

**В. А. СВЕТЛИЧНЫЙ**, аспирант ХНУРЭ, Харьков;  
**Ю. Е. ХОРОШАЙЛО**, канд. техн. наук, доцент ХНУРЭ, Харьков;  
**В. В. ТУЛУПОВ**, к.т.н, доцент ХНУВД, Харьков

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВТОРИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРИ КОНТРОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВИХРЕТОКОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ**

Предложенная методика расчета электромагнитных полей вихревых токов в тонких пленках, на основе интегральных уравнений с использованием метода вторичных источников.

Запропонована методика розрахунку електромагнітних полів вихрових струмів в тонких плівках, на основі інтегральних рівнянь з використанням метода вторинних джерел.

The method of calculating the electromagnetic fields of eddy currents in thin films, based on the integral equations method of secondary sources

**Введение.** В настоящее время в мире, в том числе и в нашей стране наблюдается рост высокотехнологичных производств. Выпускаемая продукция должна соответствовать стандартам качества. Исходя из этого, системы контроля качества являются важнейшими составляющими любого технологического процесса [1]. Разнообразие и сложность геометрических форм деталей современного электротехнического оборудования, увеличение электромагнитных нагрузок и связанная с этим необходимость учета нелинейности среды, определяют предельно жесткие требования к точности расчетов электромагнитных полей.

Одним из наиболее эффективных и универсальных численных методов расчета электромагнитных полей является метод интегральных уравнений [2]. Однако, из-за некоторой сложности математического аппарата, он не нашел еще достаточно широкого распространения в электротехнических расчетах. Разработчики систем неразрушающего контроля, чаще обращаются к более громоздкому методу сеток. Огромный объем вычислений, связанных с размерностью получаемых систем алгебраических уравнений, на наш взгляд является недостатком метода сеток по сравнению с методом интегральных уравнений.

**Основная часть.** Сущность предлагаемого метода заключается в следующем. Для расчёта электромагнитного поля в любой точке пространства сначала определяются все источники поля. Заменяя электромагнитное поле в неоднородной среде суммой двух полей в вакууме – первичного, созданного токами индуктора, и вторичного, образованного наведенными поверхностными зарядами на границе раздела сред и вихревыми токами, индуцированными в проводнике, строят итерационный

алгоритм нахождения вторичных источников поля. При этом используется максимум информации о процессе [3, 4].

Проиллюстрируем использование метода вторичных источников на примере расчета синусоидально изменяющихся во времени квазистационарных электромагнитных полей в неоднородных проводящих средах. Необходимость решения такого рода численных задач, возникает при рассмотрении самых различных электротехнических проблем, например при рассмотрении наличия несовершенства тонких ферромагнитных пленок.

Рассчитаем электромагнитное поле, созданное переменными токами заданной плотности  $\dot{\delta}_k$ , рис. 1 протекающими в катушках вихретокового измерительного преобразователя  $V_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), если ферромагнитное пространство в области  $V^+$  заполнено проводящей средой с проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ .

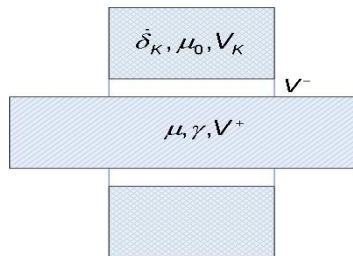


Рис.1. Вихретоковый измерительный преобразователь и объект контроля

Предположим, что окружающая проводник  $V^+$  среда является однородной в магнитном отношении и имеет проницаемость  $\mu_0$ . Сформулируем поставленную задачу расчета поля в виде краевой. Для этого воспользуемся уравнениями Максвелла,

$$\text{rot} \dot{H} = \dot{J}_{\text{полн}}, \quad \text{rot} \dot{E} = \frac{dB}{dt}$$

Уравнения синусоидального изменяющегося во времени электромагнитного поля имеют вид:

$$\text{rot} \dot{H} = \gamma \dot{E} + j\omega \epsilon \dot{E} + \dot{\delta} \quad (1)$$

$$\text{rot} \dot{E} = -j\omega \dot{H} \quad (2)$$

где  $\dot{\delta}$  - известная плотность стороннего тока, локализованного обычно в некоторой ограниченной части пространства (например, в катушках). Соответственно, при постоянстве параметров среды  $\gamma$ ,  $\epsilon$  и  $\mu$

$$\operatorname{div} \dot{\delta} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \dot{H} = 0; \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \dot{E} = 0; \quad (5)$$

Используя (1) и (2), поставленную задачу для расчета поля можно сформулировать в виде следующей краевой: найти в области  $V^-$  векторы  $\dot{H}^-$  и  $\dot{E}^-$ , а в области  $V^+$  векторы  $\dot{H}^+$ , удовлетворяющие уравнениям:

