

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Автоматики і комп'ютеризованих технологій
(повна назва)
Кафедра Комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та
робототехніки
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)
Розроблення математичної моделі для системи автоматичного регулювання
теплообмінного апарату
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання,
групи КІТПВм-23-3

Максим Р.В.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. каф. КІТАР Ромашов Ю.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____
(підпис)

Невлюдов І.Ш.
(прізвище, ініціали)

2025р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет	Автоматики і комп'ютеризованих технологій
Кафедра	Комп'ютерно-інтегрованих технологій, автоматизації та робототехніки
Рівень вищої освіти	другий (магістерський)
Спеціальність	174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка (код і повна назва)
Тип програми	освітньо-професійна (освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма	Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва (повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____

(підпис)

« _____ » _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві _____

Максиму Роману Валерійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Розроблення математичної моделі для системи автоматичного регулювання теплообмінного апарату

затверджена наказом по університету від _____ 22.11. 2024 р. № 1231 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії _____ 22.01. 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи ОС Windows

Середовище розробки – Scilab

Мова програмування – Scilab

Інтерфейс – графічний

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

4.1 Вступ.

4.2 Аналіз конструкцій теплообмінних апаратів.

4.3 Аналіз теплообмінних апаратів як об'єктів автоматизації.

4.4 Розрахунок теплових процесів в теплообмінних апаратах.

4.5 Розробка математичної моделі процесів теплопровідності та теплопередачі.

4.6 Визначення параметрів автоматичного регулятора та його дослідження.

4.7 Комп'ютерне моделювання теплообмінних апаратів.

4.8 Висновки.

4.9 Додатки.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних

ілюстрацій (слайдів) Демонстраційний матеріал у вигляді презентації формату PowerPoint (*.ppt) – 10 с. формату А4

6. Консультанти розділів роботи (п.6 включається до завдання за наявності консультантів згідно з наказом, зазначеним у п.1)

Найменування розділу	Консультант (посада, прізвище, ім'я, по батькові)	Позначка консультанта про виконання розділу	
		підпис	дата
Основна частина	Ромашов Ю.В.		

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
	Аналіз літератури за темою атестаційної роботи	02.10 – 21.10.24	Виконано
	Аналіз конструкцій теплообмінних апаратів	21.10 – 04.11.24	Виконано
	Аналіз теплообмінних апаратів як об'єктів автоматизації	21.10 – 04.11.24	Виконано
	Розрахунок теплових процесів в теплообмінних апаратах	04.11 – 11.11.24	Виконано
	Розробка математичної моделі процесів теплопровідності та теплопередачі	11.11 – 18.11.24	Виконано
	Визначення параметрів автоматичного регулятора та його дослідження	18.11 – 25.11.24	Виконано
	Комп'ютерне моделювання теплообмінних апаратів	25.11.2024 – 03.01.25	Виконано
	Оформлення пояснювальної записки	02.12.2024 – 03.01.25	Виконано
	Подання роботи на перевірку Інтернет-сервісом Unichек	21.01.25	Виконано
	Подання роботи на рецензію	22.01.25	Виконано
	Подання роботи на підпис зав. кафедри	23.01.25	Виконано
	Подання атестаційної роботи в ЕК	23.01.25	Виконано

Дата видачі завдання 22 листопада 2024 р.

Здобувач _____ Максим Р.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

Керівник роботи _____ проф. каф. КІТАР Ромашов Ю.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

Я, як здобувач вищої освіти ХНУРЕ, розумію і підтримую політику закладу із академічної доброчесності. Я не надав і не одержував недозволену допомогу під час підготовки кваліфікаційної роботи. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

"17" січня 2025

A handwritten signature in blue ink, consisting of several overlapping, fluid strokes that form a stylized, abstract shape.

Максим Р.В.

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 62 с., 26 рис., 17 джерел.

СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ, ЦИФРОВИЙ ДВІЙНИК, ТЕПЛООБМІННІ АПАРАТИ, МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ, ОПТИМІЗАЦІЯ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ, МЕТОД НАПІВ-ДИСКРЕТИЗАЦІЇ, МАТРИЧНІ ОБЧИСЛЕННЯ, SCILAB.

У роботі побудована математична модель процесів теплопередачі в теплообмінних апаратах на основі перетворення систем диференціальних рівнянь та наближеного розв'язку задач автоматичного керування з використанням методу напів-дискретизації. Більшою мірою у моделюванні використовувались матричні обчислення, передатні функції, в комп'ютерному моделюванні враховані і перевірені основні параметри роботи змодельованого теплообмінного апарата в стаціонарному і нестаціонарному режимах роботи. Розглянуто застосування технології цифрових двійників та виконане комп'ютерне моделювання у середовищі SCILAB для оптимізації систем автоматичного регулювання теплообмінних апаратів. Для кількісної оцінки зроблені декілька тестів та отримали результати з непоганою точністю.

Об'єкт дослідження – процес теплообміну у теплообмінному апараті.

Предмет дослідження – математична модель процесів у теплообмінних апаратах як об'єкт автоматизації.

Мета дослідження – підвищення ефективності роботи поверхні теплообміну, зниження енерговитрат та оптимізація режимів роботи. В ході комп'ютерного моделювання мали отримати і обробити дані для аналізу процесів теплообміну, сприяти їх стабільному та коректному перебігу та

забезпечити правильну роботу регулятора. Дослідити основні параметри поверхні теплообміну в стаціонарному і нестаціонарному режимах роботи (дослідити вплив випадкових змін температури та регулювання при постійному збуренні).

Методи дослідження: системний підхід, математичне моделювання, програмне моделювання засобами в пакетах SCILAB, розроблення систем автоматичного регулювання теплообмінних апаратів, матричні обчислення. Для розробки використовувалось програмне забезпечення SCILAB та інші інструменти для моделювання процесів.

Результати цієї роботи відносяться до двох Цілей сталого розвитку:

– Ціль 7. «Доступна та чиста енергія», Завдання 7.4 «Підвищити енергоефективність економіки», Індикатор 7.4.1 «знизити витрати первинної енергії на одиницю ВВП: важливим є формування енергетичної безпеки, що передбачає кардинальне підвищення енергоефективності національного виробництва»,

– Ціль 9. «Промисловість, інновації та інфраструктура», Завдання 9.4 «застосування ІКТ в АПК, енергетиці: відповідає вимогам екологічно безпечного розвитку й ефективного використання ресурсів та енергії».

Окрім цього, розробка енергоефективного управління узгоджується з «зеленими» та цифровими переходами в Європейському Союзі. Ці принципи оголошені «основними напрямками розвитку», що зазначено Генеральним директором Європейської Комісії у «пріоритетах розвитку Європейського Союзу до 2030 року».

ABSTRACT

Explanatory note: 62 p., 26 fig., 17 sources.

AUTOMATIC CONTROL SYSTEMS, DIGITAL TWIN, HEAT EXCHANGE APPARATUS, HEAT EXCHANGE MODELING, OPTIMIZATION OF PRODUCTION PROCESSES, SEMI-DISCRETIZATION METHOD, PID-CONTROLLER, SCILAB.

The study constructed a mathematical model of heat transfer processes in heat exchangers based on the transformation of systems of differential equations and approximate solution of automatic control problems using the semi-discretization method. The parameters for the PID controller were also determined, and the main operating parameters of the modeled heat exchanger in stationary and non-stationary operating modes were considered and verified. The application of digital twin technology and computer modeling in SCILAB environment for optimization of automatic control systems of heat exchangers was considered – for quantitative assessment, several tests were made and results with good accuracy were obtained.

Object of research - model of heat exchange apparatus, which is presented in simplified form as a heat exchange surface that separates the heat carrier medium and the heated medium.

Subject of research – development of mathematical model of processes in heat exchange apparatus and computer modeling of regulators' influence on processes in heat exchange apparatus.

Purpose of research – increasing the efficiency of heat exchange surface operation, reducing energy consumption and optimizing operating modes. During computer modeling, we need to obtain and process data for analysis of heat exchange processes, promote their stable and correct flow and ensure proper operation of the regulator. Investigate main parameters of heat exchange surface in stationary and non-stationary operating modes (investigate the influence of random temperature

changes and regulation under constant disturbance).

Research methods: systematic approach, mathematical modeling, software modeling using SCILAB packages, development of automatic control systems for heat exchange apparatus, determination of PID-controller parameters. SCILAB software and other process modeling tools were used for development.

The results of this work relate to two Sustainable Development Goals:

– Goal 7. "Affordable and Clean Energy", Task 7.4 "Increase energy efficiency of the economy", Indicator 7.4.1 "reduce primary energy consumption per unit of GDP: formation of energy security is important, which involves a cardinal increase in energy efficiency of national production",

– Goal 9. "Industry, Innovation and Infrastructure", Task 9.4 "application of ICT in agriculture, energy: complies with requirements of environmentally safe development and efficient use of resources and energy".

Besides Ukraine, the development of energy-efficient management aligns with the "green" and digital transitions in the European Union. These principles are declared as "main directions of development", as noted by the Directorate General of the European Commission in the "European Union development priorities until 2030".

ЗМІСТ

Перелік скорочень	9
Вступ.....	10
1 Теплообмінні апарати як об'єкт автоматизації.....	12
1.1 Основні визначення та огляд конструкцій теплообмінних апаратів	13
1.2 Автоматизація теплообмінних апаратів	16
1.3 Розрахунок теплових процесів в теплообмінних апаратах	16
1.4 Висновки по розділу 1	17
2 Математичне моделювання процесів в теплообмінному апараті	18
2.1 Схематизація процесів в теплообмінному апараті	18
2.2 Математична модель процесів теплопровідності та теплопередачі	20
2.3 Використання методу напів-дискретизації щодо аналізу процесів.	26
2.4 Висновки по розділу 2	34
3 Система автоматичного регулювання теплообмінного апарату	35
3.1 Моделювання теплообмінного апарату як об'єкту автоматизації ...	35
3.2 Визначення параметрів автоматичного регулятора	36
3.3 Дослідження автоматичного регулятора	38
3.4 Висновки по розділу 3	42
4 Комп'ютерне моделювання теплообмінних апаратів	43
4.1 Процеси в теплообмінному апараті	43
4.2 Ідентифікація теплообмінного апарату та визначення параметрів регуляторів.....	49
4.3 Вплив регуляторів на процеси в теплообмінному апараті	52
4.4 Висновки по розділу 4	54

5 Охорона праці	55
5.1 Загальні вимоги безпеки до робочого місця студента	55
5.2 Електробезпека при роботі з комп'ютерною технікою	55
5.3 Вимоги безпеки під час роботи	55
5.4 Небезпечні фактори при роботі з комп'ютером	56
Висновки	57
Перелік джерел посилання	59
Додаток А Апробація наукових результатів	62
Додаток Б Коди програм для використання у SCILAB	64
Додаток В Демонстраційний матеріал.....	78

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ

ОДУ – ординарні диференціальні рівняння;

ПЗ – програмне забезпечення;

ТОА – теплообмінний апарат;

SCILAB – пакет прикладних математичних програм для інженерних та наукових розрахунків.

ВСТУП

Теплообмінний апарат – це пристрій, призначений для передачі теплової енергії від одного середовища (гарячого) до іншого (холодного) без їх безпосереднього контакту. Конструкції та типи теплообмінних апаратів (ТОА) настільки ж численні та різноманітні, як і області їх застосування: від галузей промисловості та енергетики до побутових опалювальних котлів. У даній роботі будь-який ТОА спрощується до моделі процесів теплопереносу в перегородці, що розділяє гарячий теплоносій та середовище, що нагрівається.

Використання рівнянь для крайових задач та методу напівдискретизації для розв'язання диференціальних рівнянь теплопровідності дозволило створити комп'ютерну модель теплообмінного апарату у векторно-матричному вигляді та розв'язувати матричні рівняння в середовищі SCILAB. Отримана модель демонструє високу точність при порівнянні з експериментальними даними і може ефективно застосовуватися для проектування, аналізу та оптимізації теплообмінних апаратів різних конструкцій.

Управління тепловими процесами потребує глибокого розуміння як статичних (стаціонарних), так і динамічних (перехідних) характеристик системи, що забезпечує ефективний контроль температурних режимів. Підвищення ефективності теплообмінних апаратів передбачає досягнення максимально можливого коефіцієнта корисної дії шляхом оптимізації теплообмінних процесів та мінімізації теплових втрат. Вдосконалення теплопередавальних технологій та проектування нових неможливе без застосування методів чисельного моделювання. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розроблення універсальної методики, яка дозволить комплексно аналізувати та оптимізувати теплообмінні процеси.

Актуальність роботи полягає в необхідності створення універсальної математичної моделі теплообмінних апаратів, яка дозволить оптимізувати їх

роботу, підвищити енергоефективність та знизити енергозатрати за допомогою сучасних методів комп'ютерного моделювання.

Для досягнення поставленої мети необхідно реалізувати розроблену математичну модель у векторно-матричному вигляді, в середовищі SCILAB провести верифікацію розробленої моделі шляхом порівняння результатів чисельного моделювання з експериментальними даними. Але спочатку необхідно провести аналіз існуючих досліджень, зібрати систему рівнянь, що описує математичну модель, та вибрати методи розв'язання поставлених задач.

Робота виконана згідно ДСТУ 3008:2015 [1], Методичними вказівками [2], та Положенням про кваліфікаційну роботу [3]. Результати роботи опубліковані в збірнику DI&SD 2024 [4] та у Додатку А.

1 ТЕПЛОБМІННІ АПАРАТИ ЯК ОБ'ЄКТ АВТОМАТИЗАЦІЇ

Автоматизація математичної моделі ТОВА зводиться до перетворення диференціальних рівнянь фізичних процесів у систему рівнянь з керуванням та виходом, тобто у вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \\ y(t) = C \cdot x(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + a_{13} \cdot x_3(t) + b_1 \cdot u(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + a_{23} \cdot x_3(t) + b_2 \cdot u(t), \\ \dot{x}_3(t) = a_{31} \cdot x_1(t) + a_{32} \cdot x_2(t) + a_{33} \cdot x_3(t) + b_3 \cdot u(t), \\ y = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot u(t),$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ c_3] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} .$$

де $x(t)$ – вектор стану системи; $u(t)$ – вектор управління; $y(t)$ – вектор виходу; A – матриця стану системи; B – матриця управління.

Матрична форма запису форм теорії управління дозволяє використати стандартні методи аналізу стійкості, керованості, спостережуваності системи і краще підходить для чисельних розрахунків і моделювання.

