

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)

Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

другий (магістерський)
(рівень вищої освіти)

_____ (позначення документа)

Взаємодія трубчатого електронного пучка з поверхневими хвилями
плазмового циліндра

_____ (тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ЕПМ 18-1

Глуценко О.С.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 171 Електроніка

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма «Електронні прилади та
пристрої»

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Прокопенко Ю.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____
(підпис)

Бондаренко І.М.
(прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Електронної та біомедичної інженерії
(повна назва)Кафедра Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв
(повна назва)Рівень вищої освіти другий (магістерський)Спеціальність 171 «Електроніка»
(код і повна назва)Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)Освітня програма «Електронні пристрої та системи»
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____
(підпис)

« _____ » _____ 20 ____ р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУстудентові Глушенку Олексію Сергійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)1. Тема роботи «Взаємодія трубчатого електронного пучка з поверхневими хвилями плазмового циліндра»затверджена наказом по університету від 04 11 2019 р. № 1635Ст2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії грудня 2019 р.3. Вихідні дані до роботи: радіус хвилеводу = 0,5 см, концентрація електронів пучка = $7,6 \cdot 10^{10}$ см⁻³, товщини стінки пучка = 0,05 см, швидкість електронів пучка = 0,3c; швидкість спрямованого руху електронів пучка $v_0 = 0,1 c$, період нелінійних осциляцій $s = 3$, резонансна довжина хвилі $\lambda = 2$ см, моменти часу $\tau = 2550$ і $\tau = 5000$ _____4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі: аналіз літературних джерел, процеси взаємодії електронного пучка з плазмоподібним середовищем, знаходження інкрементів нестійкості, огляд спектрів власних хвиль, властивості плазмового циліндра, аналіз отриманих результатів.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів) титульний аркуш, мета дослідження, актуальність теми, залежності повільних амплітуд електричного і магнітного полів хвилі від безрозмірного часу, залежність повільних амплітуд електричного і магнітного полів хвилі від безрозмірного часу, залежність різниці фаз компонент електричного поля, залежності амплітуди потенційної хвилі від безрозмірного часу для трьох значень радіуса плазмового циліндра, фазові портрети систем з макрочасток в різні моменти часу, висновок.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Інформаційно-тематичний пошук та огляд літературних джерел	04.11.19 – 8.11.19	Виконано
2	Дослідження	9.11.19-15.11.19	Виконано
3	Виконання чисельних розрахунків характеристик	13.11.19 – 17.11.19	Виконано
4	Аналіз розрахунків та параметрів	18.11.19 – 6.12.19	Виконано
5	Оформлення пояснювальної записки	7.12.19 – 19.12.19	Виконано
6	Оформлення графічних та демонстраційних матеріалів	7.12.19 – 19.12.19	Виконано
7	Проходження нормоконтролю і отримання ...	20.12.19 – 22.12.19	Виконано
8	Підготовка та захист атестаційної роботи	23.12.19	Виконано

Дата видачі завдання 04 листопада 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Прокопенко Ю.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка містить 73 сторінок, 14 рисунків, 1 таблицю, 50 джерел, 2 додатки. Графічна частина містить 8 слайдів.

ЕЛЕКТРОННИЙ ПУЧОК, ПУЧКОВА НЕСТІЙКІСТЬ, ІНКРЕМЕНТ НЕСТІЙКОСТІ, ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА, ЕФЕКТ ДОПЛЕРА

Об'єкт дослідження — процеси взаємодії трубчатого електронного пучка з власними хвилями діелектричних або твердотільних плазмових структур циліндричної конфігурації.

Мета роботи — дослідження нелінійної стабілізації зростання амплітуди електромагнітних хвиль, що генеруються внаслідок взаємодії трубчатого електронного пучка з різними електродинамічними системами.

Методи дослідження базуються на розв'язку крайових задач на основі рівнянь Максвелла, рівнянь руху електронів пучка та плазми і нелінійному аналізі електродинамічних систем методом повільно-змінюючихся амплітуд і фаз у часі.

Освоєно методи побудови лінійної та нелінійної теорій нестійкості трубчастого електронного пучка, що обдуває твердотільний діелектричний або плазмовий циліндр.

Проаналізовано механізм нелінійної стабілізації азимутально-симетричних об'ємно-поверхневих електромагнітних хвиль Е-типу в системі з діелектричним хвилеводом. Фізичною причиною збудження таких хвиль є резонанс Вавилова–Черенкова, а в основу механізму нелінійної стабілізації є ефект захвату електронів полем збуджувальної хвилі.

Відмічено, що нелінійна стабілізація виникаючої резистивної нестійкості в системі з твердотільним плазмовим хвилеводом відбувається за рахунок ефекту самозахоплення електронів пучковою хвилею.

ABSTRACT

Explanatory note contains 73 pages, 14 figures, 1 table, 50 sources, 2 annexes. Graphical part includes 8 slides.

Electron beam, the beam instability increment instability EFFECT Vavilov-Cherenkov radiation, Doppler effect

The object of study - the process of interaction tubular electron beam with its own waves or solid dielectric structures cylindrical plasma configuration.

Purpose - to study nonlinear stabilization of growth amplitude electromagnetic waves generated by the interaction of tubular electron beam with different electrodynamic systems.

Methods based on solving boundary value problems based on Maxwell's equations, the equations of motion of electron beam and plasma and electrodynamics of nonlinear analysis method of slow-zminyuyuchyhsya amplitudes and phases in time.

Mastered methods of linear and nonlinear theories instability of the electron beam tube that blows a solid state dielectric or plasma cylinder.

The analysis of nonlinear stabilization mechanism azimuthal-symmetric body-surface electromagnetic waves E-type system with dielectric waveguide. Physical causes excitation of such waves is the Vavilov-Cerenkov resonance, and nonlinear foundation stabilization mechanism is the effect of electron capture field excitation wave.

It is noted that the stabilization of emerging non-linear resistive instability in the system of solid state plasma waveguide is due to the effect of squatting electron beam wave.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	8
ВСТУП.....	9
РОЗДІЛ 1 ВЗАЄМОДІЯ ПОТОКІВ ЕЛЕКТРОНІВ З ПЛАЗМОЮ.....	17
1.1 Електродинамічна система плазма–пучок електронів	17
1.2 Взаємодія прямолінійного електронного пучка з плазмою. Черенковська нестійкість	19
1.3 Взаємодія обертового електронного пучка з плазмою. Циклотронна нестійкість (ефект Доплера).....	27
1.4 Висновки до розділу	35
РОЗДІЛ 2. ВЗАЄМОДІЯ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК З ЦИЛІНДРИЧНИМ ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ХВИЛЕВОДОМ.....	36
2.1 Постановка задачі та основні рівняння	36
2.2 Аналіз системи нелінійних рівнянь	46
2.3 Висновки до розділу	53
РОЗДІЛ 3. НЕЛІНІЙНА СТАБІЛІЗАЦІЯ РЕЗИСТИВНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ТРУБЧАТОГО ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ЯКИЙ ОБДУВАЄ ТВЕРДОТІЛЬНИЙ ПЛАЗМОВИЙ ЦИЛІНДР.....	55
3.1 Постановка завдання і основні рівняння.....	55
3.2 Чисельний аналіз системи нелінійних рівнянь.....	62
3.3 Висновки до розділу.....	6
	6
ВИСНОВКИ.....	68

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ	70
ДОДАТОК А Відомість атестаційної роботи.....	74
ДОДАТОК Б Презентація.....	75

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ККД – коефіцієнт корисної дії

ЛБХ – лампа біжної хвилі

ХПЗ – хвилі просторового заряду

ВСТУП

В останнє десятиліття велика увага приділяється питанням створення генераторів випромінювання в міліметровому і субміліметровому діапазонах довжин хвиль. Це пов'язано з активним застосуванням такого випромінювання в біології [1], медицині [2], для передачі субміліметрових сигналів в земній атмосфері [3], для здійснення широкосмугового бездротового зв'язку [4], субміліметрової спектроскопії [5] та інших додатках науки і техніки.

Однак використання традиційних підходів до проектування і побудови відповідних електронно-вакуумних пристроїв зазнає значних труднощів, обумовлені малими геометричними розмірами основних елементів таких пристроїв, що генерують і стабілізуючих електромагнітне випромінювання. Одним з найбільш перспективних варіантів розв'язання проблеми є використання над розмірних (по відношенню до довжини хвилі) електродинамічних структур, що працюють в багатомодовому режимі. У зв'язку з цим особлива увага приділяється циліндричним системам, в яких здійснюється взаємодія електронів трубчастого потоку [6, 7] або багатоструменевого потоку кругового перетину [8-12] з обдувається ними твердо тільним циліндром.

Слід зазначити, що в роботах [6-12] електронний пучок взаємодіє зі стрижнем, виготовленим з немагнітного діелектричного середовища. Нестійкість, що виникала при цьому мала конвективний характер. У той же час, в роботах [13-15] в лінійному наближенні було показано, що наявність частотної дисперсії діелектричної та магнітної проникності середовища, з якої виготовлений циліндр, робить можливим виникнення абсолютної нестійкості. Саме, в роботі [13] в електростатичному наближенні розглянуто взаємодію нерелятивістського трубчастого електронного пучка з твердотільним циліндром, що виготовлено зі штучного середовища, діелектрична проникність якої залежить від частоти і може

ставати негативною в деякій області частот. Встановлено, що саме в цій області частот може виникати абсолютна нестійкість власних поверхневих мод циліндра. В роботі [14] з урахуванням ефекту запізнювання розглянуто взаємодію нерелятивістського трубчастого електронного пучка з твердо тільним циліндром, виготовленим зі штучної середовища, у якій частотної дисперсією мають як діелектрична, так і магнітна проникність. Показано, що в області частот, де обидві проникності стають негативними, власний спектр циліндра допускає існування об'ємно-поверхневих хвиль E-типу з негативною груповою швидкістю. Відзначимо, що в роботі [14] під об'ємно-поверхневими розумілися такі хвилі, у яких залежно від амплітуд полів від радіальної координати мають осцилюючий характер в області циліндра і монотонно спадною в області вакууму (при віддаленні від циліндра в напрямку зовнішньої нормалі до поверхні).

Взаємодія електронного пучка з такими хвилями уможливорює виникнення абсолютної нестійкості. В роботі [15] з урахуванням ефекту запізнювання було розглянуто взаємодію трубчастого електронного пучка з анізотропним дисперегуючим твердо тільним циліндром. Середовище циліндра передбачалося немагнітним, а тензор діелектричної проникності анізотропним, негіротропним. Спектр коливань такого циліндра, як було показано в роботі [16], допускає існування об'ємно-поверхневих хвиль E-типу з негативною груповою швидкістю. При цьому стає можливим виникнення абсолютної нестійкості. З робіт [13-15] випливає, зокрема, що використання розглянутих в них штучних середовищ для виготовлення твердо тільних циліндрів, робить можливим їх застосування для створення генераторів електромагнітного випромінювання в міліметровому і субміліметровому діапазонах довжин хвиль, що володіють «природним» зворотним зв'язком.

Для можливості практичної реалізації ефектів пучкової нестійкості важливо вивчити поведінку досліджуваної електродинамічної системи на нелінійній стадії нестійкості. Теоретичні методи опису встановлення нелінійної стадії пучкової нестійкості були розвинені в роботах по вивченню взаємодії пучків з плазмовими

середовищами. До числа перших таких робіт можна віднести роботи [17-31], в яких в якості основного ефекту, що приводить до стабілізації нестійкості, розглядався ефект захоплення електронів пучка плазмовою хвилею. У них розглядалися модульовані і не модульований релятивістські пучки, які взаємодіють з плазмою, яка передбачалася холодною та без зіткнень або слабо зіткневою. Особливо відзначимо роботи [27-30], в яких за допомогою методу повільно-змінюючихся амплітуд і фаз була побудована нелінійна теорія нестійкості розмитого і моноенергетичного електронного пучка в необмеженій (об'ємній) плазмі як під час відсутності, так і при наявності зіткнень.

У роботах [32-37] побудована нелінійна теорія нестійкості прямолінійних релятивістських електронних пучків в просторово-обмеженій плазмі. Зокрема, в роботах [32-34] розглянута загальна теорія різних механізмів вимушеного випромінювання релятивістських електронних пучків: черенковського, циклотронного, однуляторного в умовах ефекту Вавилова–Черенкова і аномального ефекту Доплера. В роботі [36] розглянуто випадок тонких в поперечному перерізі пучка та плазми, повністю намагнічених і знаходячи в металевому хвилеводі. При цьому розглянуто випадок щільної плазми, коли збуджується пучком нестійку плазмову хвилю можна вважати потенційною. Встановлено, зокрема, що нелінійні процеси, обумовлені релятивізмом пучка, перешкоджають хаотизації системи на розвиненою нелінійної стадії нестійкості. Навпаки, в разі нерелятивістського пучка спостерігається його значна аномальна нелінійна хаотизація.

Слід зазначити теоретичну роботу [38], в якій частково побудована самоузгоджена нелінійна теорія збудження електромагнітного випромінювання в електродинамічній системі, що складається з металевого циліндричного хвилеводу з поміщенням в нього діелектричним циліндром, уздовж якого поширюється азимутально-періодичний потужнострумний релятивістський електронний пучок. Чисельно визначені частоти порушених пучком азимутально-несиметричних хвиль з великими значеннями азимутальних модових індексів,

побудовані часова залежність енергії порушуваних хвиль і фазові портрети електронних згустків пучка в різні моменти часу розвитку нестійкості.

У даній атестаційній роботі теоретично вивчено ефект нелінійної стабілізації нестійкості нескінченно тонкого в радіальному напрямку трубчастого електронного пучка при його русі вздовж поверхні твердотілого діелектричного циліндра. На відміну від роботи [38], електродинамічна система, що розглядається, — відкрита, а збуджувальні пучком хвилі — азимутально-симетричні. Крім цього, на відміну від роботи [38], побудовані і проаналізовані часові залежності повільно-змінюючихся амплітуд і фаз компонент електричного і магнітного полів збуджуванних хвиль з різними значеннями радіальних модових індексів, а також розглянуто питання про поляризацію хвиль.

Пошук механізмів генерації електромагнітних хвиль при русі заряджених частинок в різних електродинамічних системах є актуальна задача сучасної радіофізики і електроніки. При цьому розвиваються нестійкості, в тому числі електростатичного походження, які представляють собою фізичну основу генерації різного роду коливань. Встановлення стаціонарного режиму відбувається в результаті нелінійних механізмів взаємодії заряджених частинок з власними коливаннями електродинамічних систем. Зауважимо, що до теперішнього часу ефекти нелінійної стабілізації пучкових нестійкостей розглядалися лише для випадків плазми без зіткнення і зі слабким зіткненням.

Перші роботи з дослідження нелінійних хвиль в плазмі без уваги теплових ефектів були виконані А.І. Ахиезером, Г.Я. Любарським і Р.В. Половіним майже 50 років тому [39–41]. Зокрема, ними було показано, що відсутність залежності частоти нелінійних коливань від амплітуди зберігається лише в нерелятивістському випадку. В роботі [41] показано, що в релятивістському випадку період хвилі великої інтенсивності зростає з ростом амплітуди. До числа перших робіт по нелінійній теорії пучково-плазмових нестійкостей, в яких розглядалася стабілізація цих нестійкостей за рахунок захоплення електронів пучка плазмовою хвилею, можна віднести роботи [17–31]. У них розглядалися

модульовані і не модульований релятивістські пучки, які взаємодіють з плазмою, яка передбачалася холодною та без зіткнення, або зі слабим зіткненням. Густина електронів пучка вважалася багато меншою густини електронів плазми. Було показано, що ефективність пучково-плазмової взаємодії збільшується з ростом релятивістського фактора, незважаючи на зменшення лінійного інкремента.

Нагадаємо результати деяких з перерахованих робіт, аналітичний підхід яких був використаний в цьому дослідженні. У роботах [27, 28] була побудована нелінійна теорія нестійкості розмитого і моноенергетичного електронного пучка в необмеженій (об'ємній) плазмі. Так, в роботі [27] для розмитого електронного пучка, в якому нестійкість є кінетичною, за допомогою методу повільної зміни (в порівнянні з періодами хвиль) амплітуд була отримана система рівнянь, що описує часову еволюцію амплітуди хвилі, а також координат і швидкостей електронів пучка. Було показано, що істотно нелінійним є тільки рух резонансних частинок пучка зі швидкостями, близькими до фазової швидкості хвилі. Особливістю нелінійної стадії нестійкості в разі розмитого пучка є загасання осциляції амплітуди внаслідок ефекту фазового «розмішування» частинок пучка, що захоплені полем хвилі. Ця особливість вперше була відзначена в роботах [19, 20] і в подальшому задавалася ретельним дослідженням, наприклад, в роботах [30, 33, 34]. У разі моноенергетичного пучка, як було показано в [27, 28], істотним є урахування зміни з часом не тільки амплітуди, але і фази поля збуджувальної хвилі. Крім того, в роботі [28] були досліджені нелінійні стадії нестійкості попередньо промодульованих нерелятивістського і релятивістського моноенергетичних пучків в плазмі. Зокрема, було показано, що в релятивістському випадку максимум енергії поля збуджувальної хвилі є порівняним з енергією пучка.

Нелінійна стабілізація пучкової нестійкості нерелятивістського моноенергетичного пучка в щільній безмежній плазмі зі зіткненнями була розглянута в роботах [29, 30]. Також, як і в [27, 28], пучок моделювався дискретним ансамблем макрочастинок — заряджених площин. Було показано, що

зіткнення в плазмі призводять до того, що частинки пучка до моменту захоплення не встигають зібратися в згусток і мають помітний розкид як за швидкостями, так і за координатами. Тому захоплення частинок хвилею не приводить до регулярних коливань амплітуди хвилі, як, наприклад, в разі, розглянутому в [28].

В роботі [31] була розглянута нелінійна стабілізація нестійкості трубчастого електронного пучка кінцевої товщини, що обдуває плазмовий циліндр в зовнішньому поздовжньому магнітному полі. Передбачалося, що система плазма–пучок знаходиться в металевому хвилеводі, а плазма є холодною і без зіткнень. Була розглянута нелінійна стабілізація аксіально-симетричної електромагнітної поверхневої ТМ-хвилі. В роботі [35] досліджено збудження поверхневих електромагнітних хвиль на циліндричній поверхні провідних середовищ (метал, сильно іонізована плазма) обдувається циліндр релятивістським електронним пучком. З умови нелінійного захоплення електронів пучка полем поверхневої хвилі оцінена максимальна амплітуда збуджувальної хвилі.

Нелінійна теорія нестійкості прямолінійного релятивістського електронного пучка в просторово-обмеженій плазмі, що розвивається в умовах ефекту Вавилова–Черенкова, наведена в роботах [34–37]. Зокрема, розглянуто випадок щільної плазми, коли збуджувальна пучком нестійка плазмова хвиля є потенційною [36]. Встановлено, що нелінійні процеси, що обумовлені релятивізмом пучка, перешкоджають хаотизації системи на розвиненні нелінійної стадії нестійкості. Навпаки, в разі не релятивістського пучка спостерігається його значна аномальна нелінійна хаотизація.

