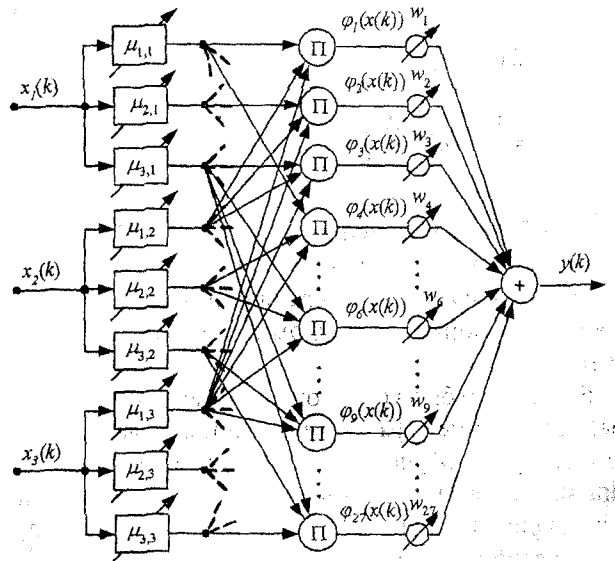


Рис. 3. Радиально-базисная нейронная сеть с настраиваемыми функциями активации

Естественно, что количество настраиваемых синаптических весов в подобной архитектуре много больше, чем у нео-фаззи нейрона и равно $h = \prod_{i=1}^n h_i$. Однако число параметров центров (и шин соответственно) здесь составляет всего $\sum_{i=1}^n h_i$, что упрощает процесс обучения по сравнению с обычной радиально-базисной нейронной сетью [8].

Выходной сигнал этой сети вычисляется согласно выражению

$$y(k) = \sum_{i=1}^h w_i(k)\varphi_i(x(k)),$$

где

$$\varphi_l(x(k)) = \mu_{j_1 l}(x_1(k)) \mu_{j_2 l}(x_2(k)) \dots \mu_{j_n l}(x_n(k)) = \prod_{i=1}^n \mu_{j_i l}(x_i(k)),$$

$l=1, 2, \dots, h$, $j_i=1, 2, \dots, h_i$, а в качестве критерия может использоваться квадратичная форма (4), принимающая в данном случае вид

$$E(k) = \frac{1}{2} e^2(k) = \frac{1}{2} \left(d(k) - \sum_{l=1}^h w_l \varphi_l(x(k)) \right)^2 = \frac{1}{2} \left(d(k) - \sum_{l=1}^h w_l \prod_{i=1}^n \mu_{j_i l}(x_i(k)) \right)^2.$$

Вводя в рассмотрение производные по настраиваемым параметрам

$$\begin{cases} \frac{\partial E(k)}{\partial w_l} = -e(k) \varphi_l(k), \\ \frac{\partial E(k)}{\partial c_{j_i l}} = e(k) \sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) d_{j_i l}^{-1} \text{sign}(c_{j_i l} - x_i(k)) \delta_{j_i l}, \\ \frac{\partial E(k)}{\partial d_{j_i l}^{-1}} = e(k) \sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) |c_{j_i l} - x_i(k)| \delta_{j_i l}, \end{cases}$$

(здесь $\mu_{p_i l}(x_i(k)) = (1 - d_{j_i l}^{-1} |c_{j_i l} - x_i(k)|) \delta_{j_i l}$; $j_i=1, 2, 3, \dots, h_i$; $p_j \neq j_i$), несложно записать градиентную процедуру типа (6) в виде:

$$\begin{cases} w_l(k+1) = w_l(k) + \eta^w(k) e(k) \varphi_l(k), \\ c_{j_i l}(k+1) = c_{j_i l}(k) - \eta^c(k) e(k) \sum_{l=1}^h w_l(k) \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) d_{j_i l}^{-1}(k) \text{sign}(c_{j_i l} - x_i(k)) \delta_{j_i l}, \\ d_{j_i l}^{-1}(k+1) = d_{j_i l}^{-1}(k) - \eta^d(k) e(k) \sum_{l=1}^h w_l(k) \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) |c_{j_i l} - x_i(k)| \delta_{j_i l}. \end{cases} \quad (11)$$