1.1 Основні визначення та огляд конструкцій теплообмінних апаратів

У даному дослідженні розробляється цифровий двійник ТОВА, складається система рівнянь для процесу теплообміну в розділювальній стінці всередині ТОВА між гарячою водою-теплоносієм з відомою температурою та середовищем живильної води, температуру якої ми змінюємо регулюванням швидкості потоків обох середовищ. Необхідність моделювання «цифрових двійників» фізичних об'єктів продиктована цілями та пріоритетами «зеленого» проєктування: у процесі моделювання досліджуються процеси в енергоємних і матеріалоємних фізичних об'єктах [4, 5]. Обговорюються зв'язки між процесами в теплообміннику та математичною моделлю, яка представляє цей теплообмінник як об'єкт автоматизації [6–9]. Метою дослідження є як пошук оптимальних параметрів, так і дослідження регуляторів, керування перехідними процесами теплопровідності та побудова графіків достатньої точності, що наочно відображають стаціонарну та нестаціонарну роботу досліджуваного об'єкта.

У дослідженні пропонується використовувати дані параметрів роботи реального фізичного об'єкта – кожухотрубного теплообмінника з відомими параметрами вхідного середовища та бажаними параметрами на виході. Керуючи швидкістю вхідних і вихідних потоків, здійснюється вплив на вихідну температуру; як дані для параметричного розрахунку використовуються результати комп'ютерного моделювання теплообмінників, як і в дослідженні [10, 11]. Фізичний об'єкт – кожухотрубний теплообмінник – являє собою корпус, що має окремі входи та виходи для гарячого і підігріваного середовищ. Гаряча вода проходить через систему труб, об'єднаних у пучки, віддаючи тепло стінкам труб. Холодна вода підігрівається за рахунок теплообміну від труб і покидає теплообмінник. Схему фізичного та цифрового об'єкта можна побачити на рис. 1.1 – 1.3.

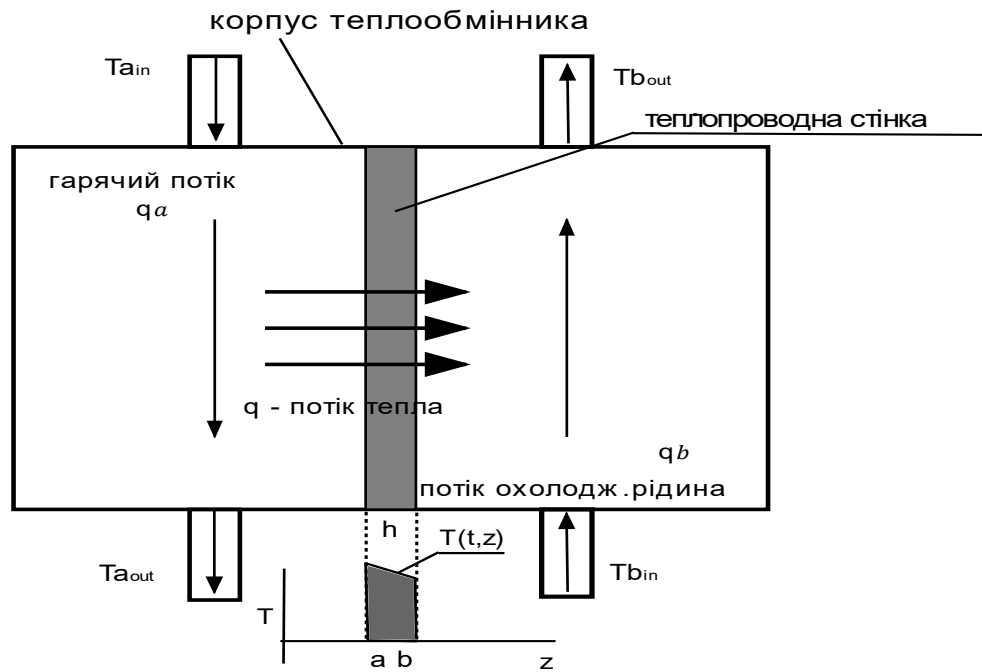


Рисунок 1.3 – Схема теплообмінника з потоками тепла та температури.

На рис. 1.3 прийняті наступні позначення: t – час; q – потік; a, b – координати краю стінок на осі z ; T_{in} – температура на входах, T_{out} – температура на виходах.

Співвідношення температур на вході та виході апарата для двох потоків (гарячого та холодного, передача теплопровідності йде від гарячого до холодного):

$$\begin{aligned} T_{in}^{(1)} &> T_{out}^{(1)}, \\ T_{in}^{(2)} &< T_{out}^{(2)}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Залежність температур на вході та виході елементів апарату в момент часу t :

$$T_{in}^{(1)}(t), T_{in}^{(2)}(t) \rightarrow T_{out}^{(1)}(t), T_{out}^{(2)}(t). \quad (1.3)$$

$T_{in}^{(1)}(t)$ температура яка задається. Потрібно знайти q – потік тепла.

1.2 Автоматизація теплообмінних апаратів

Автоматизація ТОВА забезпечує стабільність техпроцесу шляхом підтримання необхідних заданих параметрів, таких як температура теплоносіїв $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ та тепловий потік q . Вхідні параметри (T_{in}) реєструються датчиками і передаються в контролер, який обчислює необхідний керуючий вплив (u) для підтримки вихідної температури (T_{out}). Цей вплив реалізується за допомогою регулюючого насоса, який змінює швидкість руху середовища. Використання цифрового двійника на основі математичного моделювання дозволяє здійснювати налаштування автоматичних регуляторів без фізичних експериментів, що знижує енерговитрати та матеріаловитрати.

1.3 Розрахунок теплових процесів в теплообмінних апаратах

Процес теплопередачі описується рівнянням теплопровідності, яке в одновимірному випадку (тепло розподіляється в одному напрямку) має вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad \mu = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} . \quad (1.4)$$

де T – температура; t – час; z – просторова координата $a \leq z \leq b$;

μ – коефіцієнт температуропровідності; λ – коефіцієнт теплопровідності.

При розрахунку теплових процесів виникає необхідність розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують розподіл температури в просторі та часі, а також потоки тепла між різними частинами системи [12]. Розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних аналітичними методами можливе лише для найпростіших випадків, у практичних задачах необхідно використовувати чисельні методи, серед яких особливе місце займає метод напів-дискретизації, він буде детально

розглянутий у наступному розділі «математичне моделювання процесів». Також, в наступному розділі, створимо цифрову модель – цифровий двійник ТОА, а на цьому етапі зазначимо, що математична модель – це компроміс між точністю та складністю. З одного боку, модель повинна враховувати суттєві фактори, що впливають на процес теплопередачі, з іншого боку повинна бути достатньо простою для практичного використання в системах автоматизації реального часу.

1.4 Висновки за розділом 1

Цей розділ є вступним у дослідженні, тому основні визначення та огляд роботи досить поверхневий. У розділі наведена схема теплообмінника з потоками тепла та температури, зроблені припущення, що процеси, що проходять в еквівалентній стінці ТОА, з достатньою точністю імітують сам фізичний апарат теплообміну. Поставлена задача розв’язання диференціальних рівнянь у випадку розподілу тепла в одному напрямку, представлений кінцевий вид системи рівнянь з керуванням та виходом, до якого ця роботу потрібно привести.

Налогошено, що – автоматизація ТОА забезпечує стабільність техпроцесу шляхом підтримання необхідних заданих параметрів, а використання цифрового двійника на основі математичного моделювання дозволяє здійснювати налаштування автоматичних регуляторів без фізичних експериментів, та зекономити на енерговитратах та матеріаловитратах.

2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В ТЕПЛООБМІННОМУ АПАРАТІ

Для створення математичної моделі перенесення тепла в плоскій стінці, нехтуємо впливом геометрії та форми конструкцій, спрощуємо влаштування теплообмінного апарату, усунемо вплив внутрішніх та зовнішніх чинників. Циліндричну форму труб ми вже замінили на уявлення плоскої стінки товщини h , з координатами a, b на осі z ; поверхні контакту середовищ зводимо до уявлення площі репрезентативного елемента, площа перерізу якого позначимо A ; тепловий потік q розповсюджується в одновимірному напрямку, спрямованому вздовж товщини стінки вздовж осі по координатній системі z .

2.1 Схематизація процесів в теплообмінному апараті

В основі математичного моделювання теплообмінного апарату лежить схематизація реального фізичного процесу передачі тепла в одновимірному випадку [13]. Базова схематизація процесу теплопровідності представляє собою спрощену модель, характеристики якої узгоджені з реальними теплообмінними поверхнями при збереженні його основних фізичних характеристик.

Схематичний процес передачі тепла від середовища (1) середовищу (2) через плоску стінку зображено на рис. 2.1.

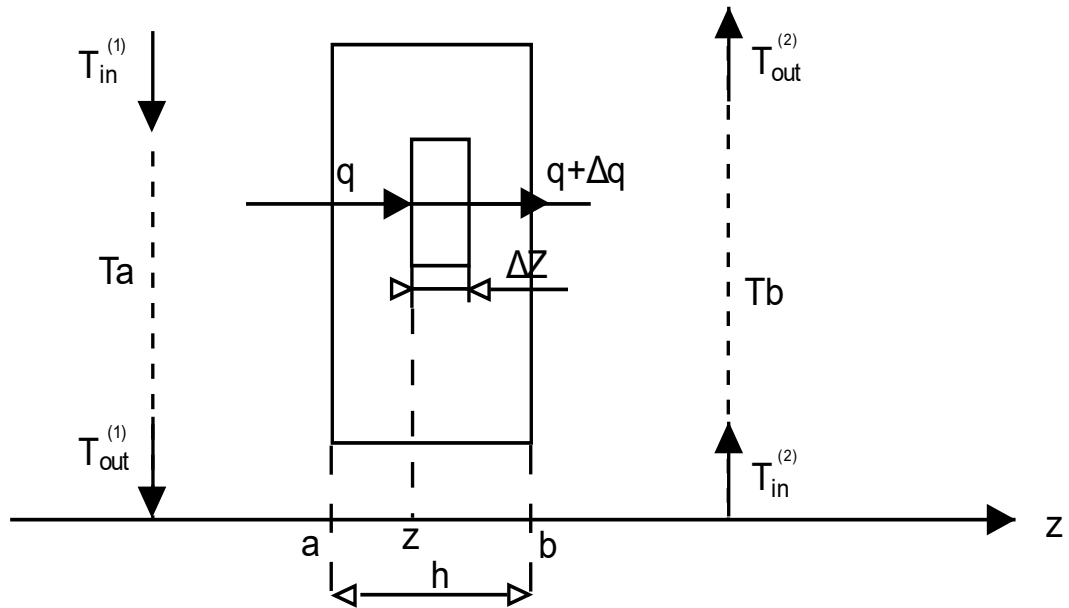


Рисунок 2.1 – Схематизація процесів в теплообмінному апараті

Основні елементи схематизації включають: діапазон координат z для аналізу, координати вздовж товщини стінки $a \leq z \leq b$, де a, b – координати країв стінки; через плоску стінку товщиною h проходить тепловий потік q , зміна теплового потоку описується як $q = q + \Delta q$; температура на вході першого середовища $T^{(1)}_{in} = T_a$; на вході другого середовища $T^{(2)}_{in} = T_b$.

Стінка теплообмінного апарату являє собою поверхню з аустенітної сталі з фізичними характеристиками: коефіцієнт теплопровідності матеріалу λ ; питома теплоємність c ; густина матеріалу ρ ; площа перерізу репрезентативного елемента A . Властивості матеріалу стінки (теплопровідність, теплоємність) є температурно-залежними, теплообмін з навколишнім середовищем проходить на границях середовищ та стінок.

При такій схематизації враховуємо, що тепловий потік q та температура T є функціями як координати z , так і часу t :

$$q = q(t, z), \quad (2.1)$$

$$T = T(t, z). \quad (2.2)$$

2.2 Математична модель процесів теплопровідності та теплопередачі

Математична модель будується з фундаментальних законів збереження енергії та теплопровідності [7–10]. Основні рівняння, які будемо використовувати для моделі – це баланс тепла в елементі перегородки (рівновага між вхідною та вихідною тепловою енергією) та закон Фур'є для теплопровідності, який зв'язує тепловий потік із градієнтом температури [11].

Зобразимо на рисунку елемент плоскої стінки з характерною малою товщиною Δz для елементарного об'єму стінки $\delta V = A \cdot \Delta z$ (рис. 2.2).

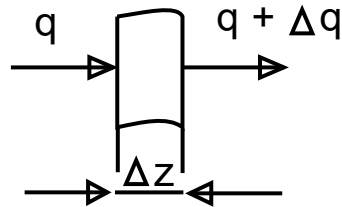


Рисунок 2.2 – Елемент плоскої стінки з характерною малою товщиною Δz

Баланс тепла в елементі перегородки беремо з рівняння балансу енергії для невеликого об'єму стінки:

$$A \cdot q \cdot \Delta t - A \cdot (q + \Delta q) \cdot \Delta t = c \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot \Delta z \cdot A . \quad (2.3)$$

де ліва частина рівняння – це різниця між вхідним та вихідним теплом, а права частина – це зміна внутрішньої енергії.

Рівняння теплопровідності в дискретній формі після спрощення буде виглядати так:

$$\begin{aligned} q \cdot \Delta t - q \cdot \Delta t - \Delta q \cdot \Delta t &= - \Delta q \cdot \Delta t , \\ - \Delta q \cdot \Delta t &= c \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot \Delta z , \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$c \cdot \rho \cdot \Delta T \cdot \Delta z = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} = - \frac{\Delta q}{\Delta z}. \quad (2.5)$$

Рівняння теплопровідності в диференціальній формі:

$$\text{при } \Delta z \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \quad c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} = c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z},$$

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (2.6)$$

Закон Фур'є для теплопровідності, що пов'язує тепловий потік з градієнтом температури:

$$q = - \lambda \cdot \frac{dT}{dz}. \quad (2.7)$$

Об'єднаємо формули (2.6) і (2.7) в одне рівняння:

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2.8)$$

Рівняння теплопровідності прийняло спрощений вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2.9)$$

де μ температуропровідність $\mu = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$.

Отримали рівняння теплопровідності в одновимірному випадку в диференціальній формі.

Початкова умова для рівняння теплопровідності, що задає розподіл температури в початковий момент часу $t = 0$:

$$T(0, z) = T^{(0)}(z), \quad a < z < b. \quad (2.10)$$

де $T(0, z)$ це нами заданная температура.