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \begin{cases} j\omega \varepsilon_0 \dot{E}^- + \dot{\delta}_k \\ j\omega \varepsilon_0 \dot{E}^+ \end{cases} \quad (6)$$

$$\operatorname{rot} \dot{E}^- = j\omega \mu_0 \dot{H}^-; \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \dot{H}^+ = j\omega \varepsilon_0 \dot{E}^- + \gamma \dot{E}^+; \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \dot{E}^+ = -j\omega \mu \dot{H}^+; \quad (9)$$

и краевым условиям на поверхности  $S$  проводника,

$$\left[ \dot{n}, \dot{E}^+ - \dot{E}^- \right] = 0 \quad (10)$$

$$\left[ \dot{n}, \dot{H}^+ - \dot{H}^- \right] = 0 \quad (11)$$

Для упрощения допустим, что сформулированная краевая задача имеет единственное решение, как показано и доказано в работах [5, 6]. Очевидно, что из условий (10), (11) и выражений (6) - (9) следуют краевые условия для нормальных составляющих векторов  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$  на поверхности  $S$ :

$$\left( \dot{n}, \dot{H}^+ - \mu_0 \dot{H}^- \right) = 0; \quad (12)$$

$$\left( \dot{n}, \varepsilon_0 \dot{E}^+ - \frac{\gamma}{j\omega} \dot{E}^- - \varepsilon_0 \dot{E} \right) = 0 \quad (13)$$

Для случая тонких неферромагнитных пленок растекание вихревого тока в пленке можно считать поверхностным и описывать его при помощи функции тока. В работах [7, 8, 9] показано как функция тока применялась для расчета распределения вихревых токов в тонких пленках и оболочках.

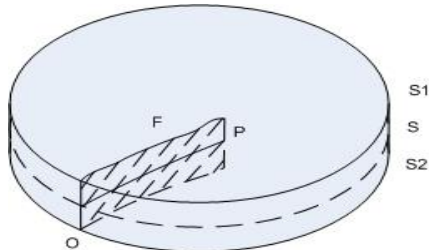


Рис.2. Тонкая проводящая пленка

Однако, магнитным полем вихревых токов пренебрегали по сравнению с внешним магнитным полем, что на наш взгляд, не всегда допустимо.

Под тонкой проводящей пленкой  $V$  (рис 2), будем понимать проводник, ограниченный двумя параллельными поверхностями  $S_1$  и  $S_2$ , расстояние между которыми (толщина оболочки) много меньше размеров  $S_1$  и  $S_2$ . Поверхность  $S$ , одинаково отстоящую от  $S_1$  и  $S_2$  будем называть средней поверхностью, а ограничивающий ее контур будем обозначать через  $L$ . Пусть  $P$  произвольная точка на  $S$ . Соединим ее каким-либо контуром  $C$  с любой точкой  $O$  границы  $L$ . Через  $F$  обозначим поверхность, заключенную между  $S_1$  и  $S_2$  и образованную движением нормали к  $S$  вдоль  $C$ . Значение функции тока  $\dot{\Psi}^B$  в точке  $P$  определяется как:

$$\dot{\Psi}^B(P) = \int_F \bar{\delta}(Q) d\bar{S}_Q \quad (14)$$

Из принципа непрерывности электрического тока следует, что значение функции тока не зависит от выбора контура  $C$ , соединяющего  $P$  с  $L$ , а определяется только положением точки  $P$ .

Реальную оболочку заменим бесконечно тонкой оболочкой, совпадающей с  $S$  и обладающей поверхностной удельной проводимостью  $\sigma = \gamma h$ . Действительное токораспределение в оболочке заменим поверхностным по  $S$  токораспределением, определив его при помощи соотношения:

$$\bar{j}^B = [\text{grad}_S \dot{\Psi}^B, \bar{n}], \quad (15)$$

где  $\bar{j}^B$  - линейная плотность тока;  $\bar{n}$  - единичный вектор нормали; градиент берется по поверхности  $S$ . Найдем выражения для векторного потенциала  $\vec{A}^B$  поля, созданного вихревыми токами в оболочке  $S$ . Для разности скалярного магнитного потенциала  $\phi_m$  между точками  $P'$  и  $P''$ , бесконечно близко прилегающими с разных сторон к  $S$ . Согласно закону полного тока получаем:

$$\phi_m(P') - \phi_m(P'') = \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \dot{\Psi}^B(P). \quad (16)$$

Поэтому поверхностное распределение токов по  $S$  эквивалентно по создаваемому им магнитному полю двойному слою магнитных зарядов, распределенных по  $S$  с плотностью:

$$\tau(P) = \dot{\Psi}^B(P). \quad (17)$$

Отсюда, используя формулу, выражающую векторный потенциал через плотность двойного слоя, находим

$$\vec{A}^B(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \dot{\Psi}^B(P) \frac{\bar{r}_{QP} \cdot \bar{n}_P}{r_{QP}^3} dS_P. \quad (18)$$