В останнє десятиліття особлива увага приділяється циліндричним системам, в яких здійснюється взаємодія електронів трубчастого потоку [24, 25], або багатоструменевого потоку кругового перетину [8–12] з твердотільним циліндром, що обдувається ними. В роботі [11] частково побудована самоузгоджена нелінійна теорія збудження електромагнітного випромінювання азимутально-періодичним потужнострумівих релятивістським електронним пучком при взаємодії з радіально-двошаровим циліндровим діелектричним резонатором (ЦДР).

Нелінійний аналіз збудження ЦДР електронним пучком показав, що основним механізмом генерації електромагнітних коливань в резонаторі автоколивальної системи [8, 10, 12] є монотронний механізм, коли заряджені частинки пучка, пролітаючи через резонатор, групуються в такій фазі електромагнітного поля збуджувальних хвиль, що в середньому віддають енергію власним коливанням резонатора. Можливість застосування дослідженої автоколивальної системи з прийнятними геометричними параметрами в субміліметровому діапазоні довжин хвиль відзначена в [8, 11]. Крім того, особливий інтерес представляють пучкові нестійкості, які виникають в електродинамічних системах, що містять дисперегуюче середовище. Зокрема, в роботі [13] в лінійному наближенні досліджено нестійкість трубчастого електронного пучка при його взаємодії з плазмоподібним середовищем, а в роботі [14] — з лівостороннім дисперегуючим середовищем циліндричної конфігурації. Взаємодія нерелятивістського трубчастого потоку заряджених частинок з немагнітним анізотропним дисперегуючим твердотільним циліндром розглянуто в роботі [15]. Виявлено можливість виникнення абсолютної нестійкості об'ємно-поверхневих хвиль, що обумовлена особливостями властивостей анізотропного циліндра. Резонансний характер частотних залежностей діелектричної проникності циліндра сприяє появі ділянок дисперсійних кривих власних об'ємно-поверхневих хвиль E-типу з негативною груповою швидкістю.

Дискусійні аспекти теорії не потенційних поверхневих хвиль на межі дисипативного матеріального середовища з частотною дисперсією розглянуті в роботі [42]. Показано, що в разі достатньо сильної дисипації енергії збурень в середовищі можуть виникати поверхневі хвилі, закон дисперсії яких кардинально відрізняється від загальновідомого. Їх інкремент має мале значення навіть при великій дисипації в середовищі, а групова і фазова швидкості таких хвиль перевершують швидкість світла в середовищі.

Особливе місце займають роботи, присвячені вивченню пучкової нестійкості в твердотільній плазмі з сильними зіткненнями, коли частота зіткнень носіїв

заряду набагато перевищує частоту електромагнітної (електростатичної) хвилі. Так, в роботі [43] був описаний ефект так званої резистивної нестійкості, що виникає внаслідок поглинання діелектричним середовищем, в якому транспортується електронний потік. Збудження плазмових хвиль в міліметровому і субміліметровому діапазонах довжин хвиль потоком заряджених частинок в напівпровідниковій плазмі досліджувалося в [44, 45].

Атестаційна робота присвячена виявленню стабілізації зростання амплітуди електростатичної хвилі пучка за рахунок самозахоплення електронів пучка її полем.

Об'єкт дослідження — процеси взаємодії трубчатого електронного пучка з власними хвилями діелектричних або твердотільних плазмових структур циліндричної конфігурації.

Мета роботи — дослідження нелінійної стабілізації зростання амплітуди електромагнітних хвиль, що генеруються внаслідок взаємодії трубчатого електронного пучка з різними електродинамічними системами.

Методи дослідження базуються на розв'язку крайових задач на основі рівнянь Максвелла, рівнянь руху електронів пучка та плазми і нелінійному аналізі електродинамічних систем методом повільно-змінюючихся амплітуд і фаз у часі.

Результати досліджень розширюють наші уявлення про фізичні властивості систем з плазмовими середовищами і систематизують знання про механізми збудження потенційних поверхневих хвиль в електродинамічних системах, які можуть бути використані в мікрохвильових генераторах.

1 ВЗАЄМОДІЯ ПОТОКІВ ЕЛЕКТРОНІВ З ПЛАЗМОЮ

1.1. Електродинамічна система плазма–пучок електронів

Розглянемо плазму, в яку інjektується електронний пучок з малою густиною в порівнянні з плазмою. Будемо вважати, що пучок електронів рухається у зовнішньому магнітному полі. Більш того, допустимо, що у власній системі координат вони мають максвелівський розподіл. Це дозволяє при обчисленні діелектричної проникності плазми в цілому скористатися загальними формулами перетворення, в яких тензор $\epsilon^{(\alpha)}_{ij}(\omega'_\alpha, k'_\alpha)$ визначається виразом для частки сорту α .

Аналіз стійкості плазма-пучкових систем почнемо з випадку прямолінійного моноенергетичного електронного пучка, що взаємодіє з холодною плазмою. Очевидно, що такий пучок може рухатися лише чітко уздовж магнітного поля. Модель плазма-пучкової системи може бути застосована для опису швидких процесів з характерними швидкостями, що набагато перевищують теплові швидкості електронів пучка і плазми, так що останніми можна повністю знехтувати. Знехтуємо також і зіткненнями частинок, вважаючи, що характерні часи розвитку процесів набагато менше часів релаксації спрямованої швидкості електронів пучка в плазмі.

Для моноенергетичного електронного пучка у власній системі координат і частинок холодної плазми в лабораторній системі координат можна скористатися виразами, які при обліку формул перетворення призводять до наступних виразів для компонентів тензора діелектричної проникності плазма-пучкової системи:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega_{\alpha}'^2 \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)},$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega'_{\alpha} \Omega_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \omega'_{\alpha} k_{\perp} u_{\alpha}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\varepsilon_{yz} &= -\varepsilon_{zy} = i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha} k_{\perp} u_{\alpha}}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)}, \\
\varepsilon_{zz} &= 1 - \sum_{\alpha} \left[\frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_{\alpha}^{-1}}{\omega_{\alpha}'^2} + \frac{\omega_{L\alpha}^2 \gamma_{\alpha} k_{\perp}^2 u_{\alpha}^2}{\omega^2 (\omega_{\alpha}'^2 - \Omega_{\alpha}^2)} \right]. \tag{1.1}
\end{aligned}$$

Тут $\omega_{L\alpha} = \sqrt{\frac{e_{\alpha}^2 N_{0\alpha}}{\varepsilon_0 m_{\alpha}}}$ — ленгмюрівська частота частинки сорту α ($N_{0\alpha}$ — їх густина в лабораторній системі координат); $\omega'_{\alpha} = (\omega - \mathbf{u}_{\alpha} \mathbf{k}) \gamma_{\alpha}$,

де $(1 - u_{\alpha}^2/c^2)^{-1/2}$, u_{α} — направлена швидкість часток сорту α , а $\Omega_{\alpha} = \frac{e_{\alpha} B_0}{m_{\alpha}}$ їх циклотронна частота.

Підставляючи (1.1) в рівняння можна дослідити спектри коливань будь-якої багато потокової плазми в умовах знехтування тепловими рухами частинок. Проаналізуємо тепер випадок, коли моно енергетичний електронний пучок пронизує холодну плазму. Зауважимо, що при інжекції електронного пучка в плазму в останній індуктуються заряди і струми, що нейтралізують заряд і струм пучка. В результаті плазмо-пучкова система виявляється без струмовою і повністю нейтралізованою. Що стосується спрямованої швидкості електронів плазми, що створюють зворотній струм, який нейтралізує струм пучка, то при густині плазми N_p , що набагато перевищує густину електронів пучка N_b , то вона

виявляється малою: $u_p = \frac{N_b}{N_p} u_b \ll u_b = u$ і нею можна знехтувати.

Підставляючи (1.1) в рівняння

$$\left| k \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \right| = 0 \tag{1.2}$$

і нехтуючи пучковими складовими, отримуємо дисперсійне рівняння для електромагнітних коливань холодної магнітоактивної плазми. Облік пучкових доданків повинен давати малі поправки по знайденим спектрами. З (1.1) бачимо, що ці поправки найбільш істотні в тих областях частот і фазових швидкостей хвиль, в яких пучкові складові в компонентах тензора діелектричної проникності необмежено зростають. Це має місце в умовах

$$\omega = k_z u; \quad \omega = k_z u \pm \Omega_e / \gamma,$$

причому при виконанні першої рівності, званою умовою черенковського резонансу, пучкові складові в разі прямолінійного пучка мають полюс другого порядку, а при виконанні другої рівності, званого умовою циклотронного (доплерівського) резонансу, — полюс першого порядку. Таким чином, для прямолінійного пучка найбільш сильну взаємодію з плазмою слід очікувати при виконанні умови черенковського резонансу.

1.2 Взаємодія прямолінійного електронного пучка з плазмою. Черенковська нестійкість

Аналіз взаємодії моноенергетичного прямолінійного електронного пучка з холодною плазмою почнемо з найпростішого випадку, коли відсутня зовнішнє магнітне поле, так що $\omega'_\alpha \gg \Omega/\gamma$. При цьому рівняння виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} k^2 c^2 - \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \right) &= 0, \\ (k^2 c^2 - \omega^2 + \omega_{Le}^2 + \omega_b^2 \gamma^{-1}) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \right. \\ &\left. - \frac{k_\perp^2 u^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Le}^2 \omega_b^2 \gamma^{-1}}{(\omega - k_z u)^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тут ω_{Le} і ω_b — ленгмюрівські частоти електронів плазми і пучка відповідно. При виведенні рівнянь (1.2) іонними доданками було знехтувано через їхню малість, тобто розглянуто взаємодію електронного пучка з високочастотними

коливаннями плазми.

Бачимо що рівняння (1.3) описує стійкість коливання плазми зі спектром частоти

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_b^2 \gamma^{-1} + k^2 c^2.$$

Вклад електронів пучка внаслідок малої щільності при цьому досить малий .

Друге рівняння (1.3) описує поздовжньо-поперечну хвилю з відмінними від нуля компонентами поля E_x і E_z . Тут $Eu \neq 0$ і можливий вплив поля на електрони пучка. Пучок може гальмуватися полем хвилі, передаючи їй частину своєї енергії. Хвиля що виникла в системі флуктуаційна чином буде наростати в часі — система являється нестійкою. Дійсно, пучкові складові в рівнянні (1.3) найбільш істотні в області частот черенковського резонансу, тому вирішення цього рівняння слід шукати у вигляді

$$\omega = k_z u + \delta$$

Де $\delta \ll \omega$. В результаті знаходимо, що при $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \neq \omega_{Le}^2$

$$\delta^2 = \frac{\Omega_b^2 \gamma^{-3}}{1 - \omega_{Le}^2 / (k_z^2 u^2)} \left[1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\omega_{Le}^2 \gamma^2}{k^2 c^2 - k_z^2 u^2 + \omega_{Le}^2} \right].$$

при $\omega^2 \approx k_z^2 u^2 \approx \omega_{Le}^2$

$$\delta_{1,2} = \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2} \omega_{Le} \left(\frac{N_b}{2N_p} \frac{1}{\gamma} \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3},$$

$$\delta_3 = \omega_{Le} \left(\frac{N_b}{2N_p} \frac{1}{\gamma} \frac{k_{\perp}^2 + k_z^2 \gamma^{-2}}{k^2} \right)^{1/3}. \quad (1.4)$$

Із цих співвідношень видно, що коливання частотою $\omega \approx k_z u$ нестійкі ($\text{Im} \omega = \text{Im} \delta > 0$) і наростають у в часі, якщо $k_z u \leq \omega_{Le}$. За відсутності резонансу, $\omega \approx k_z u \neq \omega_{Le}$, інкремент наростання, $\text{Im} \delta \sim (N_b/N_p)^{1/2} \omega_{Le}$, для резонансної ж нестійкості, коли $\omega \approx k_z u \approx \omega_{Le}$, інкремент наростання значно більше $\text{Im} \delta \sim (N_b/N_p)^{1/3} \omega_{Le}$ Це і зрозуміло оскільки в резонансі швидкість пучка збігається з фазовою швидкістю поширення власних коливань плазми, а саме зі швидкістю поздовжніх хвиль. В резонансному випадку

відбувається збудження поздовжніх хвиль релятивістським пучком.

$$\epsilon = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{k_z^2 + k_\perp^2 \gamma^2}{k^2} = 0 \quad (1.5)$$

За відсутності пучка ($\omega_b = 0$) рівняння (1.4) описує електронні ленгмюрівські коливання плазми. На перетині спектра цих коливань з прямою, що відповідає умовам черенковського резонансу, відбувається потужна взаємодія електронного пучка з плазмою і збудження коливань.

Таким чином, при взаємодії електронного пучка малої щільності з ізотропною плазмою в умовах черенковського резонансу відбувається резонансне збудження поздовжніх хвиль в плазмі. Зауважимо, що поперечні електромагнітні хвилі в ізотропній плазмі порушуватися не можуть, оскільки їх фазова швидкість завжди більше швидкості світла і електронний пучок з ними резонансно взаємодіяти не може. Крім того, згідно з (1.5), для нестійкого кореня дисперсійного рівняння $\text{Re } \delta_1 < 0$. Це означає, що $u > \omega/k_z$, тобто електрони пучка наздоганяють хвилю, передаючи частину свого кінетичної енергії полю. Амплітуда поля при цьому зростає, зростає і його енергія, оскільки збуджується пучком поздовжня хвиля. В разі ізотропної плазми хвиля має позитивну енергію:

$$|E^l|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \epsilon^l(\omega) = |E^l|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\omega \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \right) \right] > 0.$$

Розглянута черенковський нестійкість електронного пучка в плазмі має місце і при наявності зовнішнього поздовжнього магнітного поля. Якщо магнітне поле слабке, так що $|\delta| > \Omega_e \gamma^{-1}$ то в виразах (1.1) ним можна знехтувати.

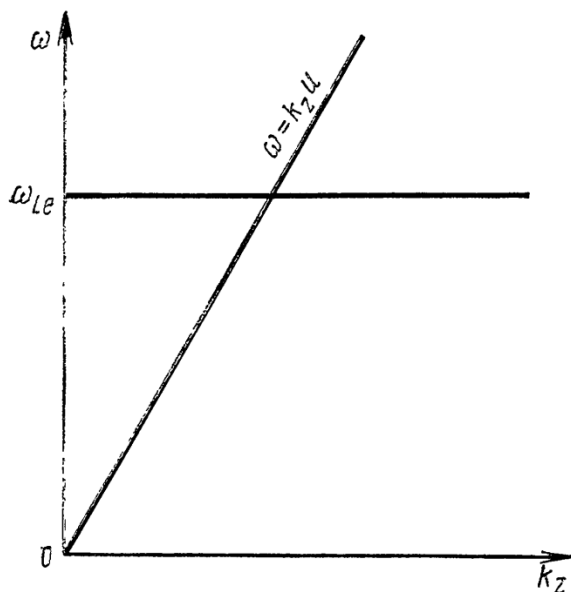


Рис. 1.1. Черенковська взаємодія електронного пучка з поздовжніми коливаннями ізотропної плазми

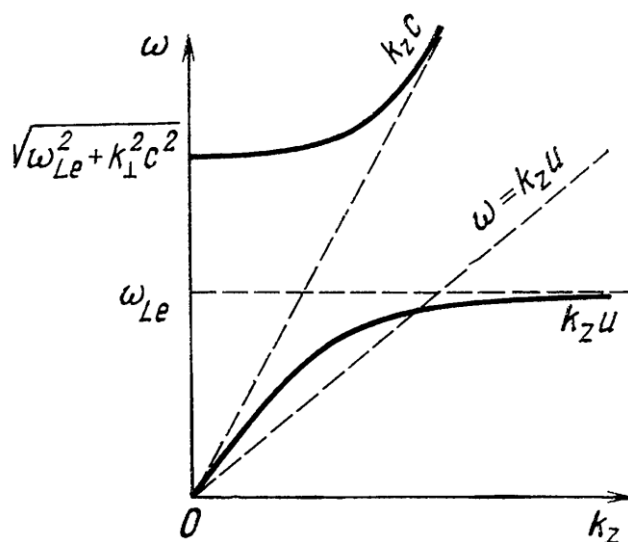


Рис. 1.2. Черенковська взаємодія електронного пучка з коливаннями холодної магнітоактивної плазми

Справедливими виявляться всі отримані формули. Якщо ж магнітне поле сильне і $\Omega_e \gg \omega_{Le}$, то в формулах (1.1) можна перейти до нескінченного магнітного поля. При цьому отримаємо два рівняння:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0,$$

$$k_{\perp}^2 + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - k_z u)^2} \right] = 0$$

Перше з них описує чисто поперечну хвилю ($E \parallel Oy$) з фазовою швидкістю $\omega/k_z > c$, з нею пучок взагалі не взаємодіє. Друге ж рівняння описує поздовжньо-поперечні хвилі з відмінними від нуля компонентами поля E_x і E_z і тому взаємодіють з пучком. За відсутності пучка це рівняння дає гілки коливань

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + k^2 c^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 k_z^2 c^2} \right]$$

відповідні швидкої і повільної хвилях. Електронний пучок резонансно може взаємодіяти лише з повільною хвилею і то за умови

$$\omega_{Le}^2 > k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2 + k_z^2 c^2$$

Рішення другого рівняння, відповідне наростаючим в часі коливань, при цьому має вигляд

$$\omega = k_z u + \delta = \sqrt{\omega_{Le}^2 - k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2} + \delta;$$

$$\delta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{N_b}{2N_p} \right)^{1/3} \left[1 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega_p^2} \gamma^2 (\gamma^2 - 1) \right]^{-1/3},$$

$$|\delta/\omega| \ll [2(\gamma^2 - 1)]^{-1};$$

$$\delta = i \frac{\omega}{\gamma} \left[\frac{N_b}{N_p \gamma} (\gamma^2 - 1) \right]^{1/2} \left[1 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega_p^2} \gamma^2 (\gamma^2 - 1) \right]^{-1/2}$$

$$|\delta/\omega| \gg [2(\gamma^2 - 1)]^{-1}.$$

У цьому випадку також $\text{Re} \delta \leq 0$, тому $u > \omega/k_x$ і електрони пучка, наздоганяючи хвилю, передають їй частину своєї енергії. для нерелятивістського пучка, коли $u \rightarrow 1$, збуджувана хвиля з великим ступенем точності є потенційною), а з ростом u стає сильно не потенціальний.

Таку передачу енергії спрямованого руху електронів, цілком легко зрозуміти, якщо зауважити, що групова швидкість збудженої пучком хвилі

вздовж осі Oz дорівнює при $|\delta/\omega| \ll [2(\gamma^2-1)]^{-1}$

$$v_{\text{гp } z} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{2}{3} u,$$

тобто вона завжди менше швидкості і пучка. Зауважимо, що ця швидкість позитивна, а тому хвиля переносить енергію в напрямку руху електронів пучка. Таку хвилю прийнято називати попутною, а розглянуту нестійкість на попутній хвилі називають конвективною або зносовою, підкреслюючи тим самим, що збудження зносяться електронним пучком.