Граничні умови – умови обміну тепла на межах розглядуваної області $z = a$ і $z = b$, схематично зображені на рисунках (рис.2.3 та рис.2.4).

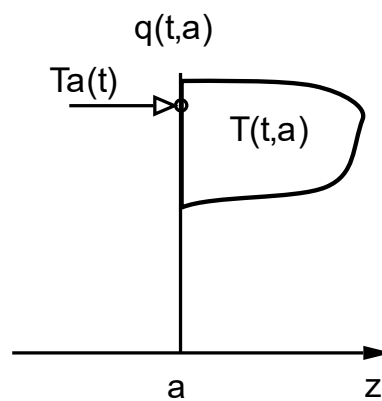


Рисунок 2.3 – Гранична умова на лівій межі ($z = a$)

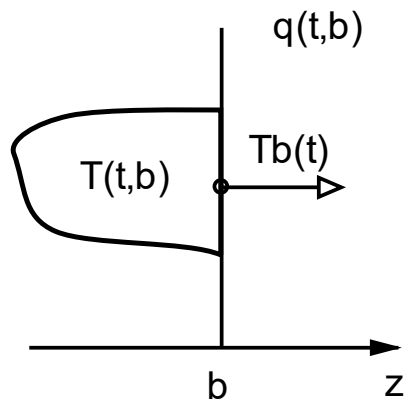
$$\alpha_a \cdot (T_a(t) - T(t, a)) = q(t, a). \quad (2.11)$$

де α_a – коефіцієнт теплопередачі на межі $z = a$; $T_a(t)$ – температура навколишнього середовища на межі $z = a$; $T(t, a)$ – температура поверхні стінки на межі $z = a$; $q(t, a)$ – тепловий потік на межі $z = a$.

Підстановкою закону Фур'є в рівняння граничної умови перепишемо граничну умову на лівій межі в диференціальній формі:

$$A_a \cdot T_a(t) - \alpha_a \cdot T(t, a) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, a) \rightarrow \quad (2.12)$$

$$\rightarrow \alpha_a \cdot T(t, a) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, a) = \alpha_a \cdot T_a(t). \quad (2.13)$$

Рисунок 2.4 – Гранична умова на правій межі ($z = b$)

$$\alpha_b \cdot (T(t, b) - T_b(t)) = q(t, b). \quad (2.14)$$

де α_b – коефіцієнт теплопередачі на межі $z = b$.

Аналогічним чином проведемо підстановку закону Фур'є в рівняння граничної умови та перепишемо рівняння в диференціальну форму:

$$\alpha_b \cdot T(t, b) + \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, b) = \alpha_b \cdot T_b(t). \quad (2.15)$$

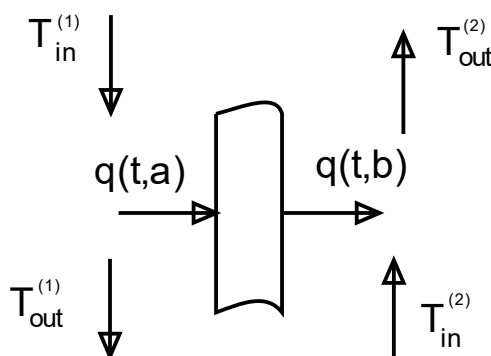


Рисунок 2.5 – Схематичне зображення ТОА з потоками тепла і температури

На рис. 2.5 прийняті наступні позначення: $T_{in}^{(1)}$, $T_{out}^{(1)}$ – вхідна та вихідна температура середовища (1); $T_{in}^{(2)}$, $T_{out}^{(2)}$ – вхідна та вихідна температура

середовища (2); $q(t, a)$ – тепловий потік на лівій межі; $q(t, b)$ – тепловий потік на правій межі.

Для цифрового двійника (математичної моделі) перепишемо усі параметри з урахуванням зміни температури у часі: температура на лівій межі $T_a(t) = T_{in}^{(1)}(t)$; правій межі: $T_b(t) = T_{in}^{(2)}(t)$.

Тепловий потік на лівій межі (кількість тепла, переданого від середовища (1)):

$$q_a = a_a \cdot q(t, a). \quad (2.16)$$

Тепловий потік на правій межі (кількість тепла, переданого від середовища (2)):

$$q_b = a_b \cdot q(t, b). \quad (2.17)$$

Тепловий потік в перегородці:

$$q(t, a) = \alpha_a \cdot (T_{in}^{(1)}(t) - T_0(t)). \quad (2.18)$$

$$q(t, b) = \alpha_b \cdot (T_{n+1}(t) - T_{in}^{(2)}(t)). \quad (2.19)$$

де $q(t, a)$, $q(t, b)$ это теплові потоки, α_a и α_b – коефіцієнти теплопередачі.

Рівняння для вихідних температур:

$$T_{out}^{(1)} = T_{in}^{(1)} - \frac{A_a \cdot \alpha_a}{\rho_a c_a V_a} \cdot (T_{in}^{(1)} - T_0(t)) = \left(1 - \frac{A_a \cdot \alpha_a}{\rho_a c_a V_a}\right) \cdot T_{in}^{(1)} + \frac{A_a \cdot \alpha_a}{\rho_a c_a V_a} \cdot T_0(t), \quad (2.20)$$

$$T_{out}^{(2)} = T_{in}^{(2)} + \frac{A_b \cdot \alpha_b}{\rho_b c_b V_b} \cdot (T_{n+1}(t) - T_{in}^{(2)}) = \left(1 - \frac{A_b \cdot \alpha_b}{\rho_b c_b V_b}\right) \cdot T_{in}^{(2)} + \frac{A_b \cdot \alpha_b}{\rho_b c_b V_b} \cdot T_{n+1}(t). \quad (2.21)$$

Вираз вихідних температур у вигляді лінійної комбінації вхідних температур і температур у розрахунковій області набув вигляду:

$$T^{(1)}_{out} = \left(1 - \frac{A_a \cdot \alpha_a}{\rho_a C_a V_a}\right) \cdot T^{(1)}_{in} + \frac{A_a \cdot \alpha_a}{\rho_a C_a V_a} \cdot T_0(t). \quad (2.22)$$

$$T^{(2)}_{out} = \left(1 - \frac{A_b \cdot \alpha_b}{\rho_b C_b V_b}\right) \cdot T^{(2)}_{in} + \frac{A_b \cdot \alpha_b}{\rho_b C_b V_b} \cdot T_{n+1}(t). \quad (2.23)$$

Температура на виході з лівого середовища 1:

$$T^{(1)}_{out}(t) = T^{(1)}_{in}(t) - \frac{A_a \cdot q(t, a)}{c_a \cdot \rho_a \cdot v_a}. \quad (2.24)$$

Температура на виході з правого середовища 1:

$$T^{(2)}_{out}(t) = T^{(2)}_{in}(t) + \frac{A_b \cdot q(t, b)}{c_b \cdot \rho_b \cdot v_b}. \quad (2.25)$$

де v_a, v_b – швидкість потоку у середовищах; A_a, A_b – еквівалентна площа теплообміну.

Використовуючи раніше отримані рівняння, складемо математичну модель процесів у ГОА у підсумковому вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \mu \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad \mu = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}, \quad a < z < b, \\ T(0, z) = T^{(0)}(z), \quad a < z < b, \\ A_a \cdot T(t, a) - \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, a) = \alpha_a \cdot T_a(t), \quad z = a, \\ A_b \cdot T(t, b) + \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, b) = \alpha_b \cdot T_b(t), \quad z = b, \\ T_a(t) = T^{(1)}_{in}(t); \quad T_b(t) = T^{(2)}_{in}(t), \\ T^{(1)}_{out}(t) = T^{(1)}_{in}(t) - \frac{A_a \cdot q(t, a)}{c_a \cdot \rho_a \cdot v_a}, \\ T^{(2)}_{out}(t) = T^{(2)}_{in}(t) + \frac{A_b \cdot q(t, b)}{c_b \cdot \rho_b \cdot v_b}. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

2.3 Використання методу напів-дискретизації щодо аналізу процесів

Для розв'язання задачі використаємо «метод прямих або метод напів-дискретизації» [5, 7]. Це чисельний метод розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних, який перетворює їх у систему більш простих звичайних диференціальних рівнянь. Застосування саме цього методу обрано як компроміс між простотою реалізації, числовою ефективністю та гнучкістю, оскільки різницеві схеми або методи кінцевих елементів більш складні і краще застосовувати для більш складних геометрій або коли потрібна висока точність у всіх вимірах, але використання різницевих схем або методів кінцевих елементів часто вимагає великих обчислювальних ресурсів.

Перетворення складних диференціальних рівнянь у часткових похідних на більш прості звичайні диференціальні рівняння досягається шляхом дискретизації просторових змінних, що дозволяє застосовувати класичні методи теорії оптимального керування. У практичному застосуванні до задачі передачі тепла через стінку теплообмінника та його зміни вглиб стінки теплообмінника ми розбиваємо систему з розподіленими параметрами на сукупне множинне інтервалів, формуючи рівномірну сітку з кроком Δz точок по всій товщині стінки. Математична модель процесу враховуватиме нестационарний характер теплопередачі та нерівномірність розподілу температури по товщині матеріалу. Приділяючи особливу увагу граничним умовам, розв'язання зводимо до стандартних методів для ординарних диференціальних рівнянь (ОДУ) дискретизацією за просторовими змінними при збереженні неперервності в часі.

Дискретизація стінки за просторовою змінною проводиться таким чином: визначається номер вузла, розглядаються вузлові значення температури, складаються рівняння кінцевої різниці та приводять загальне рівняння до вигляду матрично-векторного добутку всіх температурних вузлів у системі. Отримані рівняння записують у матричній формі.

Розділимо простір стінки ТОА вздовж осі z на рівномірні інтервали з кроком Δz від точки межі стіни a до точки межі стіни b . Графік з розподілом осі z на дискретні точки $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$, де n – число точок всередині інтервалу $n \geq 1$, зображений на рис. 2.6.

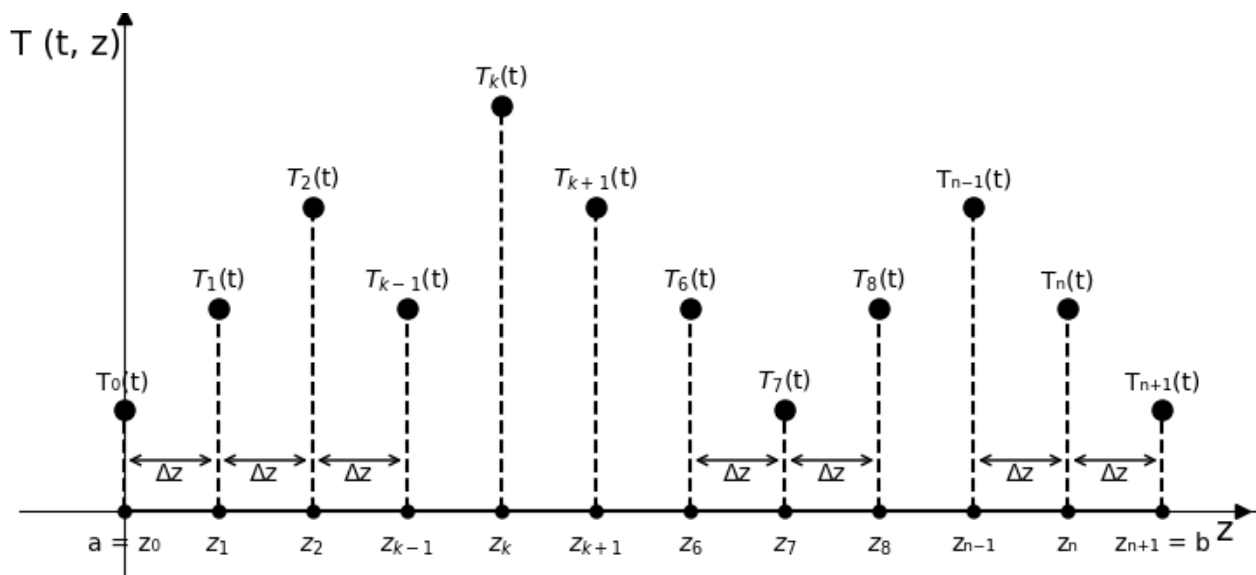


Рисунок 2.6 – Розподіл осі z на дискретні точки $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$, де n – число точок всередині інтервалу, $n \geq 1$

Дискретизацію змінної z на рівномірну сітку з кроком Δz опишемо наступними співвідношеннями:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= a, \\ z_1 &= z_0 + \Delta z, \\ z_k &= a + k\Delta z \\ \Delta z &= \frac{b-a}{n+1} \\ k &= 0, 1, 2, \dots, n, n+1 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Безперервне поле температури $T(t, z)$ замінюється послідовним набором функцій часу $T_k(t)$, визначених у вузлах просторової сітки:

$$\left. \begin{array}{l} T_k(t) = T(t, z_k) \\ n = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1 \\ n \geq 1 \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

В кожній вузловій точці z_k температура є функцією лише часу $T_k(t)$, тому часткова похідна $\frac{\partial T}{\partial t}$ при $z = z_k$ збігається з похідною $\frac{dT_k}{dt}$ вузлової функції температури за часом:

$$\frac{dT}{dt}(t, z_k) = \frac{dT_k}{dt} . \quad (2.29)$$

Використаємо формули для першої та другої похідних для кінцевих різниць:

$$\frac{d^2T}{dz^2}(t, z_k) = \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2} . \quad (2.30)$$

Це кінцево-різницева апроксимація другої похідної за z з центральною різницевою схемою, такий тип апроксимації поширений при дискретизації диференціальних операторів.