Вводя в рассмотрение $(h \times 1)$ -векторы: $c(k)$, содержащий все параметры центров $c_{j_i l}(k)$, $d^-(k)$, содержащий все параметры ширины $d_{j_i l}^{-1}(k)$; а также $-\varphi^c(x(k))$ с компонентами

$$\sum_{l=1}^h w_l(k) \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) d_{j_i l}^{-1}(k) \text{sign}(c_{j_i l} - x_i(k)) \delta_{j_i l};$$

и $-\varphi^d(x(k))$ с компонентами

$$\sum_{l=1}^h w_l(k) \left(\prod_{i=1}^n \mu_{p_i l}(x_i(k)) \right) |c_{j_i l} - x_i(k)| \delta_{j_i l}$$

для всех возможных сочетаний $j_i=1, 2, \dots, h_i$, $i=1, 2, \dots, n$, а также $(h \times 1)$ -вектор $w(k)$, образованный всеми синаптическими весами сети, можно переписать соотношение (11) в векторной форме, полностью совпадающей с выражениями (9), (10).

Несмотря на простоту такой архитектуры, следует помнить, что все радиально-базисные сети подвержены «проклятию размерности» и, как следствие, резкой потере скорости обучения. В связи с этим при больших размерностях входного пространства целесообразно использование иных архитектур, содержащих меньшее число настраиваемых параметров.

4. Нейро-фаззи сеть с настраиваемыми функциями принадлежности

Резкое сокращение количества настраиваемых параметров может быть достигнуто путем применения нейро-фаззи сети Ванга-Менделя [9,10], схема которой без выходного слоя нормализации для случая $n=h_1=h_2=h_3=3$ приведена на рис. 4.

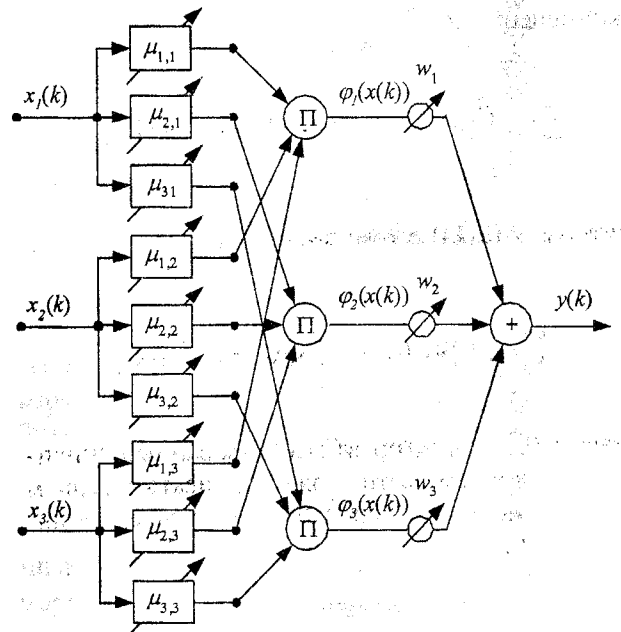


Рис. 4. Нейро-фаззи сеть с настраиваемыми функциями принадлежности

Данная сеть осуществляет отображение

$$y(k) = \sum_{l=1}^h w_l(k) \varphi_l(x(k)),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_l(x(k)) &= \mu_{1l}(x_1(k)) \mu_{2l}(x_2(k)) \dots \mu_{nl}(x_n(k)) = \\ &= \prod_{i=1}^n \mu_{i l}(x_i(k)), \quad l=1, 2, \dots, h_l. \end{aligned}$$

Принимая в качестве критерия обучения квадратичную форму

5. Заключение

Предложена унифицированная форма алгоритма обучения нео-фаззи нейрона, радиально-базисной и нейро-фаззи сетей, позволяющая настраивать в реальном времени не только синаптические веса, но и параметры функции принадлежности (активации). Алгоритм прост в численной реализации, обладает высокой скоростью сходимости и дополнительными сглаживающими свойствами.