Проаналізувавши питання про електродинамічної стійкості термодинамічно-нерівноважного середовища, що складається з холодної плазми і моноенергетичного прямолінійного пучка. Цілком очевидно, що в такому середовищі повинні також посилюватися подані ззовні електромагнітні збудження. Щоб переконатися в цьому, варто вирішувати граничну задачу .

Проаналізуємо питання про підсилення хвиль в напрямку зовнішнього магнітного поля. Отримуємо

$$k_z = \frac{\omega}{u} + \delta k_z = \frac{1}{u} \sqrt{\omega_{Le}^2 - k_{\perp}^2 u^2 \gamma^2} + \delta k_z;$$

$$\delta k_z = \begin{cases} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \frac{\omega}{u} \left(\frac{\omega_b^2}{2\gamma^7 k_{\perp}^2 u^2} \right)^{1/3} & \text{при } \left| \frac{\delta k_z u}{\omega} \right| \ll \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)}, \\ -i \frac{\omega}{u} \left(\frac{\omega_b^2}{\gamma^5 k_{\perp}^2 u^2} \right)^{1/2} & \text{при } \left| \frac{\delta k_z u}{\omega} \right| \gg \frac{1}{2(\gamma^2 - 1)}. \end{cases}$$

Величина $\text{Im} \delta k_z$ представляє собою коефіцієнт посилення хвиль в напрямку $z > 0$,

Обговоримо тепер питання про роль теплового руху електронів плазми і пучка в розвитку черенковський нестійкості. Раніше тепловим рухом частинок було повністю знехтувано, тому отримані формули справедливі в умовах, коли фазові швидкості хвиль в лабораторній системі координат більше теплових швидкостей електронів плазми, а у власній системі координат пучка — більше розкидка електронів пучка по швидкостям:

$$\frac{\omega}{k_z} \approx u \gg v_{Te}, \quad \frac{\omega'}{k'_z u} \approx \frac{\delta \gamma^2}{\omega} \gg \frac{v_{Tb}}{u}. \quad (1.6)$$

Тут v_{Te} - теплова швидкість електронів плазми, а v_{Tb} - нерелятивістський розкид електронів пучка за швидкостями у власній системі координат.

Щоб додатково обґрунтувати умови (1.6), а також з'ясувати як видозмінюється черенковська пучкова нестійкість при її збудженні, розглянемо взаємодію пучка з плазмою при увазі теплового руху частинок. Для спрощення обмежимося поздовжніми хвилями, що збуджуються пучком і поширюються уздовж спрямованої швидкості пучка (і магнітного поля). Тоді дисперсійне рівняння коливань електронної плазмо-пучкової системи має вигляд

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\Omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{Te}} \right) \right] - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{k'^2 v_{Tb}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega'}{k' v_{Tb}} \right) \right] = 0. \quad (1.7)$$

Звідси видно, що нерівності (1.6) дійсно являють собою умови зневаги тепловим рухом частинок в системі при розвитку черенковської нестійкості (при цьому $k' = k\gamma^{-1}$). У цих умовах отримуємо рівняння

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0,$$

причому воно збігається з дисперсійним рівнянням для поздовжніх хвиль (1.5) при $k_{\perp} = 0$.

Розглянуту черенковську пучкову нестійкість при повному знехтуванні тепловим рухом частинок часто називають також гідродинамічною, підкреслюючи тим самим, що вона є не дисипативною і може бути описана в рамках гідродинаміки холодної плазми. Як було показано, така нестійкість розвивається при $\mathbf{k}\mathbf{u} \leq \omega_{Le}$. Покажемо, що при обліку теплового руху частинок з'являється черенковська нестійкість і в області $\mathbf{k}\mathbf{u} > \omega_{Le}$. На відміну від гідродинамічної пучкової нестійкості нестійкість при $\mathbf{k}\mathbf{u} > \omega_{Le}$ є дисипативною,

обумовленою зміною знака черенковського загасання хвиль в плазмі, і тому називається кінетичною. У цих умовах внеском пучка в дійсну частину поздовжньої діелектричної проникності можна знехтувати і записати рівняння (1.7) наступним чином:

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v^3} \exp \left[-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right] + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_b^2 (\omega - ku) \gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3} \exp \left[-\frac{(\omega - ku)^2 \gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2} \right] = 0$$

з рішенням ($\omega \rightarrow \omega + \delta$)

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \\ \delta = -i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \omega_{Le}^2 \left[\frac{\omega_b^2 \gamma^3}{k^3 v_{Tb}^3} \left(1 - \frac{ku}{\omega_{Le}} \right) \exp \left[-\frac{(\omega - ku)^2 \gamma^4}{2k^2 v_{Tb}^2} \right] + \frac{\omega_{Le}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} - \frac{3}{2} \right) \right].$$

Видно, що при $\text{Im} \delta > 0$ в системі виникає нестійкість, яка можлива в області $ku > \omega_{Le}$ і обумовлена зміною знака загасання Ландау на електронах пучка при виконанні черенковської умови $u > \omega/k = \omega_{Le}/k$. Слід зазначити, що кінетична пучкова нестійкість, так само як і гідродинамічна нестійкість, має поблизу частоти черенковського резонансу $\omega \approx \omega_{Le} \approx ku$ максимальним інкрементом наростання, значення якого падає з віддаленням від резонансної частоти.

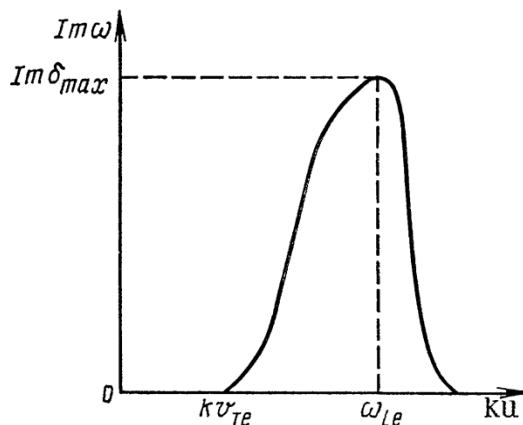


Рис. 1.3. Залежність інкремента розвитку черенковської пучкової нестійкості від ku

На рис. 1.3 приведена залежність інкремента наростання черенковської пучкової нестійкості від ku ; видно поступовий перехід гідродинамічної нестійкості (наростаюча гілка) до кінетичної нестійкості (спадаюча гілка). На закінчення зазначимо, що вище ми повністю знехтували зіткненнями як частинок самої плазми, так і пучка. Тому всі отримані вище формули справедливі, доки

$$\delta \gg \nu_b(u), \nu_e(T_e), \quad (1.8)$$

а отже, релаксацією зіткнень електронів пучка і збудженою нею електромагнітної хвилі можна знехтувати. Тут δ — інкремент наростання нестійкості, а $\nu_b(u)$ і $\nu_e(T_e)$ — частоти зіткнень електронів пучка і плазми відповідно. Відзначимо, що і при порушенні нерівностей (1.8) в системі можливий розвиток черенковської пучкової нестійкості, яка називається дисипативною.

1.3 Взаємодія обертового електронного пучка з плазмою. Циклотронна нестійкість (ефект Допплера)

Сильна взаємодія електронного пучка з плазмою має місце бути при виконанні черенковського або ж циклотронного резонансу. У разі прямолінійного пучка більшого за черенковську взаємодію, оскільки в компонентах тензора діелектричної проникності пучка (1.1) йому відповідають полюси другого порядку, в той час як циклотронний взаємодія представлено полюсами першого порядку. Покажемо, що при наявності у електронного пучка поряд з поздовжньою такою ж поперечною до зовнішнього магнітного поля компоненти спрямованої швидкості циклотронний взаємодія стає настільки ж сильною, як і черенковська.

З умови резонансу видно, що при циклотронній взаємодії не накладається жодних обмежень на фазову швидкість хвиль; вона може бути як більше, так і менше швидкості пучка. Важливим є лише співвідношення між циклотронною частотою обертання електронів в зовнішньому магнітному полі і частотою електромагнітної хвилі. Тому, щоб наочніше пояснити механізм циклотронного взаємодії, розглянемо електромагнітні обурення в системі обертання пучок—

плазма, що поширюються поперек магнітного поля, вважаючи $k_z = 0$ і тим самим виключаючи черенковський резонанс.

Для простоти обмежимося розглядом моноенергетичного обертового пучка, що взаємодіє з холодною електронною плазмою. Тоді діелектрична проникність плазмо-пучкової системи має вигляд

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon^{(0)}_{ij}(\omega) + \delta\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}),$$

де $\epsilon^{(0)}_{ij}(\omega)$ — діелектрична проникність холодної електронної плазми

$$\epsilon^{(0)}_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp 0} & i g_0 & 0 \\ -i g_0 & \epsilon_{\perp 0} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel 0} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } \epsilon_{\perp 0} = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \quad g_0 = -\frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega (\omega^2 - \Omega_e^2)}, \quad \epsilon_{\parallel 0} = 1 - \omega_{Le}^2 / \omega^2, \quad \text{а}$$

$\delta\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — поправка, описуюча наявність електронного пучка.

Для обчислення $\delta\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ вже не можна скористатися формулами перетворення, оскільки тут електрони пучка крім поступальної швидкості мають ще й швидкістю обертання і для отримання формул перетворення необхідно було б перейти в обертову систему координат. В цьому випадку зручніше обчислити $\delta\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ за допомогою формул

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{\epsilon_0 \omega^2} \sum_n \frac{(\omega - k_z v_z) \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_{\perp}} + k_z v_z \frac{\partial f_{0\alpha}}{\partial p_z}}{(\omega - k_z v_z - n \Omega / \gamma) v_{\perp}} \Pi_{ij}^{(n)},$$

де

$$\Pi_{ij}^{(n)} = F_{\alpha i} F_{j\alpha}^* = \begin{cases} v_{\perp}^2 \left(\frac{n J_n(x)}{x} \right)^2 & i v_{\perp}^2 \frac{n}{x} J_n(x) J'_n(x) & v_{\perp} v_z \frac{n J_n^2(x)}{x} \\ -i v_{\perp}^2 \frac{n J_n(x) J'_n(x)}{x} & v_{\perp}^2 J_n'^2(x) & -i v_z v_{\perp} J_n(x) J'_n(x), \\ v_{\perp} v_z \frac{n J_n^2(x)}{x} & i v_{\perp} v_z J_n(x) J'_n(x) & v_z^2 J_n^2(x) \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \left(\frac{n \Omega_{\alpha}}{k_{\perp} \gamma} J_n(x), -i v_{\perp} J'_n(x), v_z J_n(x) \right), \quad x = \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \gamma.$$

(1.8)

підставляючи в якості рівноважної функції розподілу електронів пучка функцію

$$f_{0\alpha} = \frac{N_{0\alpha}}{2\pi p_{\perp 0}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}), \quad (1.9)$$

В результаті нескладних обчислень для збуджень з $k_z \neq 0$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} &= \sum_n \left(\frac{2n}{z} J_n(z) J'_n(z) P_n + n^2 J_n^2(z) Q_n \right), \\ \delta\varepsilon_{yy} &= \sum_n \left[\frac{1}{z} (z^2 J_n'^2(z))' P_n + z^2 J_n'^2(z) Q_n \right], \\ \delta\varepsilon_{zz} &= -\frac{\omega_b^2}{\omega^2 \gamma^2} + \sum_n \left[\frac{2k_z u_{\parallel}}{\omega - k_z u_{\parallel}} J_n^2(z) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} 2z J_n(z) J'_n(z) P_n + \frac{u_{\parallel}^2}{u_{\perp}^2} z^2 J_n^2(z) Q_n \right], \\ \delta\varepsilon_{xy} = -\delta\varepsilon_{yx} &= -i \sum_n \left[\frac{n}{z} (z J_n(z) J'_n(z))' P_n + nz J_n(z) J'_n(z) Q_n \right], \\ \delta\varepsilon_{xz} = \delta\varepsilon_{zx} &= \sum_n \left[\left(\frac{n \Omega_e k_z / k_{\perp}}{\omega - k_z u_{\parallel}} J_n^2(z) + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} 2n J_n(z) J'_n(z) \right) P_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} nz J_n^2(z) Q_n \right], \\ \delta\varepsilon_{yz} = -\delta\varepsilon_{zy} &= i \sum_n \left[\left(\frac{\Omega_e k_z / k_{\perp}}{\omega - k_z u_{\parallel}} z J_n(z) J'_n(z) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} (z J_n(z) J'_n(z)) P_n + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} z^2 J_n(z) J'_n(z) Q_n \right) \right], \\ P_n &= \frac{\omega_b^2 (\omega - k_z u_{\parallel}) \gamma^{-1}}{\omega^2 (\omega - k_z u_{\parallel} - n \Omega_e / \gamma)}, \quad z = \frac{k_{\perp} u_{\perp} \gamma}{\Omega_e}, \\ Q_n &= \frac{\omega_b^2 \gamma^{-3} \Omega_e^2 (\omega^2 - k_z^2 c^2)}{\omega^2 c^2 k_{\perp}^2 (\omega - k_z u_{\parallel} - n \Omega_e / \gamma)^2}, \quad \gamma = \left(1 - \frac{u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

З виразу (1.10) видно, що при $u_{\perp} \neq 0$ пучкові складові компонент тензора діелектричної проникності мають полюси другого порядку при $\omega = k_z u_{\parallel} + n \Omega_e / \gamma$. Це означає, що в даній області частот пучок сильно взаємодіє з електромагнітною хвилею. Щоб переконатися в цьому, проаналізуємо дисперсійне рівняння

$$\omega = k_z u_{\parallel} + n \Omega_e / \gamma \quad (1.11)$$

для електромагнітних хвиль, що поширюються поперек магнітного поля, тобто

$k_z=0$, $k_{\perp}=k$. В даному випадку це рівняння розпадається на два рівняння

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} + \epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{zz} \quad (1.12)$$

що описують відповідно незвичайну і звичайну хвилі. Тут

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \epsilon_{\perp 0} + \delta\epsilon_{xx}, & \epsilon_{xy} &= i g_0 + \delta\epsilon_{xy}, \\ \epsilon_{yy} &= \epsilon_{\perp 0} + \delta\epsilon_{yy}, & \epsilon_{zz} &= \epsilon_{\parallel 0} + \delta\epsilon_{zz}. \end{aligned}$$

Електричне поле незвичайної хвилі перпендикулярне зовнішньому магнітному полю, а звичайної хвилі паралельно йому. Тому незвичайна хвиля може взаємодіяти лише з поперечною компонентою імпульсу електронів пучка, а звичайна - з поздовжньою.

У відсутності пучка описують спектри коливань холодної магнітоактивної плазми, поширюються поперек магнітного поля. Для повністю електронних коливань цю залежність неважко знайти і аналітично:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{1}{2} [\Omega_e^2 + 2\omega_{Le}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 + (k^2 c^2 - \Omega_e^2)^2}], \\ \omega_3^2 &= k^2 c^2 + \omega_{Le}^2. \end{aligned}$$

Частоти ω_1 і ω_2 відповідають двом гілкам незвичайною хвилі, а частота ω_3 — звичайній хвилі.

Перетин ліній $\omega_a(k)$ де $a = 1, 2, 3$) з лінією $\omega = n\Omega_e/\gamma$ визначають області резонансної циклотронної взаємодії обертового електронного пучка з зазначеними вище коливаннями плазми (рис. 1.4, а). З малюнка видно, що в умовах

$$\frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_2(0)$$

циклотронний резонанс неможливий, в умовах

$$\omega_2(0) < \frac{n\Omega_e}{\gamma} < \omega_{Le}$$

можлива резонансна взаємодія пучка з нижньої гілкою незвичайної хвилі, в

умовах

$$\omega_{Le} < \frac{n \Omega_e}{\gamma} < \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$$

можлива резонансна взаємодія пучка з нижньою гілкою незвичайної хвилі і зі звичайною хвилею, в умовах

$$\sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} < \frac{n \Omega_e}{\gamma} < \omega_1(0)$$

можлива резонансна взаємодія пучка тільки зі звичайною хвилею і, нарешті, в умовах

$$\frac{n \Omega_e}{\gamma} > \omega_1(0)$$

можлива резонансна взаємодія пучка зі звичайною хвилею і верхньою гілкою незвичайної хвилі. Зазначені умови визначають лише можливість резонансного взаємодії обертового пучка з власними електромагнітними хвилями холодної плазми.