Кінцева різницева апроксимація першої похідної за z у точці z_k з лівою односторонньою різницевою схемою другого порядку:

$$\frac{dT}{dz}(t, z_k) = \frac{-3T_k + 4T_{k+1} - T_{k+2}}{2\Delta z} . \quad (2.31)$$

З правою односторонньою різницевою схемою другого порядку:

$$\frac{dT}{dz}(t, z_k) = \frac{T_{k-2} - 4T_{k-1} + 3T_k}{\Delta z} . \quad (2.32)$$

Граничні умови до точки для точки $z_0 = a$:

$$\alpha_a \cdot T_0 - \frac{\lambda \cdot (-3T_0 + 4T_1 - T_2)}{2\Delta z} = \alpha_a \cdot T_a(t). \quad (2.33)$$

$$\left(\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}\right) \cdot T_0 - \frac{2\lambda}{\Delta z} \cdot T_1 + \frac{\lambda}{2\Delta z} \cdot T_2 = \alpha_a \cdot T_a(t). \quad (2.34)$$

Виділимо в рівнянні T_0 :

$$T_0 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z} \cdot T_1 - \frac{\lambda}{2\Delta z} \cdot T_2 + \alpha_a \cdot T_a(t)}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}. \quad (2.35)$$

Формула для похідної за часом T_1 :

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{(-2T_1 + T_0 + T_2)}{\Delta z^2}. \quad (2.36)$$

Її розгорнутий запис:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \left(\frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3 \cdot \lambda}{2\Delta z}} - 2 \right) \cdot T_1 + \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \left(1 - \frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3 \cdot \lambda}{2\Delta z}} \right) \cdot T_2 + \\ + \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \frac{\alpha_a}{\alpha_a + \frac{3 \cdot \lambda}{2\Delta z}} \cdot T_a(t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Маємо вираз похідної за часом T_1 через сусідні вузли та граничну умову.

Дискретне рівняння для всіх внутрішніх вузлів (крім граничних), де використовується центрально різницева схема для другої похідної (внутрішні точки $k = 2, 3, \dots, n - 1$):

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}}{\Delta z^2}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot T_{k-1} - 2 \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot T_k + \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot T_{k+1}. \quad (2.39)$$

Для останнього внутрішнього вузла T_n (застосування дискретизації в останній внутрішній точці):

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{\Delta z^2}. \quad (2.40)$$

Застосування дискретизації та граничних умов у точці $z_{n+1} = b$ (z_{n+1})

$$\alpha_b \cdot T_{n+1} + \lambda \cdot \frac{(T_{n-1} - 4T_n + 3T_{n+1})}{2\Delta z} = \alpha_b \cdot T_b(t) \quad (2.41)$$

$$\frac{\lambda}{2\Delta z} \cdot T_{n-1} - \frac{2\lambda}{\Delta z} \cdot T_n + \left(\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}\right) \cdot T_{n+1} = \alpha_b \cdot T_b(t) \quad (2.42)$$

$$T_{n+1} = -\frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_b + \frac{2\lambda}{\Delta z}} \cdot T_{n-1} + \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_b + \frac{2\lambda}{\Delta z}} \cdot T_n + \frac{\alpha_b}{\alpha_b + \frac{2\lambda}{\Delta z}} \cdot T_b(t) \quad (2.43)$$

$$\alpha_b \cdot T(t, b) + \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}(t, b) = \alpha_b \cdot T_b(t) \quad (2.44)$$

де α_a , α_b – коефіцієнт теплопередачі при $z = a$, $z = b$;

Розгорнутий запис рівняння для T_n буде мати такий вигляд:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \frac{T_{n-1} - 2T_n + T_{n+1}}{\Delta z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n}{\partial t} = & \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \left(1 - \frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \right) \cdot T_{n-1} + \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \left(\frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} - 2 \right) \cdot T_n + \\ & + \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot \Delta z^2} \cdot \frac{\alpha_b}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_b(t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Для запису системи рівнянь у більш компактній матричній формі з вводяться коефіцієнти μ .

$$\begin{aligned} \mu_1 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} - 2; \quad \mu_2 = 1 - \frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad \mu_3 = \frac{\alpha_a}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \\ \mu_4 = 1 - \frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad \mu_5 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} - 2; \quad \mu_6 = \frac{\alpha_b}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Перепишемо систему ОДУ у векторній формі:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho\Delta z^2} \cdot (\mu_1 \cdot T_1 + \mu_2 \cdot T_2 + \mu_3 \cdot T_a(t)). \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho\Delta z^2} \cdot (T_{k-1} - 2T_k + T_{k+1}); \quad k=2, 3, \dots, n-1. \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho\Delta z^2} \cdot (\mu_4 \cdot T_{n-1} + \mu_5 \cdot T_n + \mu_6 \cdot T_b(t)). \quad (2.49)$$

Вводяться вектори і матриці:

$\{T\} = (T_1, T_2, \dots, T_n)^T$ – вектор температур у вузлах ;

$\{u\} = (T_a(t), T_b(t))^T$ – вектор граничних умов.

Матриця $[A]$ має розмір $(n \times n)$ і є матрицею коефіцієнтів при значеннях T_i для внутрішніх вузлів:

$$[A] = \begin{pmatrix} \mu^1 & \mu^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \mu^4 & \mu^5 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Матриця [B] має розмір (n x 2) і є матрицею коефіцієнтів при граничних умовах, містить коефіцієнти μ_3 і μ_6 .

$$[B] = \begin{pmatrix} \mu^3 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mu^6 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Запис всієї системи рівнянь у матричній формі приведено у вид:

$$\frac{\partial \{T\}}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot p \cdot \Delta z^2} \cdot [A] \cdot \{T\} + \frac{\lambda}{c \cdot p \cdot \Delta z^2} \cdot [B] \cdot \{u\}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \{T\}}{\partial t} = [A] \cdot \{T\} + [B] \cdot \{u\}.$$

де [A] – матриця, що містить коефіцієнти дискретизованого оператора; [B] – матриця, що містить коефіцієнти граничних умов.

Аналогічним чином робимо для температур на границях середовищ:

$$T_0 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_1 - \frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_2 + \frac{\alpha_a}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_a(t), \quad (2.53)$$

$$T_{n+1} = -\frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_{n-1} + \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_n + \frac{\alpha_b}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}} \cdot T_b(t). \quad (2.54)$$

$$v_1 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad v_2 = -\frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad v_3 = \frac{\alpha_a}{\alpha_a + \frac{3\lambda}{2\Delta z}};$$

$$v_4 = -\frac{\frac{\lambda}{2\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad v_5 = \frac{\frac{2\lambda}{\Delta z}}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}; \quad v_6 = \frac{\alpha_b}{\alpha_b + \frac{3\lambda}{2\Delta z}}. \quad (2.55)$$

Матричне представлення кінцево-різницевої схеми:

$$\begin{Bmatrix} T^0 \\ T_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & v_4 & v^5 \end{bmatrix} \cdot \{T\} + \begin{bmatrix} v^3 & 0 \\ 0 & v^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_a(t) \\ T_b(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.56)$$

де v_1, v_2, \dots, v_6 – скалярні коефіцієнти, отримані з дискретизації граничних умов; $T_a(t)$ та $T_b(t)$ представляють собою граничні умови.

Початкові умови для температури:

$$\{T\}_{t=0} = \{\Gamma^{(0)}(z_1), \Gamma^{(0)}(z_2), \dots, \Gamma^{(0)}(z_n)\}^T. \quad (2.57)$$

Рівняння (2.56) у векторно-матричному вигляді:

$$\begin{Bmatrix} T^0 \\ T_{n+1} \end{Bmatrix} = [C] \cdot \{T\} + [D] \cdot \begin{Bmatrix} T_a(t) \\ T_b(t) \end{Bmatrix} = [C] \cdot \{T\} + [D] \cdot \{u\}, \quad (2.58)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} T_a(t) \\ T_b(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{in}^{(1)}(t) \\ T_{in}^{(2)}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2.59)$$

2.4 Висновки за розділом 2

Для математичного моделювання процесів в ТОВА побудовані схеми для загального виду переносу тепла, схеми для потоків на межах перегородки та середовищ теплообміну, схеми для процесів всередині перегородки. Складена математична модель процесів у ключових точках вздовж осі розповсюдження теплового потоку, складені рівняння залежності температур на виходах середовищ теплообміну від температур на вході у теплообмінник. Складена підсумкова система рівнянь для математичної моделі для її використання у комп'ютерному моделюванні. Зроблено аналіз процесів з використанням методу напів-дискретизації, під час якого система ОДУ приведена до векторно-матричного вигляду.

3 СИСТЕМА АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІННОГО АПАРАТУ

Для управління температурою в моделі ТОА використовується ПІД-регулятор. Основною задачею регулятора є мінімізація похибки між заданою температурою та фактичною температурою. Окрім визначення параметрів ПІД-регулятора, розглядається дискретизація системи, метод найменших квадратів, а також вводяться додаткові заміни змінних і виводяться умови стійкості системи.

3.1 Моделювання теплообмінного апарату як об'єкту автоматизації

Створимо математичну модель об'єкту управління (рис. 3.1). В якості вхідних параметрів дамо температури двох потоків на вході в ТОА, а вихідними параметрами будуть температури цих же потоків на виході з ТОА.

Зв'язок вхідних та вихідних параметрів у векторній формі:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} T_{in}^{(1)}(t) \\ T_{in}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{модель} \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_{out}^{(1)}(t) \\ T_{out}^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \{\xi\} \quad (3.1)$$

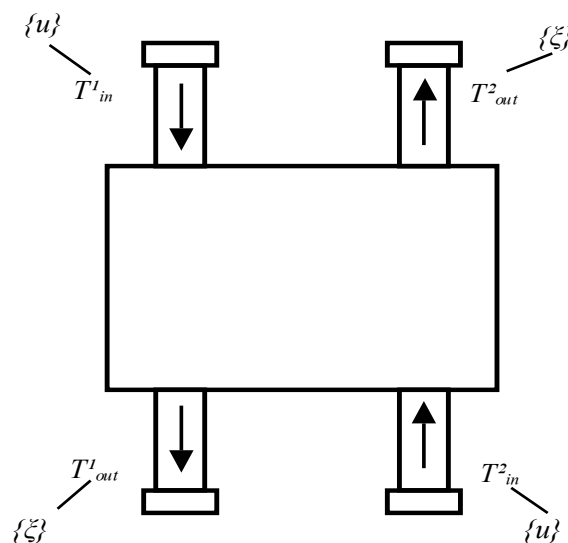


Рисунок 3.1 – Математична модель об'єкту управління

На рис. 3.1 прийняті наступні позначення: $\{u\}$ – керуючі параметри (набір впливів, які ми маємо змінювати для управління об'єктом; $\{\xi\}$ – керовані параметри, які ми беремось контролювати (у даному випадку – температура); $u_1=T^{(1)}_{in}$, $u_2=T^{(2)}_{in}$ – керуючі впливи – температури вхідних потоків; $\xi_1=T^{(1)}_{out}$, $\xi_2=T^{(2)}_{out}$ – керовані параметри – температури вихідних потоків.

Розглядаємо приклад автоматизації температури середовищ. Для визначення параметрів моделі використовуємо ідентифікацію на основі даних моделювання теплообмінних апаратів. Для ТОА, як об'єкта автоматизації, динаміка зміни температури в теплообміннику описується диференціальним рівнянням першого порядку з початковою умовою:

$$\frac{d\xi}{dt} + a_0 \cdot \xi = b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2; \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (3.2)$$

де a_0 – коефіцієнт, що характеризує теплову інерційність системи; b_1 , b_2 – коефіцієнти впливу вхідних температур; $\xi(t)$ – температура у момент часу t ; ξ_0 – початкове значення температури; $\frac{d\xi}{dt}$ – швидкість зміни температури; u_1 , u_2 – керуючі впливи.

Для визначення параметрів моделі (a_0 , b_1 , b_2) використовується ідентифікація на основі експериментальних даних або даних моделювання теплообмінних апаратів.

3.2 Визначення параметрів автоматичного регулятора

Для управління температурою в теплообміннику використовується ПІД-регулятор. Основною задачею регулятора є мінімізація похибки між потрібною заданою температурою $T^{(2)}_w$ та фактичною температурою ξ .

Похибка регулювання:

$$x = \xi - T_w^{(2)}, \quad (3.3)$$

$$\xi = x + T_w^{(2)}, \quad (3.4)$$

$$T_w^{(2)} = \text{const}.$$

Динаміка зміни похибки описується рівнянням з початковими умовами:

$$\frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = -a_0 \cdot T_w^{(2)} + b_1 \cdot u_1 + b_2 \cdot u_2; \quad x(0) = \xi_0 - T_w^{(2)}. \quad (3.5)$$

Рівняння ПІД-регулятора для керування температурою u_1 має вигляд:

$$u_1 = \bar{u}_1 - k_p \cdot x - k_i \cdot \int x \cdot dt - k_d \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (3.6)$$

де \bar{u}_1 – задане значення управляючого впливу; k_p – коефіцієнт пропорційної складової; k_i – коефіцієнт інтегральної складової; k_d – коефіцієнт диференційної складової.

Коефіцієнт k_p впливає на швидкодію системи; коефіцієнт k_i забезпечує відсутність статичної помилки; коефіцієнт k_d покращує динамічні характеристики системи.

Для забезпечення нульової похибки ($x = 0$) в усталеному режимі необхідно виконання умови:

$$-a_0 \cdot T_w^{(2)} + b_1 \cdot \bar{u}_1 + b_2 \cdot u_2 = 0 \quad (3.7)$$

$$\bar{u}_1 = \frac{a_0 \cdot T_w^{(2)} - b_2 \cdot u_2}{b_1} \quad (3.8)$$

Після підстановки рівняння ПІД-регулятора в рівняння динаміки похибки отримуємо повне рівняння системи з регулятором:

$$\frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = -a_0 \cdot T_w^{(2)} + b_1 (\bar{u}_1 - k_p \cdot x - k_i \cdot \int x dt - k_d \frac{dx}{dt}) + b_2 \cdot u_2, \quad (3.9)$$

$$(1 + b_1 \cdot k_d) \cdot \frac{dx}{dt} + (a_0 + b_1 \cdot k_p) \cdot x + k_i \cdot \int x dt = -a_0 \cdot T_w^{(2)} + b_1 \cdot \bar{u}_1 + b_2 \cdot u_2. \quad (3.10)$$

Три важливих умови стійкості системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_i > 0. \\ a_0 + b_1 k_p > 0. \\ 1 + b_1 k_d > 0. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Всі параметри регулятора (k_p , k_i , k_d) повинні вибиратися з урахуванням умов стійкості. Система стійка, якщо всі коефіцієнти знаменника позитивні.