Список литературы: 1. *Yamakawa T., Uchino E., Miki T., Kusanagi H.* A neo fuzzy neuron and its applications to system identification of the system behavior // Proc. 20th Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks "IIZUKA-92", Iizuka, Japan, 1992. P. 477-483. 2. *Uchino E., Yamakawa T.* Soft computing based signal prediction, restoration, and filtering / Ed. Da Ruan "Intelligent Hybrid Systems: Fuzzy Logic, Neural Networks, and Genetic Algorithms". Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 331-349. 3. *Miki T., Yamakawa T.* Analog implementation of neo-fuzzy neuron and its on board learning / Ed. N.E Mastorakis "Computational Intelligence and Applications". Piraeus: WSES Press, 1999. P. 144-149. 4. *Landim R.P., Rodrigues B., Silva S.R., Matos W.* Neo-fuzzy neuron with real time training applied to flux observer for an induction motor // Proc. V-th Brasiliam Symp. On Neural Networks. Belo Horizonte, Brasil. Los Alanitos, CA: IEEE Computer Society, 1998. P. 67-72. 5. *Bodyanskiy Ye., Kokshenev I., Kolodyazhny V.* An adaptive learning for a neo fuzzy neuron // Proc. Third Conf. European Soc. Fuzzy Logic and Technology "EUSFLAT 2003" Zittau, 2003. P. 375-379. 6. *Bodyanskiy Ye., Kolodyazhny V., Stepani A.* An adaptive learning algorithm for a neuro fuzzy network / Ed. B. Reusch "Computational Intelligence. Theory and Applications". Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2001. P. 68-75. 7. *Nelles O.* Nonlinear Systems Identification. Berlin: Springer, 2001. 785 p. 8. *Haykin S.* Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1999. 842 p. 9. *Wang L.* Adaptive Fuzzy Systems and Control. Design and Stability Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1994. 10. *Verbruggen H.B., Babuska R.* Constructing fuzzy models by product space clustering / Eds. H. Hellendorn, D. Dryakhnov "Fuzzy Model Identification". Berlin: Springer, 1998. P. 53-90.

Поступила в редакцию 14.04.2005

$$E(k) = \frac{1}{2} e^2(k) = \frac{1}{2} \left(d(k) - \sum_{l=1}^h w_l \prod_{i=1}^n \mu_{li}(x_i(k)) \right)^2 = \frac{1}{2} \left(d(k) - \sum_{l=1}^h w_l \mu_{l1}(x_1(k)) \mu_{l2}(x_2(k)) \cdots \mu_{ln}(x_n(k)) \right)^2,$$

вводя производные

$$\begin{cases} \frac{\partial E(k)}{\partial w_l} = -e(k) \varphi_l(k), \\ \frac{\partial E(k)}{\partial c_{li}} = e(k) \sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p \neq i}}^n \mu_{pi}(x_i(k)) \right) d_{li}^{-1} \text{sign}(c_{li} - x_i(k)) \delta_{li}, \\ \frac{\partial E(k)}{\partial d_{li}^{-1}} = e(k) \sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p \neq i}}^n \mu_{pi}(x_i(k)) \right) |c_{li} - x_i(k)| \delta_{li}, \end{cases}$$

векторы размерности $(h \times 1)$: $c(k)$; $d^-(k)$; $\varphi^c(x(k))$ с компонентами

$$\sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p \neq i}}^n \mu_{pi}(x_i(k)) \right) d_{li}^{-1} \text{sign}(c_{li} - x_i(k)) \delta_{li};$$

векторы $\varphi^d(x(k))$ с компонентами

$$\sum_{l=1}^h w_l \left(\prod_{\substack{i=1 \\ p \neq i}}^n \mu_{pi}(x_i(k)) \right) |c_{li}(k) - x_i(k)| \delta_{li},$$

а также $(h \times 1)$ -вектор $w(k)$, образованный синаптическими весами сети, можно записать алгоритм обучения полностью совпадающий с выражениями (9), (10).