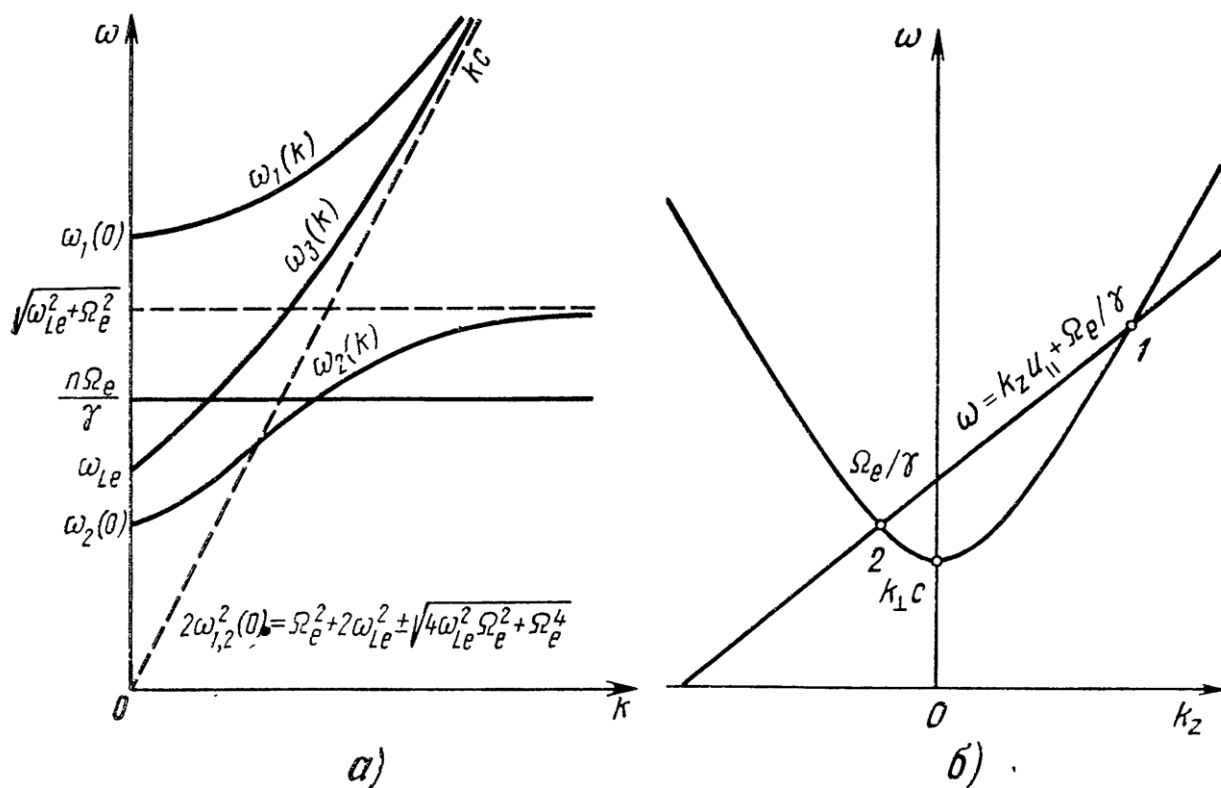


Рис. 1.4. Циклотронна взаємодія електронного пучка з коливаннями холодної магнітоактивної плазми — поперечне поширення (а) і з електромагнітною хвилею в вакуумі — довільний кут поширення (б)

Про те, які з цих хвиль порушуватимуться пучком, можна судити, визначивши інкремент їх наростання. Для цього потрібно розв'язувати рівняння (1.12) з урахуванням пучкових доданків в компонентах тензора діелектричної проникності і умови резонансного взаємодії $\omega = n\Omega_e/\gamma$. При визначенні інкремента наростання хвиль ми спростимо задачу, а саме розглянемо межу рідкісної плазми $\Omega_e \gg \omega_{Le}$. У розділі (1.1) було показано, що черенковське збудження хвиль прямолінійним пучком в такій плазмі можливо умови, коли густина плазми перевищує деяке критичне значення, хоча і як завгодно мале для не обмеженої в просторі плазми. Це було обумовлено вимогою існування в плазмі хвилі з фазовою швидкістю, меншою швидкості світла, яка могла б перебувати в черенковській резонансі з електронами пучка. В разі циклотронного резонансу ця вимога відпадає, тому відпадає і необхідність наявності плазми: циклотронний резонанс

можливий і при повній її відсутності. Тоді рівняння (1.12) істотно спрощуються:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\omega_b^2 \gamma^{-1}}{\omega^2} \frac{u_{\perp}^2}{c^2} \frac{J_n'^2 \left(\frac{ku_{\perp} \gamma}{\Omega_e} \right)}{[1 - \omega\gamma/(n\Omega_e)]^2} \right],$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} \frac{J_n^2 \left(\frac{ku_{\perp} \gamma}{\Omega_e} \right)}{[1 - \omega\gamma/(n\Omega_e)]^2} \right], \quad (1.13)$$

У цих рівняннях повністю знехтували плазмовими складовими в компонентах тензора діелектричної проникності системи, а з пучкових доданків враховані тільки члени з полюсом другого порядку (для циклотронного резонансу).

Тепер можна легко вирішити рівняння (1.13), знайшовши частоти порушених пучком електромагнітних хвиль і інкремент їх наростання:

$$\omega \rightarrow \omega + \delta = \frac{n \Omega_e}{\gamma} + \delta.$$

У розглянутому наближенні частоти незвичайна і звичайна хвиль збігаються:

$$\omega = \frac{n \Omega_e}{\gamma} = kc,$$

а інкременти їх наростання відповідно рівні

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{\text{необ}}}{\omega} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_b^2 \gamma}{2n^2 \Omega_e^2} \frac{u_{\perp}^2}{c^2} J_n'^2 \left(\frac{nu_{\perp}}{c} \right) \right]^{1/3}, \\ \frac{\delta_{\text{об}}}{\omega} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_b^2 \gamma}{2n^2 \Omega_e^2} \frac{u_{\parallel}^2}{c^2} J_n^2 \left(\frac{nu_{\perp}}{c} \right) \right]^{1/3}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

З виразів (1.14) видно, що інкременти наростання незвичайної і звичайної хвиль відмінні від нуля лише при наявності поперечної компоненти швидкості електронів $u_{\perp} \neq 0$, причому з ростом u_{\perp} інкремент збільшуються. Для існування ненульового інкремента наростання звичайної хвилі необхідна наявність також поздовжньої компоненти швидкості електронів $u_{\parallel} \neq 0$. Слід зазначити, що інкременти наростання максимальні на нижчих циклотронних гармоніках n , особливо при нерелятивістських значеннях поперечної компоненти швидкості електронів, коли $u_{\perp} \ll c$.

Проведений аналіз циклотронної нестійкості при $k_z = 0$ не дозволяє відповісти на питання, чи є ця нестійкість зносовою чи ні. Для цього необхідно розглянути коливання $k_z \neq 0$, що ми і зробимо зараз, обмежившись випадком малих значень поперечної швидкості електронів $u_{\perp} \ll c$. вважаючи пучок малим збудженням і тому з огляду на діелектричній проникності (1.10) лише складові, які містять полюси другого порядку по циклотронному резонансу (1.2), для незвичайної і звичайної хвиль відповідно отримаємо такі дисперсійні рівняння:

$$\begin{aligned} k_{\perp}^2 + k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \delta\epsilon_{yy}), \\ k_{\perp}^2 + k_z^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \delta\epsilon_{zz}). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{yy} &= -\frac{\omega_b^2 u_\perp^2}{4\gamma\omega^2} \frac{k_z^2 - \omega^2/c^2}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}, \\ \delta\varepsilon_{zz} &= -\frac{\omega_b^2 u_\perp^2 k_\perp^2}{2\omega^4} \frac{(\omega - \Omega_e/\gamma)^2 - \omega^2 u_\parallel^2/c^2}{(\omega - k_z u_\parallel - \Omega_e/\gamma)^2}.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Видно, що в розглянутому наближенні в межі $u_\perp \ll c$. враховується циклотронний резонанс тільки на основній гармоніці, тобто з $n = 1$.

Тепер ми можемо шукати рішення рівнянь (1.14) у вигляді

$$\omega \rightarrow \omega + \delta = kc + \delta = \Omega_e/\gamma + k_z u_\parallel + \delta. \quad (1.15)$$

В результаті для інкрементів наростання незвичайної і звичайної хвиль отримуємо

$$\begin{aligned}\frac{\delta_{\text{необ}}}{\omega} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_b^2 k_\perp^2 u_\perp^2}{8\gamma\omega^4} \right)^{1/3}, \\ \frac{\delta_{\text{об}}}{\omega} &= \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\omega_b^2 k_\perp^4 u_\perp^2 u_\parallel^2}{4\omega^6} \right)^{1/3}.\end{aligned}$$

Слід зазначити, що, згідно з (1.15), при розвитку циклотронної пучкової нестійкості електромагнітних хвиль високої і низької частоти (рис. 1.4, б)

$$\omega_{1,2}(k_z) = \sqrt{k_z^2 + k_\perp^2} c = \frac{\gamma_\parallel^2 \Omega_e}{\gamma} \left[1 \mp \frac{u_\parallel}{c} \sqrt{1 - \frac{k_\perp^2 c^2 \gamma^2}{\gamma_\parallel^2 \Omega_e^2}} \right]$$

їх групова швидкість і поздовжнє хвильове число відповідно складають

$$v_{\text{гр } 1,2} = \frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial k_z} = c \frac{k_{z1,2} c}{\omega_{1,2}}, \quad k_{z1,2} = \frac{(\omega_{1,2} - \Omega_e/\gamma)}{u_\parallel}.$$

Легко бачити, що за умови $\gamma_\parallel > k_\perp c\gamma/\Omega_e > 1$ обидва кореня $k_{z1,2} > 0$, а тому групі швидкості обох порушуваних хвиль позитивні (точка 2 на рис. 1.4,б в цьому випадку, як і точка 1, лежить в правій півплощині). Обидві хвилі при цьому переносять енергію в бік руху пучка і циклотронна нестійкість носить зносний характер. Якщо ж $k_\perp c\gamma/\Omega_e < 1$, то $k_{z1} > 0$, а $k_{z2} < 0$ і, отже, порушується пучком низькочастотна хвиля переносить енергію назустріч напрямку руху пучка (таку хвилю називають зустрічною), в той час як високочастотна хвиля як і раніше має позитивну групову швидкість і переносить енергію в напрямку руху пучка. В цьому випадку низькочастотна хвиля вже не зноситься пучком і нестійкість не є

зносую, таку нестійкість називають абсолютною. Розглянуту вище циклотрон нестійкість в межі $k_z=0$ в цьому сенсі також слід вважати абсолютною, оскільки поздовжні групові швидкості звичайної і незвичайної хвиль дорівнюють нулю, а тому збудження електромагнітного поля не зносити електронним пучком.

Вище була досліджена циклотронна нестійкість обертового пучка в відсутності плазми. Наявність плазми ускладнює розвиток такої нестійкості, і при щільності, коли вона стає неможливою для хвиль, що поширюються поперек електронного пучка ($k_z = 0$). Це обумовлено тим, що циклотронна частота випромінювання обертових електронів $n\Omega_e/\gamma$ екранується плазмою, тобто перестає бути власною частотою системи. Крім того, при наявності плазми в системі виникають зіткнення релаксації, релаксація спрямована швидкість електронів пучка і порушувани пучком хвилі. Наведені вище формули справедливі в умовах, коли процесами зіткнення релаксації можна знехтувати, що еквівалентну вимогу виконання $\delta \gg \nu_b(u), \nu_e(T_e)$, де δ - інкремент наростання нестійкості, а $\nu_b(u)$ і $\nu_e(T_e)$. Частота зіткнень електронів пучка і плазми відповідно.

Нарешті, зауважимо, що розглянута циклотронна нестійкість є гідродинамічною в тому сенсі, що вона не пов'язана з дисипативними процесами в системі і проявляється при повному нехтуванні тепловим розкидом швидкостей електронів пучка. Облік останнього може привести до розвитку в системі слабкої кінетичної циклотронної нестійкості.

1.4 Висновки до розділу

Розглянуто взаємодію електронного пучка з просторово однорідною плазмою. З'ясовано критерії стійкості та нестійкості різних пучково-плазмових систем. Приділено особливу увагу нестійкостям, що пов'язані зі збудженням електромагнітних хвиль. Розглянуто взаємодію пучка електронів з плазмою, що знаходиться в зовнішньому постійному і однорідному магнітному полі.

2 ВЗАЄМОДІЯ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК З ЦИЛІНДРИЧНИМ ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ХВИЛЕВОДОМ

2.1 Постановка задачі та основні рівняння

Розглянемо діелектричний циліндр з радіусом ρ_0 , який займає область простору $0 \leq \rho \leq \rho_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ і $|z| < \infty$ (ось z направлена уздовж осі циліндра). Циліндр виготовлений з ізотропного немагнітного матеріалу, діелектрична проникність якого є дійсною величиною і дорівнює ε . Уздовж його поверхні рухається пучок електронів з густиною n_0 і швидкістю $v_0 \ll c$ (де c — швидкість світла у вакуумі). Таку електродинамічну систему легко можна реалізовувати при розташуванні циліндра в просторі дрейфу трубчастого пучка з радіусом $\rho_0 + a/2$, що рухається прямолінійно (рис. 2.1). Товщину пучка a вважатимемо нескінченно малою, а середовище за пучком ($\rho > \rho_0$) — вільним простором. Безпосередній контакт між пучком і поверхнею циліндра відсутній. Передбачається, що простір дрейфу знаходиться в сильному повздовжньому (в напрямку руху пучка) зовнішньому постійному магнітному полі, що перешкоджає поперечному руху електронів пучка. Граничне значення зовнішнього магнітного поля, що обмежує рух електронів по радіусу і азимуту, знаходимо за наступної умови $\omega_H \gg \omega_p$, де $\omega_H = |e|H_0/m_0c$ — електронна циклотронна частота, $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_0}$ — плазмова частота електронів пучка, e і m_0 — заряд і маса вільного електрона; n_0 — об'ємна густина електронів пучка; H_0 — величина зовнішнього магнітного поля. Для пучка з характерною густиною $n_0 \propto 10^{10} \text{ см}^3$ отримуємо: $H_0 \gg 336 \text{ кЕ}$ (або $H_0 \gg 26.7 \text{ кА/м}$).

Система рівнянь, що характеризує взаємодію електронного пучка і полів власних хвиль (коливань) діелектричного циліндра, має вигляд

$$\text{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r},t), \quad (2.1)$$

$$\text{div}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 4\pi en(\mathbf{r},t), \quad (2.2)$$

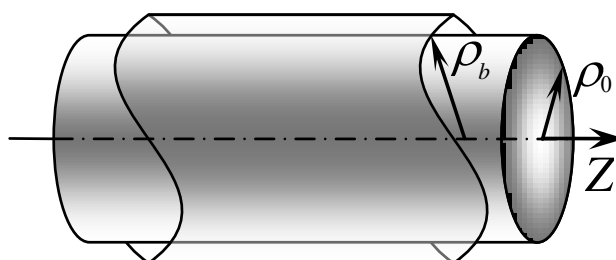
$$\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\text{div}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0, \quad (2.4)$$

де $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ і $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ — напруженість магнітного і електричного полів; $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ — вектор індукції електричного поля; $\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = (0, 0, j_z(\mathbf{r},t))$ і $n(\mathbf{r},t)$ — об'ємна густина струму і густина електронів пучка відповідно, задовольняють рівнянню безперервності

$$e \frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \text{div}\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0. \quad (2.5)$$

Величини $j_z(\mathbf{r},t)$ і $n(\mathbf{r},t)$ визначаються виразами $j_z(\mathbf{r},t) = j_z(z,t)\delta(\rho - \rho_0)$ і $n(\mathbf{r},t) = n(z,t)\delta(\rho - \rho_0)$, де $j_z(z,t)$ і $n(z,t)$ — поверхневі густини відповідних величин; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака. Зауважимо, що в лінійній теорії поверхнева густина струму пучка $j_z(z,t)$ задається в лінійному наближенні, де малі збурення швидкості електронів пов'язані з електричним полем відповідним рівнянням руху.



$$\rho_b = \rho_0 + a/2$$

Рисунок 2.1 – Геометрія електродинамічної системи

Надалі обмежимося розглядом азимутально-симетричних електромагнітних хвиль електричного типу (Е-типу) з компонентами полів $E_\rho(\rho, z, t)$, $H_\phi(\rho, z, t)$,

$E_z(\rho, z, t)$. За відсутності пучка однорідні хвильові рівняння, що описують власні поля циліндру, отримуються з відповідної системи однорідних рівнянь Максвелла (2,1)–(2,4) і мають вигляд

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_z(\rho, z, t) - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z(\rho, z, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_\rho(\rho, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} E_z(\rho, z, t), \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) H_\varphi(\rho, z, t) = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} E_z(\rho, z, t). \quad (2.8)$$

Відповідні рівняння для вільного простору можна отримати з рівнянь (2.6)–(2.8), якщо покласти $\varepsilon = 1$. Рішення рівняння (2.6) для областей циліндра і вільного простору для об'ємно-поверхневої хвилі з частотою ω і поздовжнім хвильовим числом q_z мають вигляд

$$E_z^{cyl}(\rho, z, t) = A_{cyl} J_0(\kappa \rho) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (2.9)$$

$$E_z^{vac}(\rho, z, t) = A_{vac} K_0(q \rho) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (2.10)$$

де $J_0(u)$ — функція Бесселя 0-го порядку першого роду, а $K_0(u)$ — модифікована функція Бесселя 0-го порядку другого роду (функція Макдональда) [47]; A_{cyl} , A_{vac} — довільні постійні. Вибір рішень у вигляді (2.9) і (2.10) обумовлений виконанням умов кінцевих значень величин полів при $\rho \rightarrow 0$ і $\rho \rightarrow \infty$. Величина $\kappa^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2 - q_z^2$ являє собою квадрат поперечного хвильового числа в області циліндра, а $q^2 = q_z^2 - \omega^2 / c^2$ — квадрат поперечного хвильового числа у вільному просторі, взятого з протилежним знаком. З вигляду рішень (2.9), (2.10) випливає, що поля об'ємно-поверхневих хвиль мають осцилюючий характер всередині циліндра і регресивний в напрямку нормалі до поверхні циліндра — в області вільного простору.

Нагадаємо, що під час відсутності пучка граничні умови при $\rho = \rho_0$ для компонент полів є умовою безперервності тангенціальних складових електричного і магнітного полів, а також умова безперервності нормальної

(радіальної) складової вектора електричної індукції. При наявності пучка і його русі уздовж поверхні циліндра (при $\rho_b = \rho_0$) граничні умови при $\rho = \rho_0$ являють собою умови безперервності компоненти поля $E_z(\rho, z, t)$ і стрибок компоненти $D_\rho(\rho, z, t)$, пов'язаний з наявністю збуреного заряду пучка:

$$E_z(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0+0} = E_z(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0-0}, \quad (2.11)$$

$$E_\rho(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0+0} - \varepsilon E_\rho(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0-0} = \frac{4\pi e}{\rho_0} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_0-\Delta\rho}^{\rho_0+\Delta\rho} n(z, t) \delta(\rho - \rho_0) \rho d\rho, \quad (2.12)$$

де інтегрування проводиться по товщині пучка. Надалі ми будемо використовувати лише граничні умови (2.11) і (2.12). Компоненти полів $H_\phi(\rho, z, t)$ будемо знаходити, використовуючи рівняння (2.8). Нам знадобиться рівняння, що зв'яже компоненти полів $E_\rho(\rho, z, t)$ і $E_z(\rho, z, t)$ з поверхневою густиною електронів пучка $n(z, t)$ при $\rho = \rho_0$. Для його отримання запишемо рівняння (2.7) для $\rho = \rho_0$, віднімемо з нього аналогічне йому рівняння для вільного простору і скористаємося граничною умовою (2.12), яку попередньо продиференціювали за часом. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_\rho(\rho, z, t)}{\partial z^2} \Big|_{\rho=\rho_0+0} - \frac{\partial^2 E_\rho(\rho, z, t)}{\partial z^2} \Big|_{\rho=\rho_0-0} = \\ & = \frac{\partial^2 E_z(\rho, z, t)}{\partial z \partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0+0} - \frac{\partial^2 E_z(\rho, z, t)}{\partial z \partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0-0} + \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial^2 n(z, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Дотримуючись робіт [27–30], поверхневу густину $n(z, t)$ представимо у вигляді

$$n(z, t) = \frac{2\pi n_0 a}{q_z M} \sum_{p=1}^M \delta[z - z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)], \quad (2.14)$$

Вираз (2.14) означає той факт, що безперервний трубчастий потік електронів представляється у вигляді набору макрочастинок (заряджених кілець), число яких дорівнює M на довжині $2\pi/q_z$, де координата $z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)$ описує положення окремої p -й макрочастинки. Відзначимо, що координата $z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)$ і швидкість $v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t)$ p -й макрочастинки є рішеннями рівнянь руху

$$\begin{cases} \frac{dz_p(z_{0p}, v_{0p}, t)}{dt} = v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t), \\ \frac{dv_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t)}{dt} = \frac{e}{m_0} \operatorname{Re}[E_z(\rho_0, z_p, t)], \end{cases} \quad (2.15)$$

з початковими умовами: $z_p(z_{0p}, v_{0p}, 0) = z_{0p}$ і $v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, 0) = v_{0p}$. Надалі аналіз часової еволюції амплітуди і фази хвилі, а також координат і швидкостей макрочастинок будемо проводити в системі координат, що пов'язана з пучком. Для цього виконаємо заміну

$$\begin{aligned} z_p(z_{0p}, v_{0p}, t) &= v_0 t + \tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \\ v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t) &= v_0 + \tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \end{aligned}$$

де $\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)$ і $\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)$ — збурені координата і поздовжня швидкість p -ї макрочастинки. Тоді система рівнянь (2.15) і відповідні їй початкові умови отримують вид

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} = \tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \\ \frac{d\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} = \frac{e}{m_0} \operatorname{Re}\{E_z(\rho_0, \tilde{z}_p, t)\}, \end{cases} \quad (2.16)$$

$\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, 0) = \tilde{z}_{p0}$ і $\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, 0) = \tilde{v}_{0p}$. Надалі будемо вважати пучок моношвидкісним в початковий момент часу розвитку нестійкості. Тому, в системі координат, що пов'язана з пучком початкові збурення швидкості макрочастинок вважаємо рівними нулю, тобто $\tilde{v}_{0p} = 0$.