Для спрощення аналізу вводиться нова змінна y , залежна від помилки x :

$$x = \frac{dy}{dt}; \quad y(0) = 0. \quad (3.12)$$

Підсумкове рівняння в нових змінних:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + b_1 \cdot k_d) \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_0 + b_1 \cdot k_p) \frac{dy}{dt} + k_i \cdot y = u(t), \\ y(0) = 0; \quad \frac{dy}{dt}(0) = \xi_0 - T_w^{(2)}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

3.3 Дослідження автоматичного регулятора

Для спрощення складних операцій інтегрування та диференціювання по часу до алгебраїчних операцій будемо вводити передаточну функцію: s – оператор Лапласа, який дозволяє перейти від часової області до частотної. При

використанні оператора Лапласа інтеграл $\int x dt$ перетворюється на простий вираз $\frac{x(s)}{s}$. Похідна $\frac{dx}{dt}$ перетворюється на добуток $s \cdot x(s)$.

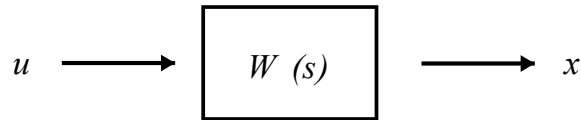


Рисунок 3.2 – Структурна схема системи автоматичного регулювання

На рис. 3.2 прийняті наступні позначення: u – вхідний вплив; s – оператор Лапласа; $W(s)$ – передавальна функція системи, x – вихідна змінна.

Передавальна функція:

$$W(s) = \frac{b_1}{s + a_0} . \quad (3.14)$$

Передавальна функція використана для розрахунку згладжування збурень температури: якщо розкласти $\frac{b_1}{s + a_0}$ у частотній області ($s = j \cdot \omega$, де ω – частота), то модуль функції зменшується з ростом частоти ω . На низьких частотах $\omega \rightarrow 0$; $W(j \cdot \omega) \approx \frac{b_1}{a_0}$; система пропускає сигнал без змін, на високих частотах $\omega \rightarrow \infty$; $W(j \cdot \omega) \rightarrow 0$, шуми подавляються.

Передавальна функція описує теплову інерційну систему, збурення згладжуються за рахунок інерції системи.

Щоб розробити регулятор для компенсації динаміки об'єкта, замкнемо систему і забезпечимо точне підтримання температури на виході, незважаючи на збурення (зміну температури вхідного потоку або теплопередачі). Замкнена система — це система управління, де вихідне значення подається назад на вхід через зворотний зв'язок для корекції помилки.

Для вхідного керуючого сигналу, як функцію по часу, динамічні властивості замкненої системи (регулювання можна описати за допомогою передавальної функції $W_x(s)$, яка пов'язує вхідне збурення $\tilde{u}(t)$ з вихідним сигналом x . Структурна схема системи представлена на рис.3.3.

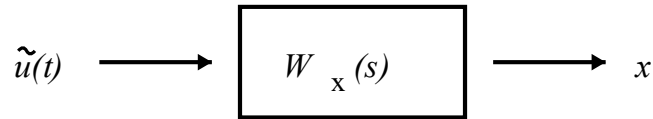


Рисунок 3.3 – Передавальна функція системи в операторній формі

$$W_x(s) = \frac{s}{(1 + b_1 \cdot k_d) \cdot s^2 + (a_0 + b_1 \cdot k_p) \cdot s + b_1 \cdot k_i} . \quad (3.15)$$

Така форма представлення дозволяє аналізувати динамічні характеристики системи та її стійкість. у знаменнику характеристичне рівняння системи з ПД-регулятором. Де член s^2 відповідає за інерційність системи; член s відповідає за демпфування; вільний член відповідає за статичну точність. Розв'яжемо характеристичне рівняння. Умови стійкості системи (3.11) залишаються такими ж. Після спрощення характеристичного рівняння ПД – регулятора отримали нове рівняння:

$$(1 + b_1 \cdot k_d) \frac{d^2 y}{dt^2} + (a_0 + b_1 \cdot k_p) \frac{dy}{dt} + k_i \cdot y = 0 , \quad (3.16)$$

$$(1 + b_1 \cdot k_d) \cdot \lambda^2 + (a_0 + b_1 \cdot k_p) \cdot \lambda + k_i = 0 , \quad (3.17)$$

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = \xi_0 - T_w^{(2)} .$$

де λ – корінь характеристичного рівняння.

Розділимо всі члени на $(1 + b_1 \cdot k_d)$ щоб привести рівняння до стандартної форми:

$$\lambda^2 + 2 \zeta \cdot \omega_n \cdot \lambda + \omega_n^2 = 0 .$$

$$2\zeta \cdot \omega_n = a_0 + b_1 \cdot k_p \frac{a_0 + b_1 \cdot k_p}{1 + b_1 k_d}, \quad (3.18)$$

$$\omega_n^2 = \frac{k_i \cdot b_1}{1 + b_1 k_d}. \quad (3.19)$$

де ζ – коефіцієнт згасання; ω_n – власна частота.

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2}, \quad (3.20)$$

де $\zeta \omega_n > 0$ це стійкість, тобто загасання невід'ємне.

Корені характеристичного рівняння визначають тип поведінки системи. Поведінка системи залежить від дискримінанта: $(\zeta\omega_n)^2 - \omega_n^2$. Для стійкості необхідно, щоб $\text{Re}(\lambda) < 0$, тому проведемо аналіз поведінки системи за різних співвідношень ζ і ω .

Типи коренів:

1) Якщо $\zeta^2 - 1 > 0$, то корені дійсні й різні, це – поведінка неколивальної системи $\frac{1}{4}(a_0 + b_1 \cdot k_p)^2 > k_i(1 + b_1 \cdot k_d)$.

2) Якщо $\zeta^2 - 1 = 0$, то корені дійсні й рівні, це – поведінка критичного загасання $\frac{1}{4}(a_0 + b_1 \cdot k_p)^2 = k_i(1 + b_1 k_d)$.

3) Якщо $\zeta^2 - \omega_n^2 < 0$, то корені комплексно-сполучені, це – поведінка коливальної системи з загасанням $\frac{1}{4}(a_0 + b_1 \cdot k_p)^2 < k_i(1 + b_1 \cdot k_d)$.

Проілюструємо як це виглядає графічно (рис. 3.4).

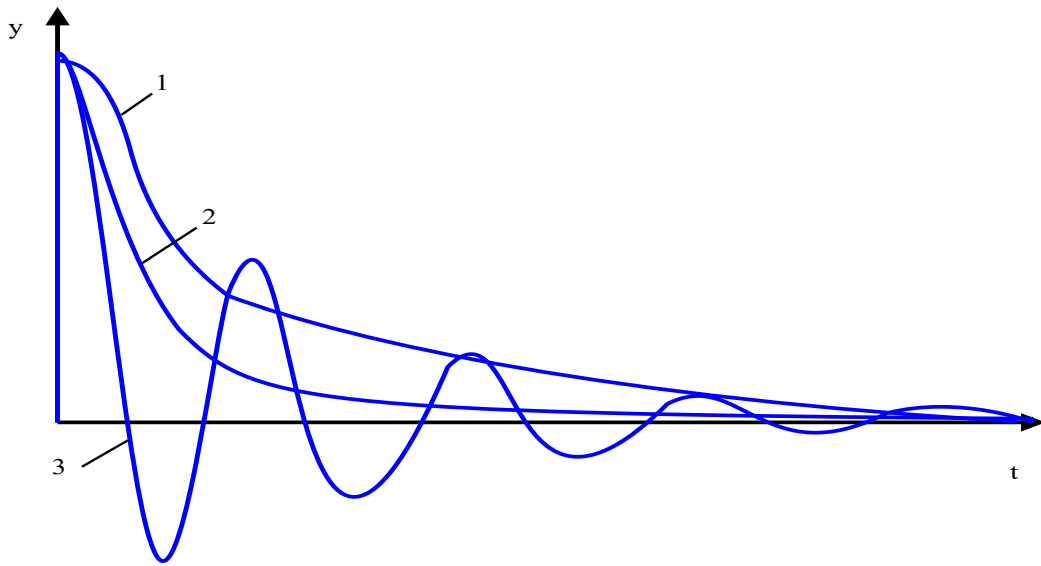


Рисунок 3.4 – Ілюстрація перехідних процесів для різних типів коренів

На рис. 3.4 прийняті наступні позначення: 1 – перерегулювання; 2 – критичне коливальне загасання; 3 – комплексні коливання.

3.4 Висновки за розділом 3

В розробленій математичній моделі ТОА визначили керуючі впливи та керовані параметри. Для управління температурою в теплообміннику використовується ПД – регулятор, параметри регулятора та умови стійкості системи визначає передавальна функція $W_x(s)$, вона дозволяє аналізувати динамічні системи знайти корені характеристичного рівняння. Передавальна функція $W(s)$ використана для розрахунку згладжування збурень температури. За аналізом стійкості системи показані типи поведінки системи в залежності від співвідношення параметрів. Результати досліджень по розділу будуть використані в комп'ютерному моделюванні ТОА.

4 КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІННИХ АПАРАТІВ

Розділ присвячено комп'ютерному моделюванню в середовищі SCILAB [15]. Користуючись системами рівнянь з попередніх розділів, застосовуючи матричні обчислення, проведемо ряд експериментів з моделювання та проведемо аналіз отриманих експериментально графічних представлень процесів.

4.1 Процеси в теплообмінному апараті

На основі системи диференціальних рівнянь (2.26) математичної моделі ТОА (рис. 4.1) склали програми (Додаток Б), розрахунку розподілу температури в сталевій стінці, що розділяє нагріваючу та нагрівану середовища. Підставили в рівняння фізичні параметри перегородки, граничні умови (температури гарячої та холодної серед на краях перегородки), коефіцієнти теплообміну на краях перегородки, ввели параметри витрати води та задали три різні варіанта дискретизації n (на скільки рівних вузлів буде розбита область дослідження). Обчисливши граничні коефіцієнти, створили матрицю A з внутрішніми вузлами системи, матрицю B впливу зовнішніх температур через граничні умови, матрицю C та вектор D граничних температур і підставили в систему рівнянь у матричній формі (2.52), (2.56) – (2.59), у кодї програми це рівняння має вигляд $\frac{dT}{dt} = AT + BU$; $y = CT + DU$.

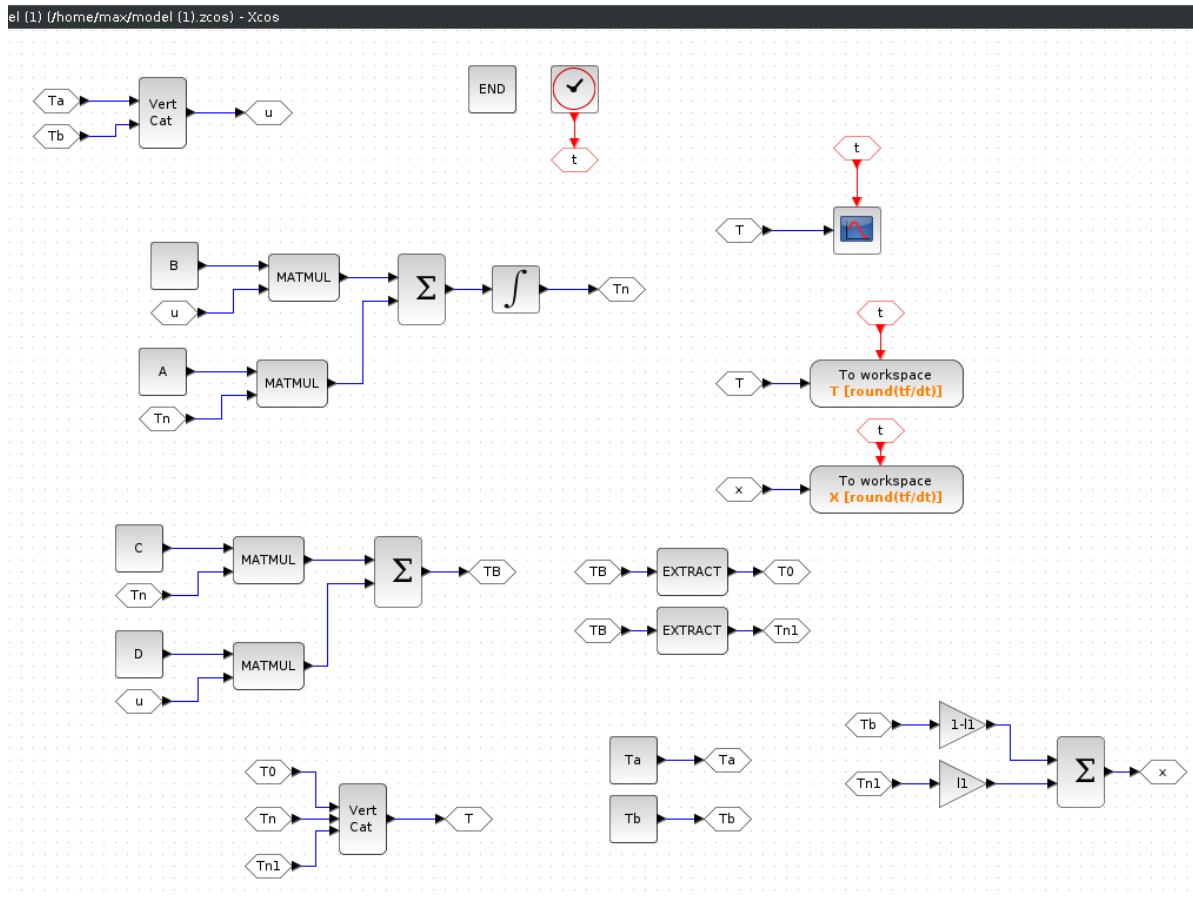


Рисунок 4.1 – Модель процесів у перегородці теплообмінного апарату

В результаті виконання програми були отримані графіки, які показують динаміку зміни в перегородці температури за часом: від лівого краю в початковий момент часу до правого краю перегородки.

Перший графік (рис. 4.2) демонструє процеси в області лівої стінки, яка стикається з нагрівальним середовищем $T(t, a)$.

На графіку температура на межі стінки змінюється за часом від початкового значення 300 К до усталеного значення, яке ближче до температури гарячої води 600 К. Збільшення числа вузлів сітки призводить до більш точного розв'язання – результати для $n = 15$ та $n = 255$ практично збігаються, для $n = 5$ є помітна похибка.