Рівняння (2.7), (2.8), аналогічні їм рівняння для вільного простору і рівняння (2.13), (2.16) спільно з граничною умовою (2.11) являють собою замкнуту систему самоузгоджених нелінійних рівнянь, що описують часову еволюцію полів, що збуджені пучком. Для її вирішення, будемо вважати, що величини A_{cyl} і A_{vac} залежать від часу і задовольняють таким умовам:

$$\left| \frac{1}{A_{cyl, vac}} \frac{\partial A_{cyl, vac}}{\partial t} \right| \ll \omega. \quad (2.17)$$

Інші компоненти полів $E_\rho(\rho, z, t)$, $H_\varphi(\rho, z, t)$ в області циліндра і вільному просторі представимо у вигляді

$$E_\rho^{cyl,vac}(\rho, z, t) = B_{cyl,vac}(\rho, t) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (2.18)$$

$$H_\varphi^{cyl,vac}(\rho, z, t) = C_{cyl,vac}(\rho, t) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (2.19)$$

де перший індекс "cyl" в позначеннях поля і його амплітуди відповідає області циліндра, а другий "vac" — вільному простору; амплітуди $B_{cyl}(\rho, t)$, $C_{cyl}(\rho, t)$, $B_{vac}(\rho, t)$, $C_{vac}(\rho, t)$ задовольняють умовам аналогічним (2.17). Підставивши вирази (2.9), (2.10), (2.18) і (2.19) в рівняння (2.7), (2.8) і аналогічні їм рівняння для вільного простору, отримаємо наступні рівняння:

$$\frac{\partial^2 B_{cyl}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial B_{cyl}(\rho, t)}{\partial t} - \frac{c^2 \kappa^2}{\varepsilon} B_{cyl}(\rho, t) = -\frac{ic^2 q_z \kappa}{\varepsilon} J'_0(\kappa \rho) A_{cyl}(t), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 B_{vac}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial B_{vac}(\rho, t)}{\partial t} + c^2 q^2 B_{vac}(\rho, t) = -ic^2 q_z q K'_0(q\rho) A_{vac}(t), \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 C_{cyl}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial C_{cyl}(\rho, t)}{\partial t} - \frac{c^2 \kappa^2}{\varepsilon} C_{cyl}(\rho, t) = c\kappa J'_0(\kappa \rho) \left(\frac{\partial A_{cyl}(t)}{\partial t} - i\omega A_{cyl}(t) \right), \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 C_{vac}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial C_{vac}(\rho, t)}{\partial t} + c^2 q^2 C_{vac}(\rho, t) = cq K'_0(q\rho) \left(\frac{\partial A_{vac}(t)}{\partial t} - i\omega A_{vac}(t) \right), \quad (2.23)$$

де символ "штрих" біля спеціальних функцій означає похідну за аргументом. Підставивши в (2.13) вирази для полів (2.9), (2.10) і (2.18), (2.19), помноживши потім обидві частини рівності на $\exp[-i(q_z z - \omega t)]$ і виконавши усереднення за періодом $2\pi/\omega$, отримаємо

$$B_{vac}(\rho_0, t) - B_{cyl}(\rho_0, t) = \frac{1}{iq_z} [qK'_0(q\rho_0)A_{vac}(t) - \kappa J'_0(\kappa\rho_0)A_{cyl}(t)] - \frac{4\pi e}{c^2 q_z^2} \Gamma, \quad (2.24)$$

де

$$\Gamma = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{\partial^2 n(z, t)}{\partial t^2} \exp[-i(q_z z - \omega t)] dt. \quad (2.25)$$

Підстановка (2.14) в (2.25) при виконанні резонансу Вавилова–Черенкова $\omega = q_z v_0$

дає

$$\Gamma = -\frac{\omega^2 n_0 a}{M} \sum_{p=1}^M \exp \left[-i \frac{\omega}{v_0} \tilde{z}_p(z_0, v_0, t) \right]. \quad (2.26)$$

З виразів (2.9), (2.10) і граничної умови (2.11) знайдемо наступний зв'язок між амплітудами $A_{cyl}(t)$ і $A_{vac}(t)$:

$$A_{cyl}(t) J_0(\kappa \rho_0) = A_{vac}(t) K_0(q \rho_0). \quad (2.27)$$

Тоді, скориставшись виразом (2.27) з (2.24) одержимо

$$A_{cyl}(t) = \frac{i q_z \rho_0}{\Delta_0 J_0(\kappa \rho_0)} [B_{vac}(\rho_0, t) - B_{cyl}(\rho_0, t)] - \frac{4 \pi i e \rho_0}{c^2 q_z \Delta_0 K_0(q \rho_0)} \Gamma \quad (2.28)$$

і $A_{vac}(t) = A_{cyl}(t) J_0(\kappa \rho_0) / K_0(q \rho_0)$, $\Delta_0 = q \rho_0 Y_K - \kappa \rho_0 Y_J$, де $Y_K = K'_0(q \rho_0) / K_0(q \rho_0)$ і $Y_J = J'_0(\kappa \rho_0) / J_0(\kappa \rho_0)$. Підставивши (2.28) в рівняння (2.20)–(2.23), отримаємо замкнену систему рівнянь, що зв'язує між собою амплітуди $B_{cyl}(\rho_0, t)$, $B_{vac}(\rho_0, t)$, $C_{cyl}(\rho_0, t)$, $C_{vac}(\rho_0, t)$ і поверхневу густину пучка $n(z, t)$.

Представимо комплексні амплітуди полів, що розглянуті вище, в наступному вигляді:

$$A_{cyl, vac}(t) = F_{cyl, vac}(t) \exp[i \alpha_{cyl, vac}(t)], \quad (2.29)$$

$$B_{cyl, vac}(\rho_0, t) = G_{cyl, vac}(\rho_0, t) \exp[i(\chi_{cyl, vac}(t))], \quad (2.30)$$

$$C_{cyl, vac}(\rho_0, t) = P_{cyl, vac}(\rho_0, t) \exp[i(\psi_{cyl, vac}(t))], \quad (2.31)$$

де $\alpha_{cyl}(t)$, $\alpha_{vac}(t)$, $\chi_{cyl}(t)$, $\chi_{vac}(t)$, $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ являють собою фази, що повільно змінюються в часі, які задовольняють умовам аналогічним (2.17). Підставивши в граничну умову (2.27) представлення комплексних амплітуд (2.29), отримаємо: $F_{cyl}(t) J_0(\kappa \rho_0) = F_{vac}(t) K_0(q \rho_0)$ і $\alpha_{cyl}(t) = \alpha_{vac}(t) + 2\pi k, \forall k \in Z$. Надалі приймемо: $F_{vac}(t) = F(t)$ і $\alpha_{cyl}(t) = \alpha_{vac}(t) = \alpha(t)$ (для $k = 0$).

Система рівнянь (2.16) з урахуванням виразів (2.26), (2.28), (2.30), (2.31) переписеться у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t)}{dt} &= \tilde{v}_{zp}(z_0, \nu_0, t), \\ \frac{d\tilde{v}_{zp}(z_0, \nu_0, t)}{dt} &= \frac{eq_z \rho_0}{m_0 \Delta_0 K_0(q\rho_0)} \left[-G_{cyl}(\rho_0, t) \sin\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t) + \chi_{cyl}(t)\right) + \right. \\ &+ G_{vac}(\rho_0, t) \sin\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t) + \chi_{vac}(t)\right) - \\ &\left. - \frac{4\pi e \nu_0^2 n_0 a}{c^2 M} \left(\sigma_1(t) \cos\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t)\right) - \sigma_2(t) \sin\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t)\right) \right) \right], \end{aligned} \right. \quad (2.32)$$

де

$$\sigma_1(t) = \sum_{p=1}^M \cos\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t)\right), \quad \sigma_2(t) = \sum_{p=1}^M \sin\left(\frac{\omega}{\nu_0} \tilde{z}_p(z_0, \nu_0, t)\right).$$

Система рівнянь (2.20)–(2.23) з урахуванням виразів (2.26), (2.28), (2.30), (2.31) переписеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{cyl}(\rho_0, t)}{\partial t^2} &= \left[\left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2 \kappa \Delta_1}{\varepsilon \rho_0 \Delta_0} - \omega^2 \right] G_{cyl}(\rho_0, t) + \\ &+ \frac{c^2 q_z^2 \kappa \rho_0}{\varepsilon \Delta_0} Y_J G_{vac}(\rho_0, t) \cos(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) - \frac{A_0 Y_J S_{cyl}(t)}{\varepsilon M}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{cyl}(t)}{\partial t^2} &= 2 \left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right) \frac{1}{G_{cyl}(\rho_0, t)} \frac{\partial G_{cyl}(\rho_0, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{c^2 q_z^2 \kappa \rho_0}{\varepsilon \Delta_0} Y_J \frac{G_{vac}(\rho_0, t)}{G_{cyl}(\rho_0, t)} \sin(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) + \frac{A_0 Y_J U_{cyl}(t)}{\varepsilon M G_{cyl}(\rho_0, t)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{vac}(\rho_0, t)}{\partial t^2} &= \left[\left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2 q \Delta_2}{\rho_0 \Delta_0} - \omega^2 \right] G_{vac}(\rho_0, t) - \\ &- \frac{c^2 q_z^2 q \rho_0}{\Delta_0} Y_K G_{cyl}(\rho_0, t) \cos(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) - \frac{A_0 Y_K S_{vac}(t)}{M}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{vac}(t)}{\partial t^2} &= 2 \left(\omega - \frac{\partial \chi_{vac}(t)}{\partial t} \right) \frac{1}{G_{vac}(\rho_0, t)} \frac{\partial G_{vac}(\rho_0, t)}{\partial t} + \\ &+ \frac{c^2 q_z^2 q \rho_0}{\Delta_0} Y_K \frac{G_{cyl}(\rho_0, t)}{G_{vac}(\rho_0, t)} \sin(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) + \frac{A_0 Y_K U_{vac}(t)}{M G_{vac}(\rho_0, t)}, \end{aligned} \quad (36)$$

де

$$A_0 = \frac{4\pi\epsilon\kappa\omega^3 n_0 a \rho_0}{\Delta_0 v_0 q_z},$$

$$\Delta_1 = q\kappa\rho_0^2 Y_K - \epsilon\rho_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} Y_J,$$

$$\Delta_2 = \rho_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} Y_K + q\kappa\rho_0^2 Y_J,$$

$$S_{cyl,vac}(t) = \sum_{p=1}^M \cos\left(\frac{\omega}{v_0} \tilde{z}_p(z_0, v_0, t) + \chi_{cyl,vac}(t)\right),$$

$$U_{cyl,vac}(t) = \sum_{p=1}^M \sin\left(\frac{\omega}{v_0} \tilde{z}_p(z_0, v_0, t) + \chi_{cyl,vac}(t)\right),$$

Вирішивши систему рівнянь (2.33)–(2.36) і скориставшись співвідношенням (28), можна знайти часову залежність амплітуди $F(t)$ поздовжньої компоненти електричного поля на межі циліндра. Для того щоб описувати часову еволюцію амплітуд $P_{cyl}(\rho_0, t)$, $P_{vac}(\rho_0, t)$ і фаз $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ магнітного поля хвиль, рівняння (2.22) і (2.23) записуються у вигляді аналогічній системі рівнянь (2.33)–(2.36). Відповідні рівняння ми наводити не будемо, оскільки вони мають громіздкість. В результаті, ми маємо систему рівнянь, з вирішення якої ми знаходимо амплітуди полів, що повільно змінюються: $E_\rho^{cyl}(\rho_0, z, t)$, $E_\rho^{vac}(\rho_0, z, t)$, $H_\phi^{vac}(\rho_0, z, t)$, $H_\phi^{cyl}(\rho_0, z, t)$ і $E_z^{cyl}(\rho_0, z, t) = E_z^{vac}(\rho_0, z, t)$.

Для чисельного розв'язання зазначеної вище системи рівнянь зручно ввести в розгляд безрозмірні амплітуди полів. Для цього амплітуди всіх полів будемо нормувати на деяку величину, що має сенс деякого характерного максимального значення. Цю величину знаходимо з умови, що середня за період хвилі енергія електромагнітних хвиль, що збуджуються пучком, на нелінійній стадії нестійкості є величиною порядку кінетичної енергії пучка в системі відліку, що пов'язана з хвилею. Ця умова відповідає захопленню частинок пучка полем збуджувальної хвилі. Оцінимо по порядку величини середньої енергії електромагнітних хвиль у вільному просторі за умови, що $\rho = \rho_0$ і знехтування повільної залежності амплітуд полів від часу:

$$W^{vac}(\rho_0) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}^{vac}(\rho_0, z, t) \mathbf{E}^{*vac}(\rho_0, z, t) + \mathbf{H}^{vac}(\rho_0, z, t) \mathbf{H}^{*vac}(\rho_0, z, t) \right\},$$

де "*" — символ комплексного спрягання. Відповідно до сказаного вище маємо:

$$W^{vac}(\rho_0) \propto m_0 n_0 (v_0 - v_{ph})^2,$$

де v_{ph} — фазова швидкість хвилі, що збуджується пучком. Скориставшись рівняннями Максвелла (2.7), (2.8) при $\varepsilon=1$ і визначеннями полів (2.9), (2.10), (2.18), (2.19) і (2.29)–(2.31) для $W^{vac}(\rho_0)$ отримаємо:

$$W^{vac}(\rho_0) = \frac{\kappa^2}{8\pi q^2} \left(\frac{Y_K}{Y_J} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{\omega}{cq_z} \right)^2 + \left(\frac{q}{q_z Y_K} \right)^2 \right] (G_{cyl}^{max})^2,$$

де G_{cyl}^{max} — максимальне (по порядку величини) значення амплітуди $G_{cyl}(\rho_0, t)$.

Знайдемо вираз для фазової швидкості хвилі v_{ph} . Використовуючи результати роботи [14], дисперсійне рівняння зв'язаних хвиль пучка і діелектричного циліндра для розглянутого випадку аксіально-симетричних хвиль можна представити у вигляді

$$\left(\frac{1}{q\rho_0} Y_K + \frac{\varepsilon}{\kappa\rho_0} Y_J \right) (\omega - q_z v_0)^2 = -\frac{a}{\rho_0} \omega_b^2,$$

де $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_0}$ — плазмова частота електронів пучка. Зауважимо, що вираз в першій скобці в лівій частині цього рівняння, прирівняний до нуля, є дисперсійне рівняння власної аксіально-симетричної хвилі Е-типу діелектричного циліндра. Слідуючи методиці роботи [47] для знаходження інкремента виникаючої нестійкості γ , отримаємо

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} (a\omega_R \omega_b^2)^{1/3} \left[\rho_0 (\varepsilon - 1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta^2 \varepsilon - 1} \frac{J_1^2(\kappa\rho_0)}{J_0^2(\kappa\rho_0)} \right) \right]^{-1/3},$$

де $\beta = v_0/c$; $\kappa \equiv \kappa(q_z, \omega_R) = \omega_R \sqrt{\beta^2 \varepsilon - 1} / v_0$; $\omega_R = q_z v_0$. Тоді для v_{ph} маємо $v_{ph} = v_0 - \gamma / \sqrt{3} q_z$, що відповідає повільній зв'язаній хвилі. В результаті, отримуємо такий вираз для G_{cyl}^{max} :

$$G_{cyl}^{\max} = \frac{2\gamma q \sqrt{2\pi m_0 n_0}}{\kappa \sqrt{3} q_z} \left| \frac{Y_J}{Y_K} \right| \left[1 + \left(\frac{\omega}{c q_z} \right)^2 + \left(\frac{q}{q_z Y_K} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (2.37)$$

Нижче буде наведено чисельний аналіз часової залежності повільно-змінюючихся амплітуд полів електромагнітних хвиль, що нормовані на величину (2.37), яку взяту для фіксованих значень v_0 , q_z (при виконанні умови $\omega = q_z v_0$) і радіального модового індексу s , який відповідає кількості варіацій поля уздовж радіальної координати ρ .

2.2 Аналіз системи нелінійних рівнянь

Чисельний аналіз системи рівнянь (2.32)–(2.36) і відповідних рівнянь для амплітуд $P_{cyl}(\rho_0, t)$, $P_{vac}(\rho_0, t)$ і фаз $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ магнітного поля хвилі будемо проводити, використовуючи наступні безрозмірні величини: $\tau = \omega_0 t$; $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$; $\bar{\omega}_b = \omega_b/\omega_0$; $\bar{\gamma} = \gamma/\omega_0$; $\bar{q}_z = q_z \rho_0$; $\bar{\kappa} = \kappa \rho_0$; $\bar{z}_p = q_z \tilde{z}_p$; $\bar{v}_p = q_z \tilde{v}_{zp}/\omega$;

$$|\bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau)| = |\bar{E}_z^{cyl}(\rho_0, \tau)| = \frac{F_{vac}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{\max}} K_0(q \rho_0); \quad (2.38)$$

$$|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)| = \frac{G_{cyl}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{\max}}; \quad |\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)| = \frac{G_{vac}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{\max}}; \quad (2.39)$$

$$|\bar{H}_\varphi^{cyl}(\rho_0, \tau)| = \frac{P_{cyl}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{\max}}; \quad |\bar{H}_\varphi^{vac}(\rho_0, \tau)| = \frac{P_{vac}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{\max}}. \quad (2.40)$$

де $\omega_0 = c/\rho_0$. Як матеріал діелектричного циліндра виберемо полікор з $\varepsilon = 9.6$, а радіус циліндра $\rho_0 = 0.5$ см. Значення концентрації електронів пучка n_0 , товщини стінки пучка a і швидкості спрямованого руху електронів пучка v_0 виберемо наступними: $n_0 = 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $a = 10^{-3} \text{ см}$ і $v_0 = 0.48c$ відповідно. Для обраних параметрів системи маємо $\omega_0 = 6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\omega_b/\omega_0 \approx 0.1$. Аналіз часової залежності безрозмірних амплітуд полів (2.38)–(2.40) проведемо для трьох значень радіального модового індексу $s = 1, 2, 3$. Резонансні значення q_z і ω , що відповідають точкам перетину дисперсійних кривих власних азимутально-

симетричних мод розглянутого циліндра і залежності $\omega = q_z v_0$, рівні (див. [47]): $\bar{q}_z \approx 3,3$; $\bar{\omega} \approx 1,6$; $\bar{\gamma} \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 9,56 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $\lambda \approx 0,95 \text{ см}$) для $s=1$; $\bar{q}_z \approx 6,15$; $\bar{\omega} \approx 2,98$; $\bar{\gamma} \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 1,79 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $\lambda \approx 0,5 \text{ см}$) для $s=2$, $\bar{q}_z \approx 8,97$; $\bar{\omega} \approx 4,35$; $\bar{\gamma} \approx 1,7 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 2,6 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, $\lambda \approx 0,35 \text{ см}$) для $s=3$, де $\lambda = 2\pi/q_z$ — довжина хвилі. Величину G_{cyl}^{\max} вичислимо для значень \bar{q}_z і $\bar{\omega}$, що відповідні значенням $s=1$: $G_{cyl}^{\max} \approx 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ CGS}$ (або $G_{cyl}^{\max} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ В/см}$).