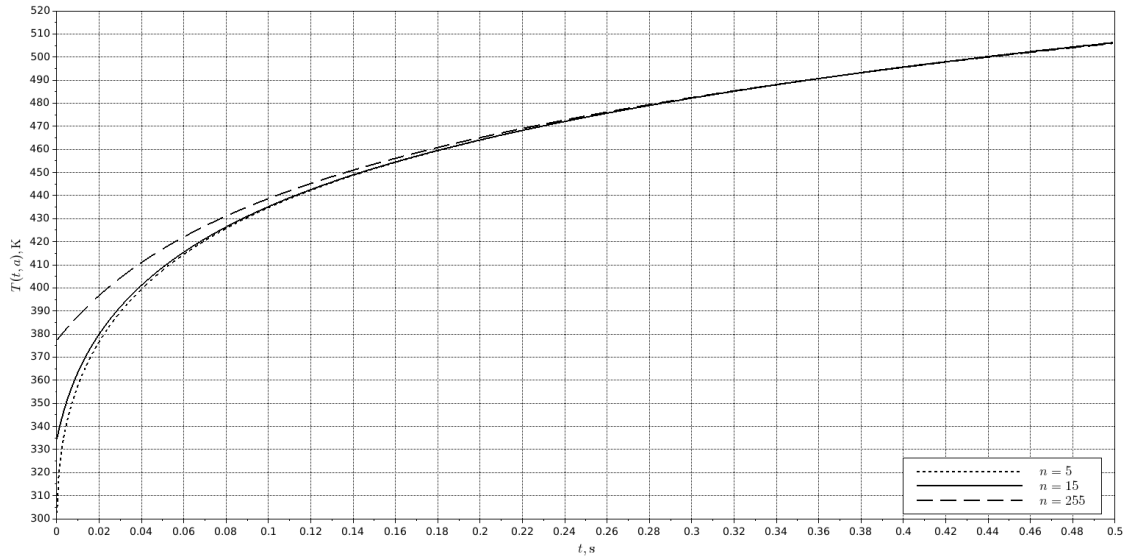


Рисунок 4.2 – Процеси у лівій межі стінки ТОА, $T(t, a)$

На графіку (рис. 4.3) температура в середині стінки поступово зростає від початкового значення 300 К. Видно, що зі збільшенням числа вузлів сітки (n) розв'язання стає більш точним – криві для $n = 15$ та $n = 255$ практично збігаються, а для $n = 5$ відхилення помітне, як і у попередньому випадку.

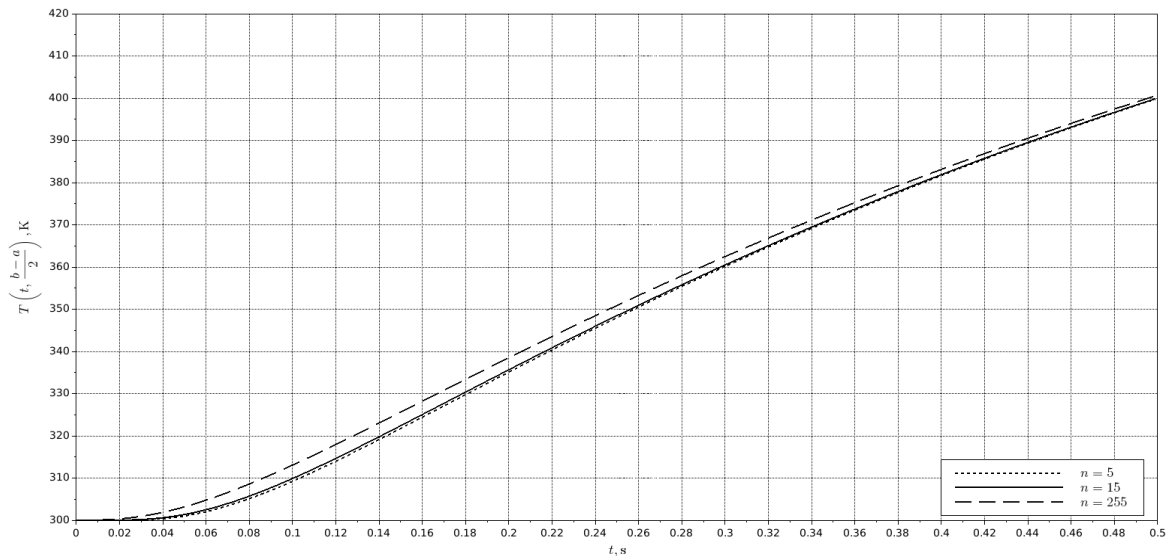


Рисунок 4.3 – Процеси в середині стінки ТОА, $T(t, \frac{b-a}{2})$

Графік на правій межі (рис. 4.4) схожий з графіком на лівій межі стінки, але температури нижчі, бо і середовище з правої сторони холодне. Так само, як у попередніх випадках, результати для сітки $n = 15$ та $n = 255$ практично збігаються, для $n = 5$ є помітне відхилення.

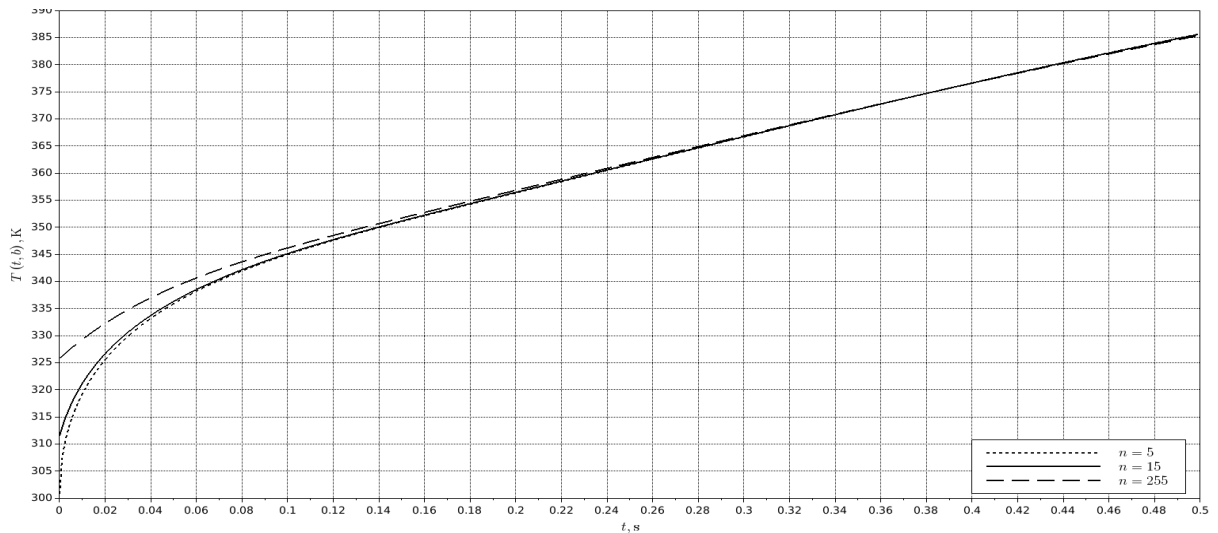


Рисунок 4.4 – Процеси у правій межі стінки ТОВА, $T(t, b)$

Для загальної оцінки на одному графіку (рис. 4.5) відображаються три температури, використовується лише одна сітка з $n = 255$ вузлами для максимальної точності.

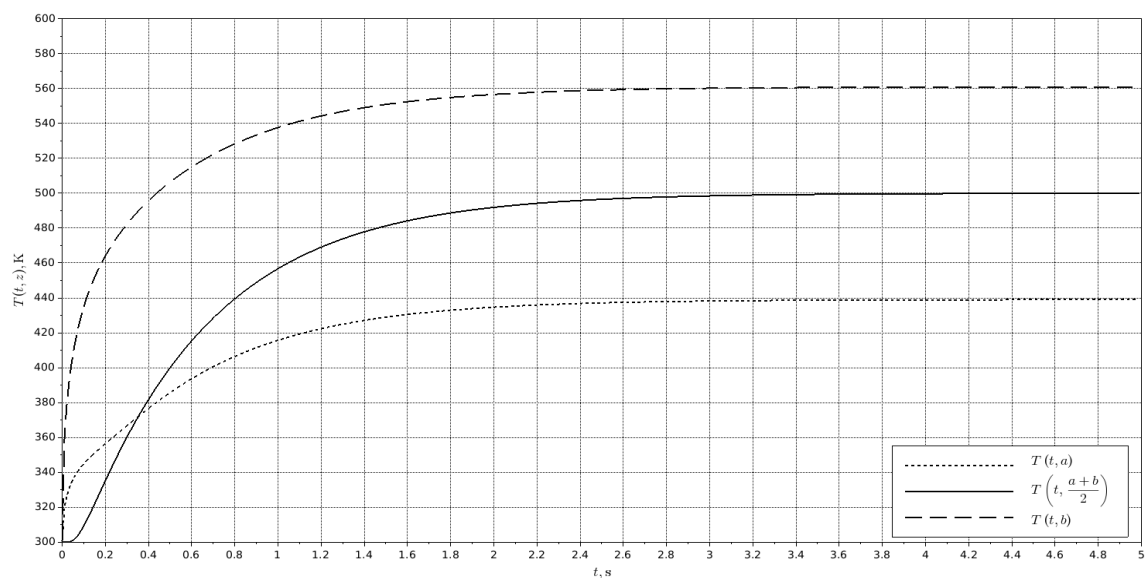


Рисунок 4.5 – Процеси на межі і в середині стінки ТОВА на одному графіку

Верхня крива (біля гарячої стінки) прагне до значення, близького до $T_a = 600$ К, нижня крива (біля холодної стінки) прагне до значення, близького до $T_b = 400$ К. Середня крива встановлюється на проміжному значенні. Спостерігається схожий на природний градієнт температури від гарячої до холодної сторони. Розташування середньої температури близько до посередині між крайніми значеннями, але в початковий момент часу процеси протікають нелінійно. Приблизно за 2 – 3 секунди температури виходять на усталену величину.

В програму додан параметр витрати води. Графік (рис. 4.6) дуже схожий і майже збігається з графіком процесів на правій межі стінки, але крива температур вища на 12 градусів, ніж крива температур на межі $T(t, b)$. Як і в попередніх випадках, точність при $n = 5$ нижча.

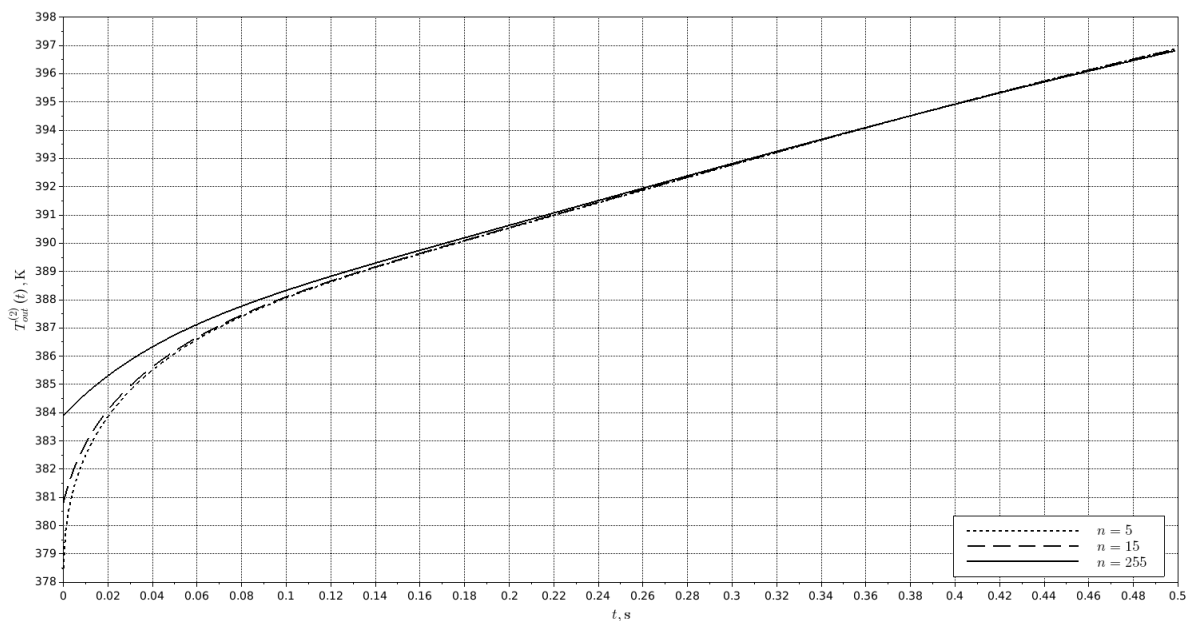


Рисунок 4.6 – Теплообмін з параметрами регулювання витрат потоку охолоджувальної води на виходному кінці ТОА, T_{out}^2

Додамо випадкові збурення температури у систему (рис 4.7).

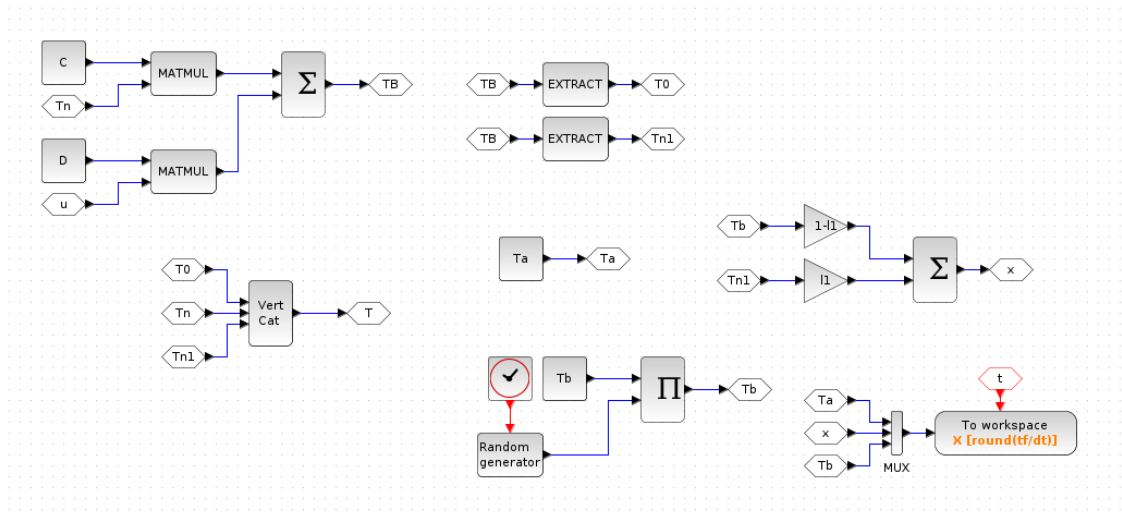


Рисунок 4.7 – Блок випадкових збурень температури

На графіку (рис. 4.8) зображені температури в моделі ТОА на вході $T(t,a)$, в середині $T(t, \frac{a+b}{2})$ та на виході $T(t,b)$. Після внесення впливу генератора випадкових коливань температури в один із граничних параметрів, у всіх трьох точках стінки спостерігаються сильні коливання, які трохи гасяться тепловою масою та інерцією системи: причому на протилежній стінці коливання більш згладжені, ніж посередині стінки теплообмінника.

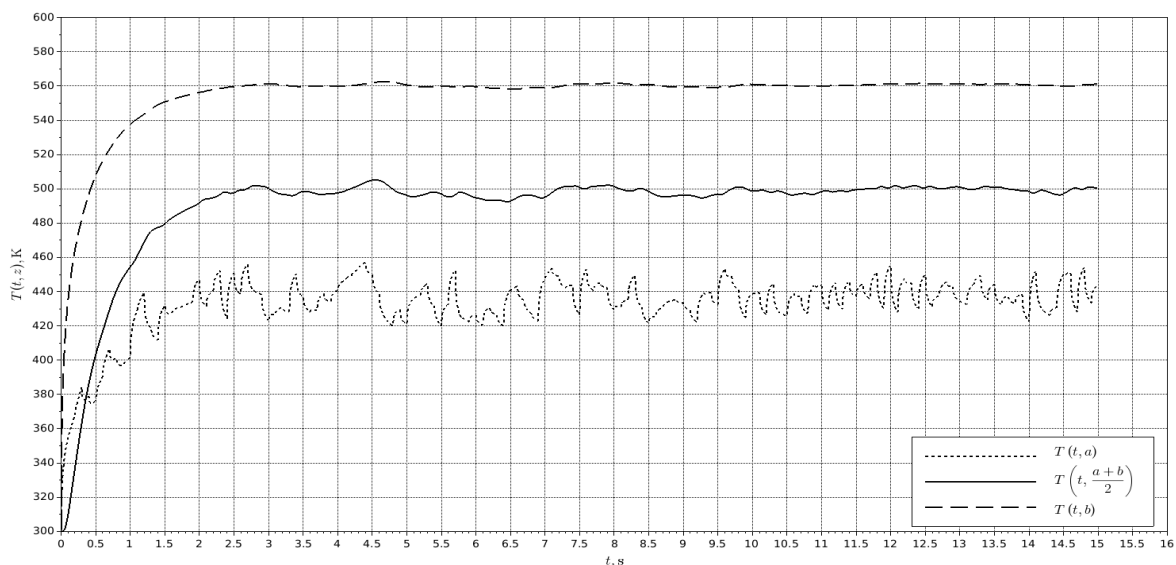


Рисунок 4.8 – Вплив випадкових коливань температури на лівій межі на температуру всередині перегородки та на її правій межі

На відміну від попереднього випадку, якщо впливати безпосередньо на температуру вхідної води середовища (2), то така система ніяк не згладжує коливання температури (рис. 4.9), оскільки вода не має такої великої теплової інерції, як у попередньому випадку.

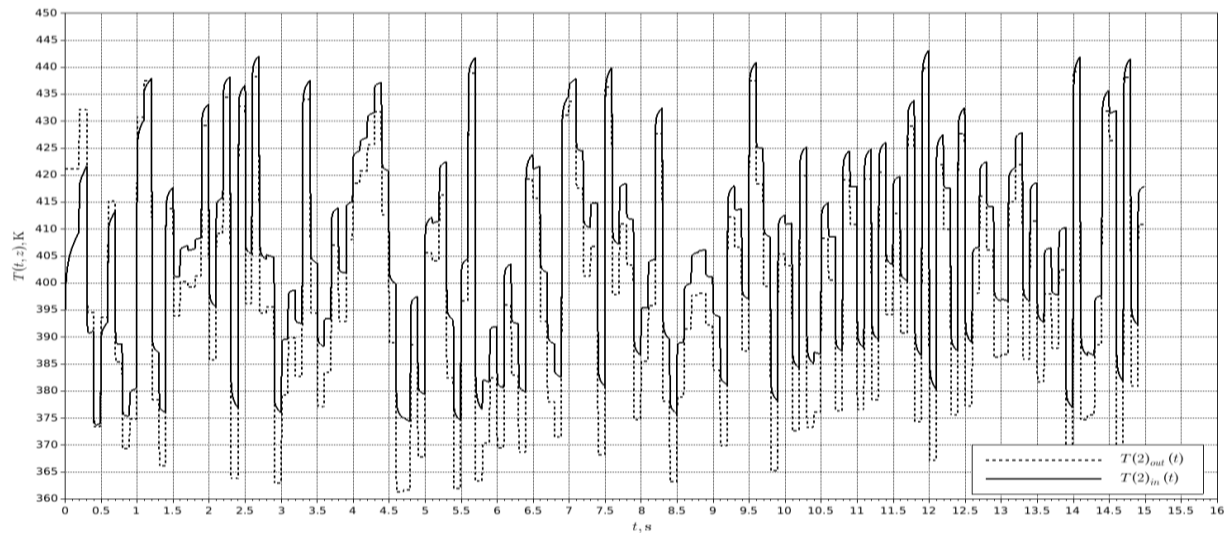


Рисунок 4.9 – Коливання температури нагріваємої води на вході та виході ТОВА

4.2 Ідентифікація теплообмінного апарату та визначення параметрів регуляторів

Використовуючи формулу (3.2) з попереднього розділу, перейдемо до числового розв'язання задачі і замінимо похідну $\frac{d\xi}{dt}$ на різницю.

Рівняння для дискретного часу набуло вигляду:

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{(\xi_{k+1} - \xi_k)}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

$$\frac{(\xi_{k+1} - \xi_k)}{\Delta t} + a_0 \cdot \xi_k = b_1 \cdot u_{1k}, \quad (4.2)$$

$$\xi_{(k+1)} + (a_0 \cdot \Delta t - 1) \cdot \xi_k = b_1 \cdot \Delta t \cdot u_{1k}. \quad (4.3)$$

Для зручності розрахунку та для спрощення рівняння введемо коефіцієнти A , B :

$$A = a_0 \cdot \Delta t - 1, \quad a_0 = \frac{A+1}{\Delta t}, \quad (4.4)$$

$$B = b_1 \cdot \Delta t, \quad b_1 = \frac{B}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

Рівняння в дискретній формі перетворено на вигляд:

$$A \cdot \xi_k - B \cdot u_k + \xi_{(k+1)} = 0. \quad (4.6)$$

Отримали остаточне рівняння для ідентифікації, яке використаємо в комп'ютерному моделюванні.

Для знаходження параметрів A та B використовується метод найменших квадратів – формується функція похибки для кожного вимірювання стану та управління на шаг k :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (A \cdot \xi_k - B \cdot u_k + \xi_{k+1})^2, \quad (4.7)$$

Для мінімізації похибки обчислюємо похідні функції S за параметрами A та B та прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0. \quad (4.8)$$

Рішення цих рівнянь дозволяє визначити A і B , які мінімізують сумарну похибку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial A} = \sum_{k=1}^{n-1} (A \cdot \xi_k - B \cdot u_{1k} + \xi_{k+1}) \cdot \xi_k = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial B} = \sum_{k=1}^{n-1} (A \cdot \xi_k - B \cdot u_{1k} + \xi_{k+1}) \cdot u_{1k} = 0. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Після отримання параметрів моделі А і В, відновлюємо вихідні коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{A+1}{\Delta t}, \quad b_1 = \frac{B}{\Delta t}. \quad (4.10)$$

Передатна функція об'єкта має вигляд:

$$W(s) = \frac{b_1}{s+a_0}. \quad (4.11)$$

Внесемо передатну функцію в схему для комп'ютерного моделювання (рис 4.10)

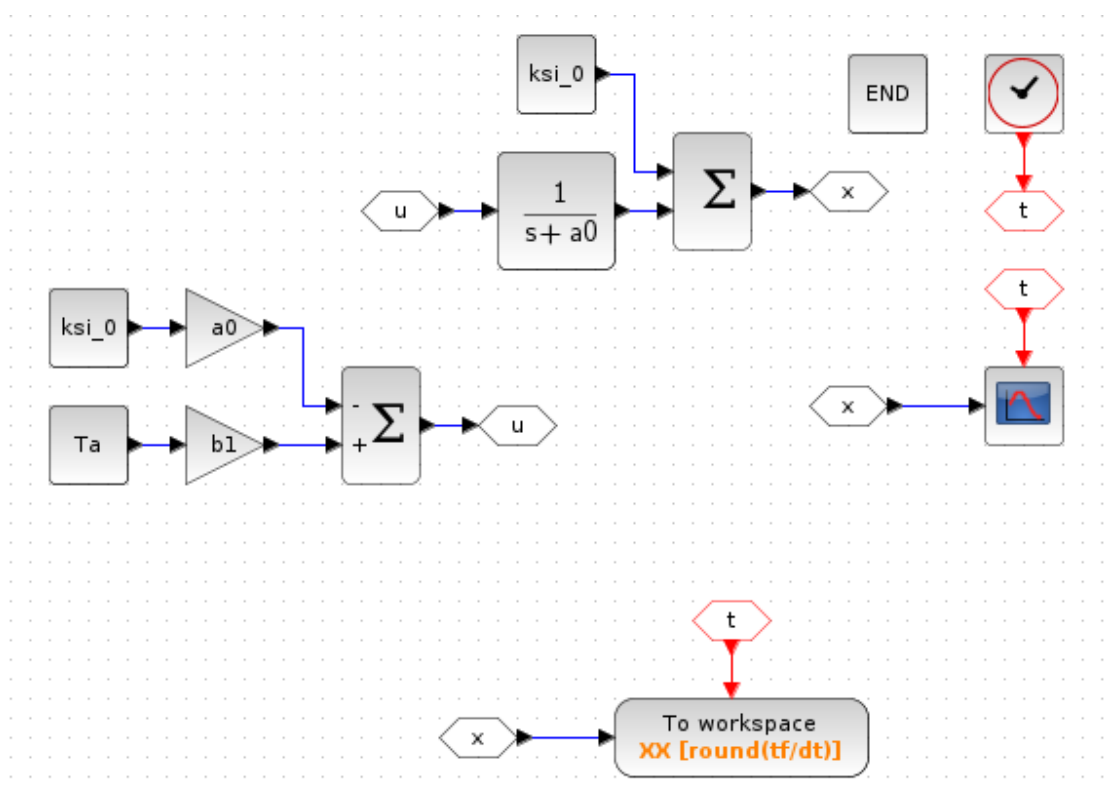


Рисунок 4.10 – Схема для передатної функції та коефіцієнтів

Невеликий розбіг графіків (рис 4.11) для експериментальних даних $T_{out}^2(t)$ та результатів ідентифікації $\xi(t)$ підтверджує коректність ідентифікації параметрів моделі.

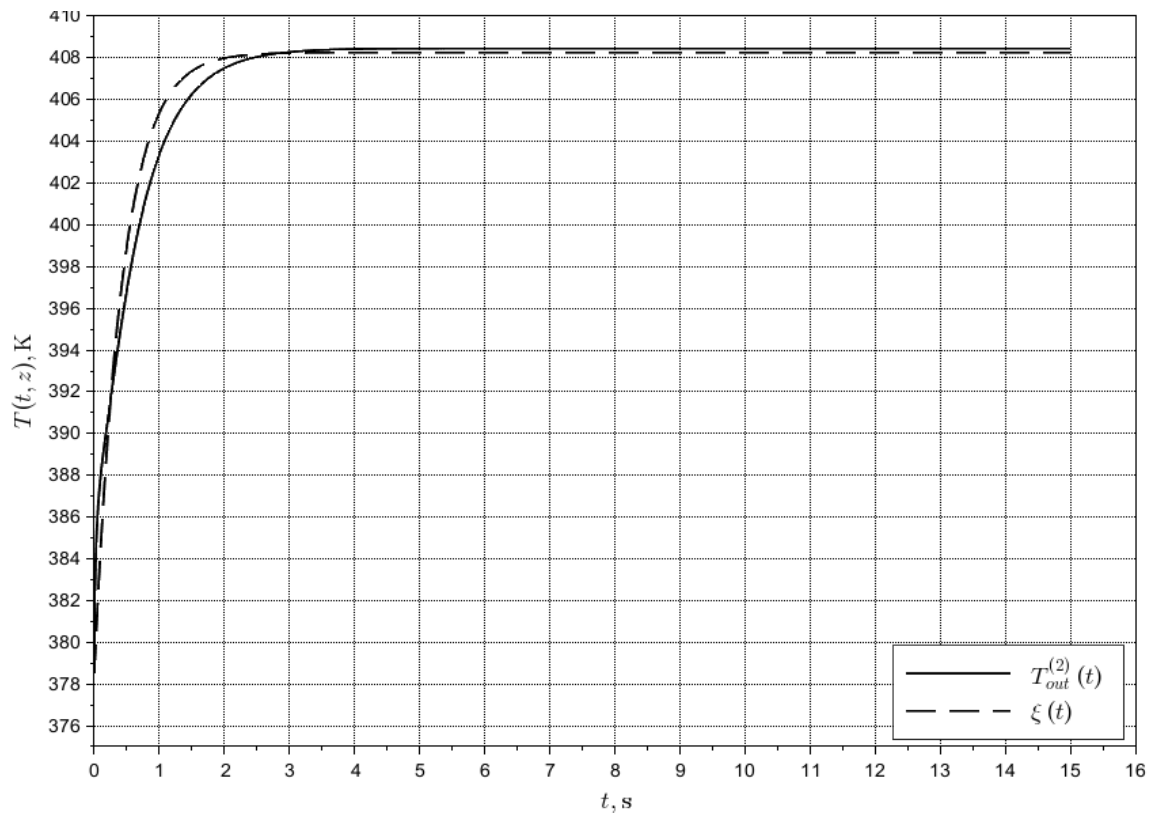


Рисунок 4.11 – Порівняння експериментальних даних $T_{out}^2(t)$ та результатів ідентифікації $\xi(t)$

4.3 Вплив регуляторів на процеси в теплообмінному апараті

Скористуємось формулою (3.15) у моделюванні передавальної функції [16]. Для системи, яка на виході (x) видає сигнал, що є похідною від вхідного сигналу (u), задамо параметри регулятора (рис. 4.12). Динаміку температури вихідного потоку при різних значеннях керуючого впливу $\bar{u} = 1, 2, 3$ можна побачити на графіку (рис. 4.13).