На рис. 2.1, рис. 2.2 і рис. 2.3 наведено залежності $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{H}_\phi^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{H}_\phi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ від безрозмірного часу τ для хвиль із значенням радіального модового індексу $s=1$ (хвилі $E_{0,1}$), $s=2$ (хвилі $E_{0,2}$) і $s=3$ (хвилі $E_{0,3}$) відповідно. Тут ми використовуємо позначення для власних мод циліндра $E_{n,s}$, що прийняті в роботі [48]. Перший індекс n відповідає половині кількості варіацій поля за азимутальним кутом ϕ ($n=0$ для азимутально-симетричної хвилі), а другий індекс s — радіальний модовий індекс.

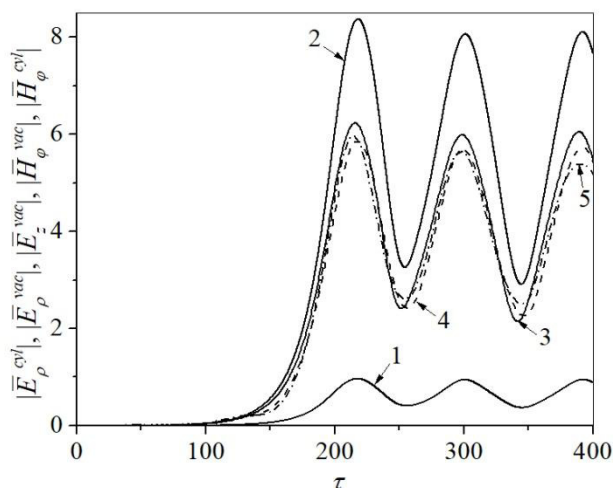


Рисунок 2.1. Графік залежностей повільних амплітуд електричного і магнітного полів хвилі $E_{0,1}$ від безрозмірного часу

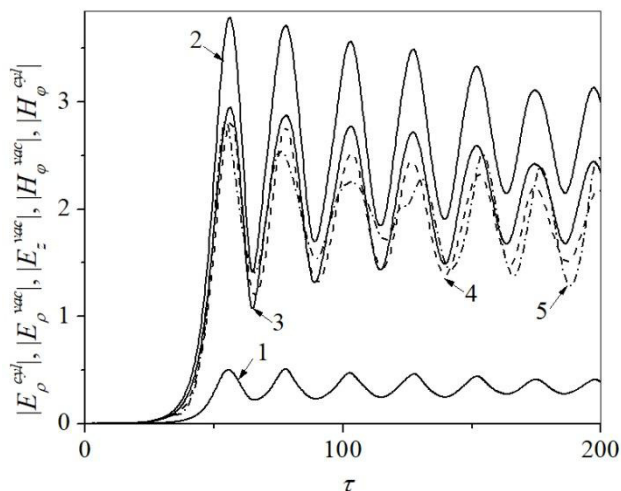


Рисунок 2.2. Графік залежностей повільних амплітуд електричного і магнітного полів хвилі E_{02} від безрозмірного часу

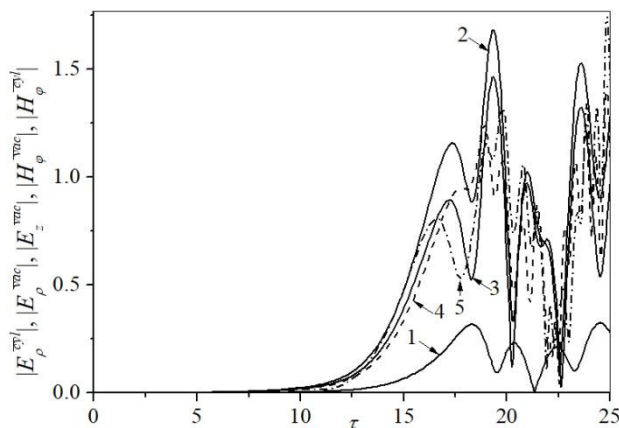


Рисунок 2.3. Графік залежностей повільних амплітуд електричного і магнітного полів хвилі E_{03} від безрозмірного часу

На рис. 2.1–2.3 крива 1 відповідає залежності $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$, крива 2 — залежності $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$, крива 3 — залежності $|\bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau)|$, крива 4 — залежності $|\bar{H}_\phi^{vac}(\rho_0, \tau)|$, крива 5 — залежності $|\bar{H}_\phi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$. Розв'язання даної системи рівнянь для амплітуд і фаз полів, що повільно змінюються в часі, було виконано чисельно

методом Рунге–Кутта. Пучок електронів моделювався окремими макрочастинками (у формі кілець), які в початковий момент часу рівномірно розподілені в інтервалі $0 \leq \bar{z}_p \leq 2\pi$. Число макрочастинок M дорівнювало 8000. Відзначимо, що використана програма обчислень дозволяла проводити інтегрування зі змінним кроком шляхом завдання відносної похибки на кожному кроці. Початкові значення безрозмірних амплітуд полів (2.38)–(2.40) покладалися рівними 10^{-12} , а їх похідних за часом — добутку їх початкових значень на безрозмірний інкремент $\bar{\gamma}$, що відповідав кожному типу хвилі. Початкові значення повільних фаз і їх похідних покладалися рівними нулю.

З рис. 2.1–2.3 видно, що для хвилі E_{0_1} час насичення нестійкості $\tau_1 \approx 217$ (або $t_1 = \tau_1/\omega_0 \approx 3.6$ нс) приблизно в 3.8 рази більше, ніж для хвилі E_{0_2} ($\tau_2 \approx 56$, або $t_2 = \tau_2/\omega_0 \approx 0.94$ нс) і приблизно в 12.5 рази більше, ніж для хвилі E_{0_3} ($\tau_3 \approx 17.3$, або $t_3 = \tau_3/\omega_0 \approx 0.07$ нс). До цього моменту часу відбувається захоплення частинок пучка полем збуджувальної хвилі і припиняється подальше зростання амплітуди поля, що відповідає лінійній стадії розвитку нестійкості. Аналіз наведених на рис. 1–3 залежностей показує, що амплітуди насичення нестійкості електричного і магнітного полів для хвилі E_{0_1} приблизно в 2.2 рази більше відповідних значень для хвилі E_{0_2} і приблизно в 7.3 рази більше, ніж для хвилі E_{0_3} . При цьому, "період" осциляцій цих амплітуд на нелінійній стадії насичення нестійкості для хвилі E_{0_1} приблизно в 3.8 рази більше, ніж для хвилі E_{0_2} і приблизно в 40 раз більше, ніж для хвилі E_{0_3} . Так, для хвилі E_{0_1} цей період приблизно дорівнює $T_1 \approx 1.38$ нс, для хвилі E_{0_2} — $T_2 \approx 0.36$ нс, а для хвилі E_{0_3} — $T_3 \approx 0.033$ нс. Отже, можна зробити висновок про те, що з ростом радіального модового індексу s часи насичення нестійкості, а також відповідні їм значення повільних амплітуд і "періоди" осциляцій цих амплітуд на нелінійній стадії насичення нестійкості зменшуються. Зауважимо, що зі збільшенням радіального модового індексу s час насичення нестійкості і "період" нелінійних осциляцій повільних амплітуд зменшуються приблизно в однакове число разів.

З рис. 1–3 видно також, що найбільшою виявляється амплітуда осциляцій величини $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$ (криві 2). Ставлення максимальних амплітуд насичення нестійкості величин $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$ і $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ для хвилі $E_{0,1}$ приблизно дорівнює 8.7, для хвилі $E_{0,2}$ — приблизно 7.6, а для хвилі $E_{0,3}$ — приблизно 3.6. Стосовно граничної умові (2.12) це означає, що "внесок пучка" в величину стрибка радіальної компоненти електричного поля хвилі зростає зі збільшенням значення радіального модового індексу s . Аналіз стрибків залежностей $|\bar{H}_\phi^{vac}(\rho_0, \tau)|$ і $|\bar{H}_\phi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ для хвиль $E_{0,1}$, $E_{0,2}$ і $E_{0,3}$ призводить до аналогічного висновку.

З порівняння рис. 1, рис. 2 і рис. 3 видно, що осциляції повільних амплітуд на рис. 3 носять нерегулярний характер. Ймовірною причиною цього є те, що "період" нелінійних осциляцій для $s=3$ виявляється порівняним з періодом збудженої хвилі: $\omega_0 T_3 \approx 2$ і $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 1.44$, де частота ω відповідає хвилі $E_{0,3}$. Це означає порушення умови (2.17), яка є фактично умовою "повільності" зміни амплітуд полів у часі. Це може свідчити про те, що при використанні методу повільно-змінюючихся амплітуд і фаз перестає бути придатним для хвиль зі значеннями радіального модового індексу, що перевищують деякі "критичні" значення. Для обраних параметрів циліндра і пучка це значення дорівнює $s_{cr} = 2$. Дійсно, для $s=2$ маємо $\omega_0 T_2 \approx 21$, що в 7 разів перевищує величину $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 3$, де частота ω відповідає хвилі $E_{0,2}$, а для $s=1$ маємо $\omega_0 T_1 \approx 83$, що в майже в 52 рази перевищує величину $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 1.6$, де частота ω відповідає хвилі $E_{0,1}$. Тут величина $\omega_0(2\pi/\omega)$ є безрозмірний період "швидких" осциляцій полів збудженої хвилі з резонансною частотою ω .

Розглянемо питання про поляризацію хвиль, що збуджуються пучком. Для цього, використовуючи підхід, що розвинений в [49], запишемо рівняння еліпса для безрозмірних компонентів полів $\Lambda_z = \text{Re } E_z(\rho_0, \tau) / \Phi(\rho_0, \tau)$ і $\Lambda_\rho = \text{Re } E_\rho(\rho_0, \tau) / \Phi(\rho_0, \tau)$:

$$\Lambda_z^2 + \Lambda_\rho^2 - 2\Lambda_z \Lambda_\rho \cos[\alpha(\tau) - \chi(\tau)] = \sin^2[\alpha(\tau) - \chi(\tau)], \quad (2.41)$$

де $\Phi(\rho_0, \tau) = F_{vac}(\rho_0, \tau)K_0(q\rho_0)$ для вільного простору і для області циліндра (в силу граничної умови (2.11)). Випишемо вираз для коефіцієнта поляризації:

$$\mathfrak{Z}(\tau) = \frac{E_z(\rho_0, \tau)}{E_\rho(\rho_0, \tau)} = \frac{\Phi(\rho_0, \tau)}{G(\rho_0, \tau)} \exp\{i\pi\eta(\tau)\},$$

де $\eta(\tau) = [\alpha(\tau) - \chi(\tau)]/\pi$. Нагадаємо, що в області циліндра $\chi(\tau) = \chi_{cyl}(\tau)$ і ми розглядаємо величину $\eta_{cyl}(\tau)$, в вільному просторі маємо $\chi(\tau) = \chi_{vac}(\tau)$ і ми розглядаємо величину $\eta_{vac}(\tau)$. Зауважимо, як впливає з (2.41), поляризація хвилі може змінюватися з часом. Крім цього, з рис. 1 і рис. 2.2 видно, що $\Phi(\rho_0, \tau)/G(\rho_0, \tau) > 1$ (тобто $|\mathfrak{Z}(\tau)| > 1$) для області циліндра і $\Phi(\rho_0, \tau)/G(\rho_0, \tau) < 1$ (тобто $|\mathfrak{Z}(\tau)| < 1$) для вільного простору.

На рис. 2.4 представлено залежності $\eta_{cyl}(\tau)$ (крива 1) і $\eta_{vac}(\tau)$ (крива 2) для хвилі E_{01} . З рис. 2.4 видно, що різниця фаз $\eta_{cyl}(\tau)$ для електричного поля в циліндрі осцилює і змінюється в межах $-1 < \eta_{cyl}(\tau) \leq 1.011$. Це означає, що поляризація електричного поля в циліндрі змінюється з часом і може бути як лінійною при $\eta_{cyl}(\tau) = 0$ і $\eta_{cyl}(\tau) = 1$, так і еліптичною при інших значеннях $\eta_{cyl}(\tau)$ (з урахуванням того, що в циліндрі $|\mathfrak{Z}(\tau)| > 1$). Зміна знака $\eta_{cyl}(\tau)$ означає зміну напрямку обертання вектора електричного поля хвилі в площині (ρ, z) . Так, при $\eta_{cyl}(\tau) > 0$ вектор електричного поля хвилі обертається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця одиничного вектора, що визначає позитивний напрямок осі φ .

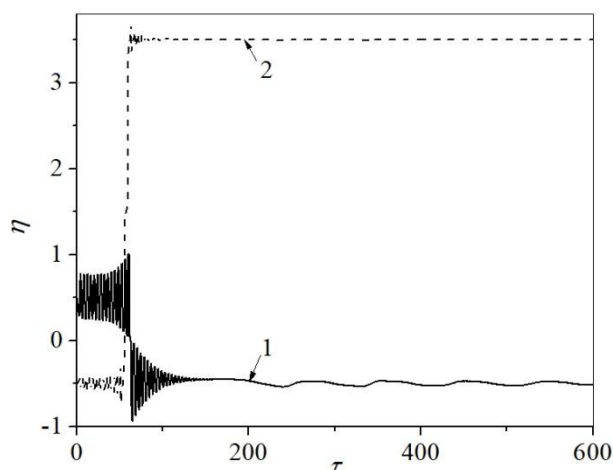


Рисунок 2.4. Графік залежностей різниці фаз $\eta(\tau)$ компонент електричного поля $E_{\rho}^{cyl}(\rho_0, \tau)$ і $E_z^{vac}(\rho_0, \tau)$ хвилі E_{01} для області циліндра (крива 1) і вільного простору (крива 2) від безрозмірного часу

Подібним чином поводить ся залежність $\eta_{vac}(\tau)$. У моменти часу, коли $\eta_{vac}(\tau)$ дорівнює 0,1,2,3 поляризація хвилі лінійна, а в інші моменти часу — еліптична. Цікаво відзначити, що на нелінійній стадії нестійкості, при $\tau > \tau_1 \approx 217$, різниця фаз $\eta_{vac}(\tau)$ з хорошою точністю (похибка приблизно становить 0.1%) збігається зі значенням 3.5, залишаючись при цьому осцилюючою залежністю від часу. Це свідчить про те, що поляризація хвилі в вільному просторі — еліптична ($|\mathfrak{I}(\tau)| < 1$), а осі еліпса практично збігаються з осями координат ρ і z . Дійсно, при $\eta_{vac}(\tau) = 3.5$ рівняння (2.41) переходить в рівняння еліпса. Звертає на себе увагу також те, що на нелінійній стадії нестійкості (при $\tau > \tau_1 \approx 217$) знаки $\eta_{cyl}(\tau)$ і $\eta_{vac}(\tau)$ протилежні. Фізично, це означає, що в циліндрі і у вільному просторі в хвилі E_{01} напрямки обертання вектора електричного поля є протилежні.

На рис. 2.5 представлено залежності $\eta_{cyl}(\tau)$ (крива 1) і $\eta_{vac}(\tau)$ (крива 2) для хвилі E_{02} . З рис. 2.5 видно, що якісна поведінка цих залежностей є аналогічною наведеним вище залежностям для хвилі E_{01} . Порівняння залежностей $\eta_{cyl}(\tau)$ і

$\eta_{vac}(\tau)$ на рис. 2.4 і рис. 2.5 призводить до висновку про те, що для хвиль з різними значеннями радіального модового індексу s на нелінійній стадії нестійкості напрямки обертання вектора електричного поля в області циліндра збігаються ($\eta_{cyl}(\tau) < 0$ для хвиль $E_{0,1}$ і $E_{0,2}$), а у вільному просторі виявляються протилежними ($\eta_{vac}(\tau) > 0$ для хвилі $E_{0,1}$ і $\eta_{vac}(\tau) < 0$ для $E_{0,2}$). Крім цього, у вільному просторі головні осі еліпса поляризації практично збігаються з осями координат ρ і z .

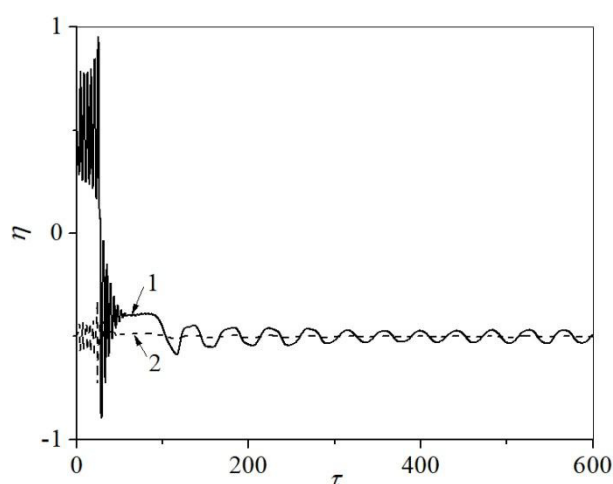


Рисунок 2.5. Графік залежностей різниці фаз $\eta(\tau)$ компонент електричного поля $E_{\rho}^{cyl}(\rho_0, \tau)$ і $E_z^{vac}(\rho_0, \tau)$ хвилі $E_{0,2}$ для області циліндра (крива 1) і вільного простору (крива 2) від безрозмірного часу

2.3 Висновки до розділу

Розглянуто задачу про нелінійну стабілізацію нестійкості трубчастого електронного пучка при його русі вздовж поверхні твердотілого діелектричного циліндра. Пучок покладался нерелятивістським, нескінченно тонким в радіальному напрямку, рухомим уздовж силових ліній нескінченно сильного постійного магнітного поля на малих (в порівнянні з довжиною збуджувальної хвилі) прицільних відстанях від поверхні циліндра. Розглянуто збудження

азимутально-симетричних об'ємно-поверхневих електромагнітних хвиль E-типу при виконанні умови резонансу Вавилова–Черенкова. Розрахунок виконано з використанням амплітуд і фаз, що повільно змінюються, електричного і магнітного полів хвилі. Для цих величин з рівнянь Максвелла, матеріальних рівнянь і граничних умов було отримано відповідну систему диференціальних рівнянь, яка вирішувалася методом Рунге–Кутта з перемінним кроком. При цьому пучок представлявся у вигляді набору макрочастинок — заряджених кілець. Показано, що в результаті нелінійних процесів відбувається зменшення частоти збуджувальних електромагнітних хвиль. Аналіз залежностей амплітуд, що повільно змінюються, від часу показав, що зі збільшенням радіального модового індексу s час насичення нестійкості, максимальні значення і "період" осциляцій амплітуд на нелінійній стадії насичення нестійкості зменшуються. Встановлено, що метод повільно-змінюючихся амплітуд і фаз перестає бути придатним для хвиль із значеннями радіального модового індексу, що перевищують деяке "критичне" значення, для якого характерний "період" осциляцій амплітуд полів на нелінійній стадії нестійкості стає таким же як період "швидких" осциляцій хвилі, що збуджується.

Аналіз залежностей різниць повільних фаз радіальної і аксіальної компоненти електричного поля хвиль $E_{0,1}$ і $E_{0,2}$ від безрозмірного часу τ показав, що на нелінійній стадії нестійкості поляризація хвиль — еліптична. Причому, напрямки обертання векторів електричних полів $E_{0,1}$ - і $E_{0,2}$ -хвиль в області циліндра збігаються, а у вільному просторі виявляються протилежними. Крім цього, у вільному просторі головні осі еліпса поляризації з хорошою точністю збігаються з осями координат ρ і z .

3 НЕЛІНІЙНА СТАБІЛІЗАЦІЯ РЕЗИСТИВНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ТРУБЧАТОГО ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ЯКИЙ ОБДУВАЄ ТВЕРДОТІЛЬНИЙ ПЛАЗМОВИЙ ЦИЛІНДР

3.1 Постановка завдання і основні рівняння

Розглянемо твердотільний плазмовий циліндр, який в циліндричній системі координат займає простір $0 \leq \rho \leq \rho_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ і $|z| < \infty$ (вісь Z направлена уздовж осі циліндра). Уздовж його поверхні рухається пучок електронів з густиною n_0 і швидкістю $v_0 \ll c$ (де c — швидкість світла у вакуумі). Така електродинамічна система є подібною до системи, що розглянуто у попередньому розділі, в якій електронний пучок з радіусом $\rho_0 + a/2$ та товщиною a , що вважається нескінченно малою, обдуває плазмовий циліндр, при цьому рухаючись у вільному просторі $\rho > \rho_0$. Безпосередній контакт між пучком і поверхнею циліндра відсутній.

Система рівнянь, що характеризує взаємодію електронного пучка і полів власних хвиль плазмового циліндра, являє собою рівняння електростатики, що доповнені матеріальним рівнянням і рівнянням руху електронів плазми

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi e n(\mathbf{r}, t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi e N_0 \int_{-\infty}^t \mathbf{u}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \nu \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (3.4)$$

де $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напруженість електричного поля в точці з радіус-вектором \mathbf{r} в момент часу t ; $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ — вектор електричної індукції; e — заряд електрона; $n(\mathbf{r}, t)$ —

густина електронів пучка; ε_0 , N_0 , m , ν і $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — діелектрична стала решітки, густина електронів, ефективна маса електрона, частота релаксації імпульсу електронів і швидкість електронів плазми відповідно.

Густина електронів пучка $n(\mathbf{r}, t)$ визначається наступним образом:

$$n(\mathbf{r}, t) = n(z, t)\delta(\rho - \rho_0),$$

де $n(z, t)$ — поверхнева густина електронів пучка; $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака.

При цьому

$$n(z, t) = \int f(z, t, v_z) dv_z, \quad (3.5)$$

де функція розподілу електронів пучка $f(z, t, v_z)$ задовольняє рівнянню Власова

$$\frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial t} + v_z(t) \frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial z} + \frac{e}{m_0} E_z(\rho_0, z, t) \frac{\partial f(z, t, v_z)}{\partial v_z} = 0,$$

в якому m_0 — маса електрона, $E_z(\rho_0, z, t)$ — електричне поле на боковій поверхні пучка $\rho = \rho_0$. У момент часу $t = 0$, тобто до розвитку нестійкості, функція розподілу $f(z, 0, v_z)$ є

$$f(z, 0, v_z) \equiv f_0(v_z) = n_0 a \delta(v_z - v_0),$$

де n_0 — об'ємна густина електронів пучка. Розглянемо електростатичні азимутально-симетричні хвилі і введемо потенціал електричного поля $\psi(\rho, z, t)$ так, що

$$\mathbf{E}(\rho, z, t) = -\nabla \psi(\rho, z, t). \quad (3.6)$$

Потенціал хвилі $\psi(\rho, z, t)$ і його похідна за радіальною координатою $\partial \psi(\rho, z, t) / \partial \rho$ задовольняють граничним умовам на поверхні циліндра $\rho = \rho_0$: безперервності потенціалу і стрибка його похідної із-за наявності заряду пучка $en(z, t)$ на його поверхні. Ці умови є еквівалентні умовам безперервності z -компоненти електричного поля і стрибка ρ -компоненти електричної індукції

$$\begin{aligned} E_z(\rho_0 + 0, z, t) &= E_z(\rho_0 - 0, z, t), \\ E_\rho(\rho_0 + 0, z, t) - D_\rho(\rho_0 - 0, z, t) &= 4\pi en(z, t). \end{aligned}$$

Таким чином, на боковій поверхні циліндра маємо

$$\psi(\rho_0 - 0, z, t) = \psi(\rho_0 + 0, z, t). \quad (3.7)$$

Для того, щоб отримати умову для $\partial\psi(\rho, z, t)/\partial\rho$, продиференціюємо за часом рівняння (3.2) і, беручи до уваги рівняння (3.3) та (3.4) для випадку сильних зіткнень, тобто коли виконується умова

$$v|\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| \ll \left| \frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|,$$

отримаємо

$$\varepsilon_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial t} = -\frac{\omega_p^2}{v} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(\rho, z, t) - 4\pi e \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

де $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_0 / m}$ — плазмова частота середовища циліндра. Обчислюючи інтеграли виду

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\rho_0 - \eta}^{\rho_0 + \eta} (...) \rho d\rho$$

від обох частин наведеної вище рівності по нескінченно малій товщині пучка η , отримуємо граничну умову для похідної потенціалу за радіальною координатою

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0+0} - \varepsilon_0 \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0-0} = \frac{\omega_p^2}{v} \left. \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0-0} - 4\pi e \frac{\partial n(z, t)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Дотримуючись робіт [14, 15, 38], поверхневу густину $n(z, t)$ можна представити у вигляді

$$n(z, t) = \frac{2\pi n_0 a}{qM} \sum_{p=1}^M \delta[z - z_p(z_0, v_0, t)]. \quad (3.9)$$

Вираз (3.9) показує той факт, що безперервний трубчастий потік електронів представляється у вигляді набору макрочастинок (заряджених кілець), число яких дорівнює M на довжині хвилі. Координата $z_p(z_0, v_0, t)$ описує положення окремої p -й макрочастинки. Відзначимо, що координата $z_p(z_0, v_0, t)$ і швидкість $v_{zp}(z_0, v_0, 0)$ p -й макрочастинки є рішеннями системи характеристичних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dz_p(z_0, v_0, t)}{dt} = v_z(z_0, v_0, t) \\ \frac{dv_z(z_0, v_0, t)}{dt} = -\frac{e}{m_0} \frac{\partial\psi(\rho, z, t)}{\partial z} \end{cases}$$

з початковими умовами

$$z(z_0, v_0, 0) = z_0, \quad v_z(z_0, v_0, 0) = v_0. \quad (3.10)$$

Аналіз часової еволюції амплітуди і фази хвилі, а також координат і швидкостей макрочастинок будемо проводити в системі координат, що пов'язана з пучком.

Для цього виконаємо заміну

$$z_p(z_0, v_0, t) = v_0 t + \tilde{z}_p(z_0, v_0, t), \quad (3.11)$$

$$v_{zp}(z_0, v_0, t) = v_0 + \tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, t), \quad (3.12)$$

де $\tilde{z}_p(z_0, v_0, t)$ і $\tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, t)$ — збурення координати і поздовжньої швидкості p -й макрочастинки. Тоді початкові умови (3.10) будуть мати у вигляді

$$\tilde{z}_p(z_0, v_0, 0) = \tilde{z}_{p0}, \quad \tilde{v}_{zp}(z_0, v_0, 0) = 0.$$

Потенціал $\psi(\rho, z, t)$ представимо у вигляді

$$\psi(\rho, z, t) = \psi_0(\rho) \psi_A(t) \exp\{i[q_z z - \omega t + \alpha(t)]\}, \quad (3.13)$$

де q_z і ω — хвильовий вектор і частота електростатичної хвилі, що зв'язані зі швидкістю електронів пучка умовою резонансу Вавилова–Черенкова $\omega = q_z v_0$.

Величини $\psi_A(t)$ і $\alpha(t)$ в (3.13) є амплітуда і фаза, що повільно змінюються, електростатичної хвилі. Відповідні умови «повільності» мають вигляд

$$\frac{1}{\psi_A(t)} \frac{\partial \psi_A(t)}{\partial t} \ll \omega, \quad \frac{1}{|\alpha(t)|} \left| \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \right| \ll \omega.$$

Враховуючи (3.13), з рівнянь (3.3) і (3.4) для розглянутого випадку сильних зіткнень отримаємо $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$, де

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega}, \quad (3.14)$$

$\sigma = e^2 N_0 / m v$ — провідність плазмового циліндра. Величина $\psi_0(\rho)$ задовольняє рівнянню Лапласа, в яке трансформується рівняння (3.1) після підстановки в нього виразів (3.6) і (3.13):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi_0(\rho)}{\partial \rho} \right) - q_z^2 \psi_0(\rho) = 0. \quad (3.15)$$

Враховуючи, що величини $\psi_0(\rho)$ є кінцевими при $\rho \rightarrow 0$ і $\rho \rightarrow \infty$, рішення рівняння (3.15) можна представити у вигляді

$$\psi_0(\rho) = \begin{cases} I_0(q\rho), & \rho < \rho_0, \\ K_0(q\rho), & \rho > \rho_0, \end{cases} \quad (3.16)$$

де $q = |q_z|$, $I_0(q\rho)$ і $K_0(q\rho)$ — модифіковані функції Бесселя нульового порядку першого (функція Інфельда) і другого (функція Макдональда) роду відповідно [39].

Наша задача полягає в тому, щоб дослідити часову еволюцію величин $\psi_A(t)$ і $\alpha(t)$.

Скориставшись виразами (3.13) і (3.16), з граничної умови (3.7) отримаємо наступні співвідношення для амплітуд потенціалів $\psi_A(t)$ і фаз $\alpha(t)$ в області циліндра і у вільному просторі:

$$\psi_A(t)|_{\rho_0-0} = \frac{K_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} \psi_A(t)|_{\rho_0+0}, \quad (3.17)$$

$$\alpha(t)|_{\rho_0-0} = \alpha(t)|_{\rho_0+0}. \quad (3.18)$$

Далі будемо аналізувати часову еволюцію амплітуди $\psi_A(t)$ і фази $\alpha(t)$ потенційної хвилі у вільному просторі (тобто в області $\rho > \rho_0$).

Скориставшись виразами (3.13), (3.15) і співвідношеннями (3.17) і (3.18), перепишемо граничну умову (3.8) у вигляді

$$\left[\Delta_0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\omega_p^2}{\nu} \Delta_1 \right] \psi_A(t) \exp \{i[q_z z - \omega t + \alpha(t)]\} = \frac{4\pi e}{qK_0(q\rho_0)} \frac{\partial n(z,t)}{\partial t}, \quad (3.19)$$

де $\Delta_0 = \varepsilon_0 \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} - \frac{K'_0(q\rho_0)}{K_0(q\rho_0)}$, $\Delta_1 = \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)}$. Символ «штрих» означає похідну

відповідної спеціальної функції за аргументом.

Далі, слідуючи методикою роботи [16], підставляємо (3.9) в (3.19) і виконуємо інтегрування отриманого рівняння за періодом коливань $2\pi/\omega$, беручи до уваги умову резонансу Вавилова–Черенкова $\omega = q_z v_0$. Потім розділивши дійсні та уявні частини і врахувавши співвідношення (3.11) і (3.12), отримаємо систему рівнянь, що описує часові еволюції амплітуди і фази хвилі, а також координат і швидкостей макрочастинок

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi_A(t)}{dt} &= -\frac{\omega_p^2}{v} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \psi_A(t) - \frac{4\pi en_0 a \omega}{q\Delta_0 K_0(q\rho_0) M} \sum_{p=1}^M \sin[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)], \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \omega - \frac{4\pi en_0 a \omega}{q\Delta_0 K_0(q\rho_0) \psi_A(t) M} \sum_{p=1}^M \cos[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)], \\ \frac{d^2 \tilde{z}_p(t)}{dt^2} &= \frac{eq_z K_0(q\rho_0)}{m_0} \psi_A(t) \sin[q_z \tilde{z}_p(t) + \alpha(t)]. \end{aligned} \right. \quad (3.20)$$

Останнє рівняння в (3.20) описує рух макрочастинки з номером p в системі відліку пучка.

Цю систему рівнянь зручно аналізувати в наступних безрозмірних змінних:

$$\phi = \frac{\psi_A(t)}{\psi_{\max}}, \quad \xi_p = q_z \tilde{z}_p(t), \quad \eta_p = \frac{\tilde{v}_{zp}(t)}{v_0}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \tau = \omega t, \quad \alpha \equiv \alpha(t), \quad (3.21)$$

де ψ_{\max} — деяке максимальне значення потенціалу хвилі, при якому відбувається захоплення частинок пучка до потенційної ями хвилі. Вираз для ψ_{\max} буде приведено нижче.

Система рівнянь (3.20) в безрозмірних змінних (3.21) має вигляд системи чотирьох диференціальних рівнянь першого порядку

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= -A\phi - \frac{B}{M} \sum_{p=1}^M \sin(\xi_p + \alpha), \\ \frac{d\alpha}{d\tau} &= 1 - \frac{B}{\phi M} \sum_{p=1}^M \cos(\xi_p + \alpha), \\ \frac{d\xi_p}{d\tau} &= \eta_p, \\ \frac{d\eta_p}{d\tau} &= C\phi \sin(\xi_p + \alpha), \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

де $A = \omega_p^2 \Delta_1 / v\omega$, $B = \sqrt{1 + A^2 / \Delta_0^2}$, $C = aq\omega_b^2 / \omega^2 \sqrt{A^2 + \Delta_0^2}$.

Величина ψ_{\max} визначається з умови захоплення частинок пучка до потенційної ями хвилі [16]

$$K_0(q\rho_0) \psi_{\max} \propto \frac{m_0}{e} (v_0 - v_{ph})^2,$$

де v_{ph} — фазова швидкість хвилі з урахуванням частотного зсуву, що викликаний взаємодією поля хвилі з електронним пучком.

Використовуючи результати роботи [40], дисперсійне рівняння зв'язаних хвиль пучка і плазмового циліндра для розглянутого випадку можна представити у вигляді

$$\Delta(\omega - q_z v_0)^2 = aq\omega_b^2, \quad (3.23)$$

де $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_0}$ — плазмова частота електронів пучка; $\Delta = \varepsilon(\omega) \frac{I'_0(q\rho_0)}{I_0(q\rho_0)} - \frac{K'_0(q\rho_0)}{K_0(q\rho_0)}$,

в якому $\varepsilon(\omega)$ визначається виразом (14). Зауважимо, що рівняння $\Delta = 0$ не має дійсних рішень і описує так звану максвелловську релаксацію електростатичного поля в зіткневій плазмі. Для знаходження поправки до резонансної частоти $\omega_0 = q_z v_0$ рішення рівняння (3.23) будемо шукати у вигляді

$$\omega = \omega_0 + \delta\omega, \quad (3.24)$$

де $|\delta\omega| \ll \omega_0$. Підставивши (3.24) в (3.23) і слідуючи методикою роботи [41], отримаємо

$$\delta\omega = \pm \omega_b \frac{(aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} (\cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0), \quad (3.25)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{A}{\Delta_0}.$$

Рішення (3.25) з негативним знаком уявної частини призводить до зростання амплітуди симетричною пов'язаної хвилі циліндра і пучка з інкрементом

$$\gamma = \omega_b \frac{(aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} \sin \varphi_0.$$

При цьому фазова швидкість зв'язаної хвилі має вигляд

$$v_{ph} = v_0 - \frac{\omega_b (aq)^{1/2}}{(A^2 + \Delta_0^2)^{1/4}} \cos \varphi_0. \quad (3.26)$$

Згідно (3.26), нестійкість є притаманною повільній зв'язаній хвилі. В результаті отримуємо такий вираз для ψ_{\max} :

$$\psi_{\max} = \frac{m_0 v_0^2 aq}{eK_0(q\rho_0) \sqrt{A^2 + \Delta_0^2}} \left(\frac{\omega_b}{\omega} \right)^2 \cos^2 \varphi_0.$$

Зауважимо, що в силу визначення величини φ_0 вона не перевищує одиниці і, отже,

$\cos \varphi_0 > 0$. Зауважимо також, що використане лінійне наближення для електронів плазми виправдане тим, що для електронного пучка малої густини, коли $n_0 \ll N_0$, амплітуда збуджувальної потенційної хвилі мала і виконується умова $e\psi_{\max} \ll m_0 v_0^2$ [38].

У наступному розділі будуть наведені результати чисельного аналізу системи рівнянь (3.22) і фазовий портрет макрочастинок пучка, який свідчить про утворення згустків на нелінійній стадії нестійкості.

4.2 чисельного аналіз системи нелінійних рівнянь

Як матеріал плазмового циліндра виберемо напівпровідник GaAs з $\varepsilon_0 = 13,2$, $m = 0,063 m_0$, $\nu = 10^{13} \text{с}^{-1}$, і $N_0 = 10^{13} \text{см}^{-3}$. Аналіз проведемо для циліндрів з радіусами ρ_0 рівними 0,5 см, 1 см і $\rho_0 \rightarrow \infty$ (граничний випадок плоскої межі розділу середовищ). Значення концентрації електронів пучка n_0 , товщини стінки пучка a і швидкості спрямованого руху електронів пучка v_0 виберемо наступними: $n_0 = 10^{10} \text{см}^{-3}$, $a = 0,01 \text{см}$ і $v_0 = 0,1 \text{с}$ відповідно. В цьому випадку $\omega_b / \omega_p \approx 8 \cdot 10^{-3}$. Виберемо резонансну довжину хвилі $\lambda = 2 \text{см}$, якій відповідають значення резонансної частоти $\omega = 1,7 \cdot 10^{10} \text{с}^{-1}$ і інкремента $\gamma \approx 10^8 \text{с}^{-1}$, для яких $\gamma / \omega \approx 0,01$.