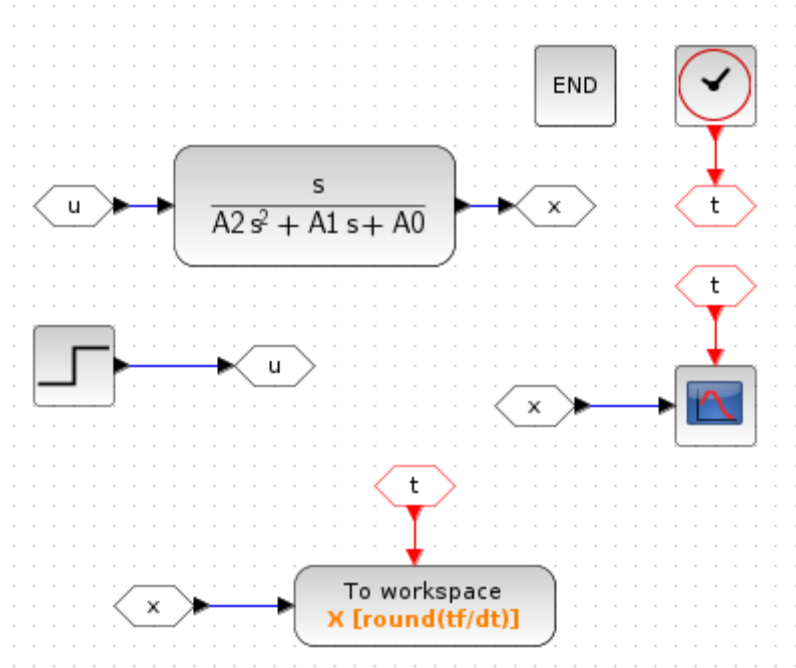


Рисунок 4.12 – Схема передатної функції з коефіцієнтами регулятора

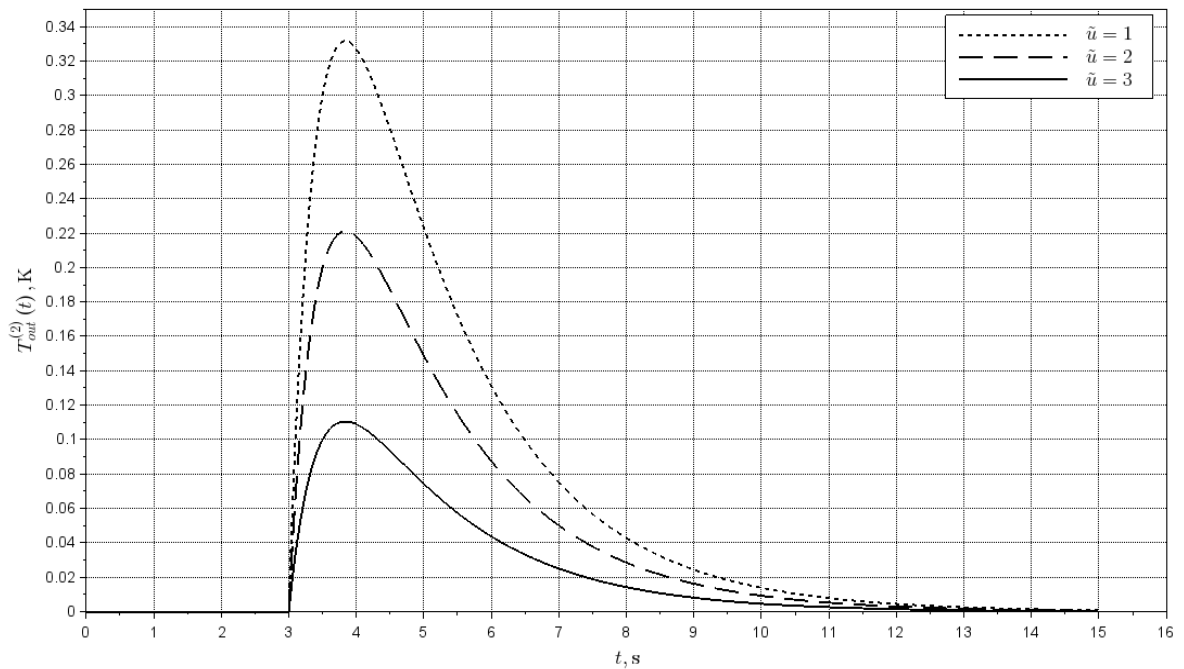


Рисунок 4.13 – Температури вихідного потоку при різних значеннях керуючого впливу $\bar{u} = 1, 2, 3$

Аналіз отриманих результатів показує, що система стійка при різних значеннях керуючого впливу, а достовірність математичної моделі

підтверджується результатами числового моделювання, що дозволяє використовувати її для моделювання системи управління теплообмінним апаратом.

4.4. Висновки по розділу 4

Як можна бачити, застосування теоретичних викладок у практичне використання пройшло успішно, і на графіках ми бачимо правдоподібне відображення процесів в теплообмінному апараті. Добре видно точки стабілізації температури та теплові процеси на обох границях, що контактують із середовищами теплообміну. Застосувавши передатну функцію для знаходження помилки, ми отримали невелике відхилення, що свідчить про високу точність моделювання.

5 ОХОРОНА ПРАЦІ

5.1 Загальні вимоги безпеки до робочого місця студента

Робоче місце студента, який працює за комп'ютером, повинно відповідати вимогам безпеки та комфорту [17]. Площа робочого місця має становити не менше 6 квадратних метрів на одного студента. Приміщення повинно бути обладнане системою вентиляції та щодня підлягати вологому прибиранню.

Робоче місце студента обладнується підйомно-поворотним стільцем з регульованою висотою; робочим столом з достатньою площею для розміщення комп'ютера та навчальних матеріалів; підставкою для ніг (за необхідності); монітором з чітким зображенням без дефектів.

5.2 Електробезпека при роботі з комп'ютерною технікою

Відповідно до ДСТУ 12.1.009-76 та ДНАОП 0.00-1.31-99, необхідно дотримуватися наступних вимог електробезпеки:

1. Усі електроприлади повинні бути заземлені через трипровідну мережу з нульовим захисним провідником.
2. Забороняється:
 - самостійно ремонтувати електрообладнання;
 - працювати з несправним обладнанням;
 - торкатися струмопровідних частин комп'ютера;
 - підключати невідомі пристрої до електромережі.

5.3 Вимоги безпеки під час роботи

Для забезпечення безпечної роботи студент повинен пройти інструктаж з охорони праці перед початком роботи; перевірити справність комп'ютера та

периферійних пристроїв; дотримуватися режиму праці та відпочинку (перерва 15 хвилин кожні 45-60 хвилин роботи); підтримувати чистоту робочого місця

При виникненні несправностей негайно повідомити викладача або відповідальну особу.

5.4 Небезпечні фактори при роботі з комп'ютером

При роботі з комп'ютером студент може піддаватися впливу таких небезпечних факторів:

- електричний струм (ризик ураження при несправності обладнання);
- електромагнітне випромінювання від монітора;
- напруження зору при тривалій роботі;
- статичне навантаження на опорно-руховий апарат;
- психоемоційне навантаження.

У разі виникнення надзвичайної ситуації студент повинен негайно припинити роботу, вимкнути обладнання та повідомити викладача або відповідальну особу.

ВИСНОВКИ

При створенні математичної моделі теплообмінного апарату для аналізу застосовані спрощення, і конструкція апарату представлена у вигляді плоскої стінки, що розділяє два теплоносії. В основі математичної моделі лежить рівняння теплопровідності в одномірному випадку, представлене у вигляді диференціальних рівнянь приватних похідних. Для чисельного розв'язання рівнянь застосовані рівняння розв'язання крайових задач та метод напівдискретизації, який полягає у розбитті координат на рівні ділянки та обчисленні значень у сітці вузлів. Врешті-решт рівняння були приведені до векторно-матричного вигляду «рівнянь системи з управлінням і виходом»:

$$\frac{d\{T\}}{dt} = [A] \cdot \{T\} + [B] \cdot \{u\}; \quad y = [C] \cdot \{T\} + [D] \cdot \{u\} .$$

що складається з регулюючої та регульованої частини, які вирішувалися матричними обчисленнями засобами програмного середовища SCILAB. Завдяки універсальності схематики, для практичних цілей ця математична модель може застосовуватися для проєктування, аналізу та оптимізації роботи теплообмінних апаратів різних конструкцій та різного призначення, у модель введені основні фізичні властивості теплообмінних апаратів. Проведено порівняння чисельного моделювання з експериментальними даними (інструментами та бібліотеками SCILAB), які підтверджують високу точність обчислень та невелику похибку. Це дослідження спрямоване на підвищення енергоефективності та зниження енергозатрат, що відповідає принципам «зеленого» проєктування.

Результати цієї роботи відносяться до двох Цілей сталого розвитку:

– «Ціль 7. «Доступна та чиста енергія», Завдання 7.4 «Підвищити енергоефективність економіки», Індикатор 7.4.1 «знизити витрати первинної енергії на одиницю ВВП: важливим є формування енергетичної безпеки, що

передбачає кардинальне підвищення енергоефективності національного виробництва»»,

– «Ціль 9. «Промисловість, інновації та інфраструктура», Завдання 9.4 «застосування ІКТ в АПК, енергетиці: відповідає вимогам екологічно безпечного розвитку й ефективного використання ресурсів та енергії»».

Окрім того, розробка енергоефективного управління узгоджується з «зеленими» та цифровими переходами в Європейському Союзі. Ці принципи оголошені «основними напрямками розвитку», що зазначено Генеральним директором Європейської Комісії у «пріоритетах розвитку Європейського Союзу до 2030 року».

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. ДСТУ 3008–2015. Звіти у сфері науки і техніки. Структура і правила оформлення. Документація. – Введ. 2015-06-22. - К.: Держстандарт України, 2015. - 31 с.

2. Методичні вказівки з підготовки та захисту кваліфікаційної роботи здобувачами другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 174 Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка, освітньо-професійних програм: «Комп'ютерно-інтегровані технологічні процеси і виробництва», «Комп'ютеризовані та робототехнічні системи» / Упоряд. І. Ш. Невлюдов, Р. В. Артюх, В. В. Безкоровайний, Н. П. Демська, В. В. Євсєєв, О. І. Филипенко, О. М. Цимбал. Харків: ХНУРЕ, 2024. 57 с.

3. Положення про кваліфікаційну роботу здобувача вищої освіти на другому (магістерському) рівні [Електронний ресурс] : Наказ ХНУРЕ від 06 травня 2021 р. № 143. – Режим доступу: https://nure.ua/wp-content/uploads/Main_Docs_NURE/143-vid-06.05.2021-pro-vvedennja-v-dijurishennja-vchenoi-radi -universitetu.pdf

4. Maksym, R., Romashov, Yu.(2023). The digital twin to represent the heat exchanger as the automation object through the parametric identification. <https://openarchive.nure.ua/entities/publication/7ff497e9-94b0-4529-9edc-8b1ed3678cb3>

5. European Commission, Directorate-General for Communication, Leyen, U. (2019) A Union that strives for more : my agenda for Europe : political guidelines for the next European Commission 2019-2024. Publications Office. <https://data.europa.eu/doi/10.2775/018127>.

6. European Commission: Directorate-General for Communication and Leyen, U., Europe's choice – Political guidelines for the next European Commission 2024–2029, Publications Office of the European Union, 2024, <https://data.europa.eu/doi/10.2775/260104>.

7. Beneš, T, Husák, M., Mihálik, O., Vancl, R., & Z. Bradáč, Z. (2024). Digital twin of heat exchange station, IFAC-PapersOnLine, 2024, Volume 58, Issue 9, P. 311-316.

8. Applied Digital Twin Concepts Contributing to Heat Transition in Building, Campus, Neighborhood, and Urban Scale by Ekaterina Lesnyak, Tabea Belkot, Johannes Hurka, Jan Philipp Hörding, Lea Kuhlmann, Pavel Paulau, Marvin Schnabel, Patrik Schönfeldt and Jan Middelberg, <https://doi.org/10.3390/bdcc7030145>

9. Nevliudov, I., Ratushnyi, O., & Romashov Yu. (2023). Development of General Approaches for Mathematical Modelling of Heat Exchangers as Automation Objects // Manufacturing & Mechatronic Systems 2023: Proceedings of VIIst International Conference, Kharkiv, October 19-20, 2023: Theses of Reports / [Ed. I.Sh. Nevlyudov (chief editor).] - Kharkiv .: [electronic version], 2023. - 163 p. - pp. 153-157.

10. Ekaterina Lesnyak. (2023). Applied Digital Twin Concepts Contributing to Heat Transition in Building, Campus, Neighborhood, and Urban Scale, <https://doi.org/10.3390/bdcc7030145>

11. Невлюдов І. Ш., Ромашов Ю. В. (2020). Метод напівдискретизації для оптимізації програмного управління системами з розподіленими параметрами, <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-1-08>

12. YU. Romashov, E. Povolotsky. (2017). Using the method of finite differences to solve the rod fuel element shell stress-strain behavior problem. <https://core.ac.uk/download/pdf/161793153.pdf>

13. Gudmundur R. Jonsson, Olafur Petur Palsson, K. Sejling. (1992). Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. Modeling and Parameter Estimation of Heat Exchangers—A Statistical Approach. https://www.researchgate.net/publication/245372677_Modeling_and_Parameter_Estimation_of_Heat_Exchangers-A_Statistical_Approach

14. S. Alyokhina, I. Nevliudov and Y. Romashov, "The Feed Water Level Improved Automated Control for Steam Generators of Nuclear Power Plants", in

2022 IEEE 4th International Conference on Modern Electrical and Energy System (MEES), Kremenchuk, Ukraine, 2022, pp. 1-6.

15. Michaël Baudin.(2017).Numerical Derivatives in Scilab, <https://www.scilab.org/numerical-derivatives-in-scilab>

16. Hulkó G., Belavý C., Ondrejkoivič K., Bartalský L., Bartko M. Control of technological and production processes as distributed parameter systems based on advanced numerical modeling // Control Engineering Practice.- 2017. - Vol. 66. - P.23-38.

17. Навчальний посібник "Безпека життєдіяльності" / Т. Є. Стищенко, Г. В. Пронюк, Н. М. Сердюк, І. І. Хондак ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків : ХНУРЕ, 2018. 336 с. – ISBN 978-966-659-246-3.