На рис. 2.1 наведено залежності $\phi \equiv \phi(\tau)$ від безрозмірного часу τ для циліндрів з радіусами $\rho_0 = 0,5 \text{см}$ (крива 1), $\rho_0 = 1 \text{см}$ (крива 2) і $\rho_0 \rightarrow \infty$ (крива 3). Нагадаємо, що крива 3 відповідає плоскій поверхні розділу середовищ.

Рішення системи рівнянь (3.22) було виконано чисельно методом Рунге–Кутта. Пучок електронів моделювався окремими макрочастинками (у формі кілець), які рівномірно розподілені в початковий момент часу в інтервалі $0 \leq \xi_p \leq 2\pi$. Число мікрочастинок M дорівнювало 500. Відзначимо, програма обчислень, що використовувалась, дозволяла проводити інтегрування зі змінним

кроком шляхом завдання відносної похибки на кожному кроці. Початкове значення амплітуди ϕ було рівним $\phi_0 = 10^{-4}$. Початкові значення повільної фази α і її похідної $d\alpha/d\tau$ покладалися рівними нулю.

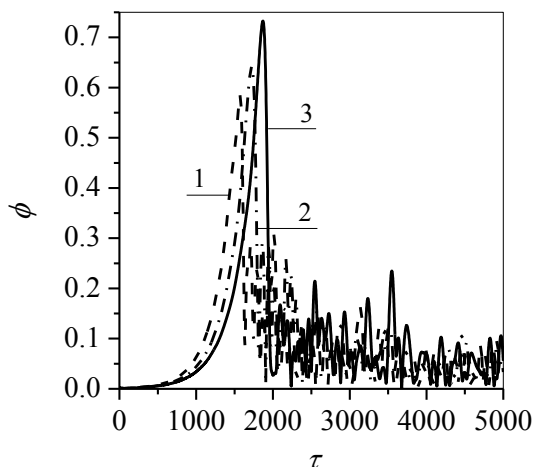


Рисунок 3.1 Графік залежності амплітуди потенційної хвилі від безрозмірного часу для трьох значень радіуса плазмового циліндра

1) — $\rho_0 = 0,5$ см; 2) — $\rho_0 = 1$ см; 3) — $\rho_0 \rightarrow \infty$

З рис. 3.1 слідує, що максимальне значення амплітуди ϕ_{\max} , яке відповідне моменту насичення нестійкості, виявляється тим більше, чим більше радіус циліндра. Так, для циліндра з радіусом $\rho_0 = 0,5$ см маємо $\phi_{\max} \approx 0,58$, а для $\rho_0 = 1$ см — $\phi_{\max} = 0,64$. Крім того, для циліндра з меншим радіусом повільна амплітуда досягає свого максимального значення ϕ_{\max} раніше (при $\tau \equiv \tau_{\max} \approx 1569$, що відповідає часу $t \equiv t_{\max} \approx 16\gamma^{-1}$), ніж для циліндра з великим радіусом (при $\tau \equiv \tau_{\max} \approx 1718$, що відповідає часу $t \equiv t_{\max} \approx 17\gamma^{-1}$). Відзначимо, що з ростом радіуса циліндра залежності $\phi(\tau)$ прагнуть до деякої загальної межі (крива 3), що відповідна значенням $\Delta_0 \rightarrow \varepsilon_0 + 1$ і $\Delta_1 \rightarrow 1$. Фізично ця межа відповідає випадку плоскої межі пучок–плазма.

З рис. 3.1 також слідує, що при $\tau > \tau_{\max}$ величина ϕ осцилює близько деякого

середнього значення. Ці осциляції носять істотно нерегулярний (хаотичний) характер, який зумовлений тим, що до моменту захоплення макрочастинки не встигають зібратися в згусток і мають помітний розкид як за швидкостями, так і за координатами. Якісно така поведінка залежності $\phi(\tau)$ нагадує аналогічну залежність в роботі [30], в якій розглядалася нелінійна стадія пучкової нестійкості в слабо зіткневій безмежній плазмі. Під «слабкими» розуміються такі зіткнення, частота яких менше частоти плазмової хвилі, але значно більше величини інкремента нестійкості. Зауважимо, що залежність $\phi(\tau)$ в роботі [30] мала характер биття, пов'язаний з наявністю в системі двох характерних часів — часу коливання згустку макрочастинок в потенційній ямі хвилі і часу зміни самої потенційної ями. На відміну від роботи [30] в розглянутій твердотільній плазмі частота релаксації імпульсу електронів задовольняє умові $\nu \ll \omega \ll \gamma$. Це призводить до того, що до моменту захоплення макрочастинки взагалі не формують згустки і в потенційних ямах хвилі відбуваються коливання окремих макрочастинок.

Ще однією принциповою відмінністю розглянутого випадку твердотільної плазми від роботи [30, 31] є те, що сільнозіткненна плазма не підтримує власні коливання, і тому захоплення частинок пучка здійснюється плазмовою хвилею самого пучка. Таке явище в роботі [26] названо самозахопленням. Саме ефект самозахоплення електронів пучковою хвилею, як було зазначено в [26], призводить до хаотизації електронного пучка і зникнення регулярних осциляцій резонансної гармоніки. Саме така поведінка демонструє залежність $\phi(\tau)$, що наведена на рис. 3.1

Ефект самозахоплення електронів пучка і подальшої їх хаотизації демонструють фазові портрети макрочастинок, що зображені на рис.2.2–2.4 для $\rho_0 = 0,5$ см.

З рис.2.2 видно, що до моменту насичення нестійкості з'являється група відображених макрочастинок, що зазначені літерою R. Макрочастинки відбиваються від «горбів» потенційної хвилі самого пучка. Цікаво відзначити, що

ефект самозахоплення електронів пучка полем самої пучкової хвилі виникає на нелінійній стадії нестійкості квазімонохроматичного початкового збурення при колективному ефекті Вавилова–Черенкова [38].

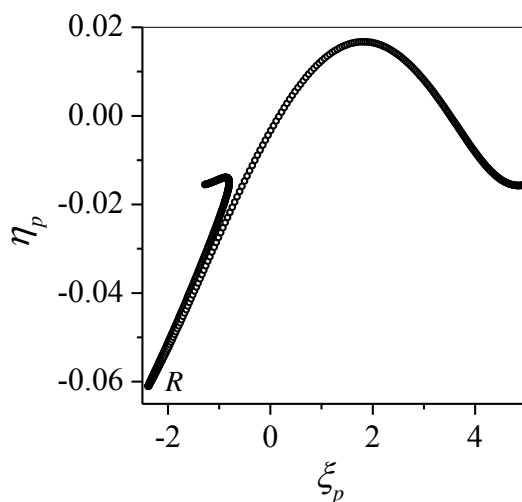


Рисунок 3.2 Фазовий портрет системи з M макрочастинок в момент насичення нестійкості ($\tau = 1570$)

На рис.3.3 і рис. 3.4. наведено фазові портрети макрочастинок для моментів часу $\tau = 2550$ і $\tau = 5000$, що відповідні хаотичним осциляціям повільної амплітуди. Видно, що з часом після моменту насичення нестійкості макрочастинок займають все більшу частину фазової площини і їх розподіл по цій площині стає все більш рівномірним. Фізично, як було зазначено вище, це відповідає хаотизації електронного пучка. Групи макрочастинок, що захоплені електронними згустками, не формуються на відміну від випадку слабого зіткнення, що розглянуто в роботі [30].

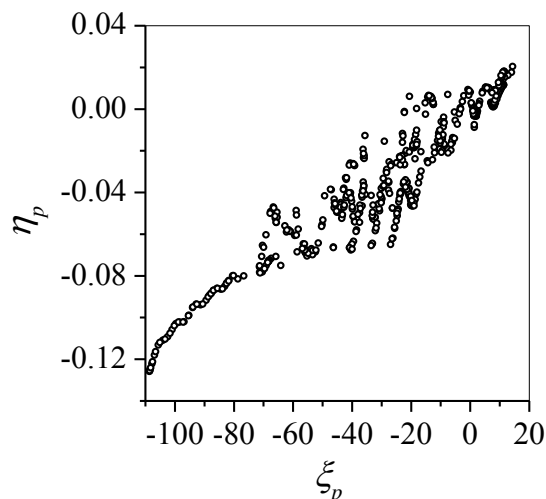


Рисунок 3.3 Фазовий портрет системи з M макрочасток в момент часу $\tau = 2550$

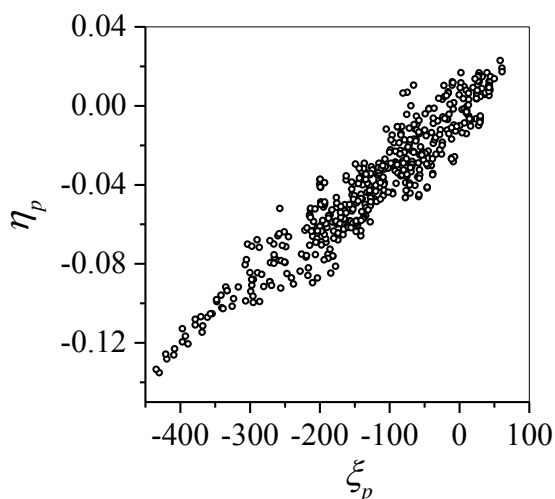


Рисунок 3.4 Фазовий портрет системи з M макрочасток в момент часу $\tau = 5000$

3.3 Висновки до розділу

Проаналізовано задачу нелінійної стабілізації нестійкості трубчастого електронного пучка, коли він рухається вздовж поверхні плазмового циліндра. Передбачалося, що твердотільна плазма циліндра є сильно зіткневою, електронний пучок є нерелятивістський, а хвиля, що збуджується пучком, — електростатична. Відмічено, що нелінійна стабілізація виникаючої резистивної

нестійкості відбувається за рахунок ефекту самозахоплення електронів пучковою хвилею. Встановлено, що чим більше радіус плазмового циліндра, тим пізніше починається нелінійна стадія нестійкості і тим більше значення амплітуди, що повільно змінюється. Розглянуто граничний випадок плоскої межі розподілу середовищ пучок–плазма твердого тіла.

ВИСНОВКИ

Проаналізовано задачу нелінійної стабілізації нестійкості трубчастого електронного пучка, який обдуває твердотільний діелектричний чи плазмовий циліндр, що розміщений в повздовжньому сильному постійному магнітному полі. При цьому пучок вважався нерелятивістським та нескінченно тонким в радіальному напрямку, а хвиля, що збуджується пучком, — електростатична. Електрони рухались уздовж силових ліній магнітного поля на малих (в порівнянні з довжиною хвилі, що збуджувалась) прицільних відстанях від поверхні циліндра. Передбачалося, що твердотільна плазма циліндра є сильно зіткнева.

Виконано аналіз з використанням методу повільно-змінюючихся амплітуд і фаз у часі електричного та магнітного полів хвилі. При цьому пучок представлявся у вигляді набору макрочастинок — заряджених кілець.

Проаналізовано механізм нелінійної стабілізації азимутально-симетричних об'ємно-поверхневих електромагнітних хвиль E-типу в системі з діелектричним хвилеводом. Фізичною причиною збудження таких хвиль є резонанс Вавилова–Черенкова, а в основу механізму нелінійної стабілізації є ефект захвату електронів полем збуджувальної хвилі.

Відзначено, що в результаті нелінійних процесів в системі з діелектричним хвилеводом відбувається зменшення частоти електромагнітних хвиль, що збуджуються. Аналіз залежностей амплітуд, що повільно змінюються, від часу показав, що зі збільшенням радіального модового індексу s час насичення нестійкості, максимальні значення і "період" осциляцій амплітуд на нелінійній стадії насичення нестійкості зменшуються. Відмічено, що метод повільно-змінюючихся амплітуд і фаз перестає бути придатним для хвиль із значеннями радіального модового індексу, що перевищують деяке "критичне" значення, для якого характерний "період" осциляцій амплітуд полів на нелінійній стадії нестійкості стає таким же як період "швидких" осциляцій хвилі, що збуджується.

Відмічено, що нелінійна стабілізація виникаючої резистивної нестійкості в системі з твердотільним плазмовим хвилеводом відбувається за рахунок ефекту самозахоплення електронів пучковою хвилею. Зауважено, що чим більше радіус хвилеводу, тим пізніше починається нелінійна стадія нестійкості і тим більше величина повільної амплітуди.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. E. Pickwell, B.E. Cole, A.J. Fitzgerald et al., *Appl. Phys. Lett.* 84, 2190 (2004).
2. P.C. Ashwort, E. Pickwell-MacPherson, E. Provenzano et al., *Opt. Express* 17, 12444 (2009).
3. Y. Yang, A. Shutler, D. Grischkowsky, *Opt. Express* 19, 8830 (2011).
4. T. Nagatsuma, S. Horiguchi, Y. Minamikata et al., *Opt. Express* 21, 23736 (2013).
5. M.C. Kemp, *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology* 1, 282 (2011).
6. A.S. Shlapakovski, S.N. Artemenko, V.A. Avgustinovich et al., *The 14th Symposium on High Current Electronics (Tomsk, 2006)*, p. 359.
7. В.А. Августинович, С.Н. Артеменко, А.И. Мащенко и др., *Письма в ЖТФ* 36, 103 (2010).
8. А.Я. Кириченко, Ю.Ф. Лонин, В.Г. Папкович и др., *ВАНТ. Сер. Ядерно-физические исследования № 2 (66)*, 135 (2010).
9. K.V. Galaydych, Yu.F. Lonin, A.G. Ponomarev et al., *Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Phys.* 6, 123 (2010).
10. А.В. Дормидонтов, А.Я. Кириченко, Ю.Ф. Лонин и др., *Письма в ЖТФ* 38, 65 (2012).
11. K.V. Galaydych, Yu.F. Lonin, A.G. Ponomarev et al., *Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Phys.* № 6(82), 158 (2012).
12. К.В. Галайдыч, Ю.Ф. Лонин, А.Г. Пономарев и др., *ВАНТ Сер. Ядерно-физические исследования № 3(79)*, 174 (2012).
13. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko, *Telecommunications and Radio Engineering* 75, 1467 (2016).

14. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko, *Phys. Rev. E* 96, 013205 (2017).
15. Yu.O. Averkov, Yu.V. Prokopenko, V.M. Yakovenko, *Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Electronics and New Methods of Acceleration* № 4(116), 3 (2018).
16. Ю.О. Аверков, Ю.В. Прокопенко, В.М. Яковенко, *ЖТФ* 89, 9 (2019).
17. Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро, *ЖЭТФ* 47, 1389 (1965).
18. Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро, 4-я конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза (Киев, 1963), с. 92.
19. Р.К. Мазитов, *Прикладная механика и техническая физика* 1, 27 (1965).
20. T. O'Neil, *Phys. Fluids* 8, 2255 (1965).
21. Ya.B. Fainberg, *Czechoslovak J. Physics* 18B, 652 (1968).
22. Я.Б. Файнберг, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко, *ЖЭТФ* 57, 966 (1970).
23. В.И. Курилко, *ЖЭТФ* 57, 885 (1970).
24. W.E. Drummond, J.H. Malmberg, T.M. O'Neil et al., *Phys. Fluids* 13, 2422 (1970).
25. Р.И. Ковтун, А.А. Рухадзе, *ЖЭТФ* 58, 1709 (1970).
26. Б.Н. Брейзман, Д.Д. Рютов, *ЖЭТФ* 60, 408 (1971).
27. И.Н. Онищенко, А.Р. Линецкий, Н.Г. Мациборко и др., *Письма в ЖЭТФ* 12, 407 (1970).
28. I.N. Onishchenko, V.D. Shapiro, V.I. Shevchenko, *Plasma Phys.* 14, 591 (1972).
29. А.А. Иванов, В.В. Парилл, Т.К. Соболева, *ЖЭТФ* 63, 1678 (1973).
30. А.А. Иванов, *Физика сильнонеравновесной плазмы*, Атомиздат, Москва (1977), с. 352.
31. Б.А. Альтеркоп, С.Е. Росинский, В.П. Тараканов, *Физика плазмы* 5, 291 (1979).
32. *Энциклопедия низкотемпературной плазмы: Вводный том в 9 кн. Кн. 4.* / Под ред. В.Е. Фортова, Наука, Москва (2000), с. 516.

33. М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков, Плазменная релятивистская СВЧ-электроника, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва (2002), с. 544.
34. Ю.В. Бобылёв, М.В. Кузелев, Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой, Физматлит, Москва (2009), с. 456.
35. А.В. Кукушкин, А.А. Рухадзе, Физика плазмы 43, 776 (2017).
36. Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, Физика плазмы 30, 419 (2004).
37. Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, Физика плазмы 34, 122 (2008).
38. K.V. Galaydych, Yu.F. Lonin, A.G. Ponomarev et al., Problems of Atomic Science and Technology. Ser.: Plasma Phys. № 6(82), 158 (2012).
39. Кузелев М. В., Лазутченко О. В., Рухадзе А. А. Режимы и спектры черенковской пучковой неустойчивости в нелинейной плазме. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1999. Т. 42, № 10. С. 958–976.
40. Ахиезер А.И., Любарский Г.Я. // Доклады АН СССР. 1951. Т. 80. С. 193.
41. Ахиезер А.И., Половин Р.В. // Доклады АН СССР. 1955. Т. 102. С. 919.
42. Ахиезер А. И., Половин Р. В. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 915.
43. Карташов И.Н., Кузелев М.В. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. С.749.
44. Лопухин В.М., Веденов А.А. // УФН. 1954. Т. 53. С. 69.
45. Бородкин А.И., Яковенко В.М., Левин Г.Я., Майстренко Ю.В. // ФТТ. 1970. Т. 12. С. 1515.
46. Корнилов Е.А., Некрашевич С.А., Файнберг Я.Б., Шоховцов Н.А. // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 284.
47. М. Абрамовица, И. Стиган, Справочник по специальным функциям, Наука, Москва (1979), с. 832.
48. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Взаимодействие потока заряженных частиц трубчатого пучка с собственными колебаниями диэлектрического цилиндра. *Радиофизика и электроника*. 2016. Т. 7(21), № 4. С. 68–

49.76.А И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин и др., Электродинамика плазмы, Наука, Москва (1974), с. 720.

50.М.Е. Ильченко, В.Ф. Взятыхшев, Л.Г. Гасанов и др., Диэлектрические резонаторы / Под ред. М.Е. Ильченко, Радио и связь, Москва (1989), с. 328.