Соотношение (18) является основным для последующего вывода системы интегральных уравнений. Наиболее простой вид эта система имеет в случае, когда вихревые токи наводятся в проводящей тонкой пленке, а внешнее магнитное поле создается заданным распределением токов, вектор плотности которых параллелен плоскости пленки [9]. Расположим декартову систему координат так, что бы ось Z была перпендикулярна к плоскости пластины. Тогда для векторного потенциала поля от вихревых токов и векторного потенциала внешнего поля получаем:

$$\vec{A}^B(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \Psi^B(P) \frac{\vec{r}_{QP, \vec{k}}}{r_{QP}^3} dS_P; \quad (19)$$

$$\vec{A}^\delta(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{i\vec{\delta}_x(P) + j\vec{\delta}_y(P) \vec{r}_{QP, \vec{k}}}{r_{QP}} du_P, \quad (20)$$

Придадим формуле (20) вид, аналогичный (19). С этой целью в каждом сечении  $z = \text{const}$  области  $V = V^+ + V^-$  введём функцию тока  $\psi^\delta(x, y, z)$  при помощи соотношений:

$$\delta_x(x, y, z) = \frac{\partial \psi^\delta(x, y, z)}{\partial y}; \quad \delta_y(x, y, z) = \frac{\partial \psi^\delta(x, y, z)}{\partial x}, \quad (21)$$

Предположив при этом, что в области  $V^- \psi^\delta(x, y, z) = \dot{I}(z)$ , где  $\dot{I}(z)$  – значение функции тока на внутренней боковой поверхности области  $V^+$ .

Далее проинтегрировав по частям, находим:

$$\begin{aligned} A_x^\delta(Q) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V^+} \frac{\delta_x(P)}{r_{QP}} d\vartheta_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\frac{\partial \psi^\delta(P)}{\partial y}}{r_{QP}} d\vartheta_P \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^h dz_P \int_c^d dx_P \int_{y^-(xp)}^{y^+(xp)} \frac{\frac{\partial \psi^\delta(x_P, y_P, z_P)}{\partial y_P} dy_P}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}}; \\ &\quad \int_{y^-(xp)}^{y^+(xp)} \frac{\frac{\partial \psi^\delta(x_P, y_P, z_P)}{\partial y_P} dy_P}{\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}} \\ &= \frac{\psi^\delta(x_P, y_P, z_P)}{r_{QP}} \frac{y^+(xp)}{y^-(xp)} \\ &\quad + \int_{y^-(xp)}^{y^+(xp)} \psi^\delta(x_P, y_P, z_P) \times \frac{y_Q - y_P}{r_{QP}^3} dy_P \\ &= \int_{y^-(xp)}^{y^+(xp)} \psi^\delta(p) \frac{y_Q - y_P}{r_{QP}^3} dy_P \end{aligned} \quad (22)$$

$$A_x^\delta(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \psi^\delta(P) \frac{y_Q - y_P}{r_{QP}^3} d\vartheta_P.$$

При выводе соотношения (22) учтено, что  $\psi^\delta(x_P, y_P, z_P)$  на внешней боковой поверхности  $V^+$  равно нулю. Из выражения (22) следует

$$\bar{A}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \psi^\delta(P) \frac{|\overline{r_{QP}}, \bar{k}|}{r_{QP}^3} d\vartheta_P. \quad (23)$$

Для линейной плотности  $\bar{J}^B$  вихревых потоков в пластине находим

$$\bar{J}^B = \gamma h \bar{E} = -j\omega\gamma h(\bar{A}^B + \bar{A}^\delta) - \gamma h \text{grad}\varphi_e, \quad (24)$$

где скалярный электрический потенциал  $\varphi_e$  удовлетворяет на поверхности  $S$  по переменным  $x$  и  $y$  уравнению Лапласа и выбирается в последующем таким образом, чтобы на краю пластины  $L$  выполнялось следующее граничное условие:

$$\bar{J}^B(Q), \bar{v}_Q = 0, \quad (25)$$

где  $\bar{v}_Q$  – единичный вектор нормали к  $L$ .

Выберем на  $S$  какой-либо контур  $C_{OQ}$ , соединяющий произвольно точки  $O$  и  $Q$ . Из определения функции тока имеем:

$$\psi^B(Q) - \psi^B(O) = \int_{C_{OQ}} (\bar{k}, [\bar{J}^B(M), \bar{d}l_M]). \quad (26)$$

Отсюда, учитывая выражения (19), (23) и (24), находим

$$\begin{aligned} \psi^B(Q) - \psi^B(O) + \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi} \left\{ \int_S \psi^B(P) \left( \int_{C_{OQ}} \frac{(\bar{k}, [\overline{r_{PM}}, \bar{k}], \bar{d}l_M])}{r_{PM}^3} \right) dS_P \right. \\ \left. + \int_V \psi^\delta(P) \left( \int_{C_{OQ}} \frac{(\bar{k}, [\overline{r_{PM}}, \bar{k}], \bar{d}l_M])}{r_{PM}^3} \right) d\vartheta_P \right\} \\ + \gamma h \int_{C_{OQ}} (\bar{k}, [\text{grad}\varphi_e, \bar{d}l_M]) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Для двойного векторного произведения получаем  $[\overline{r_{PM}}, \bar{k}], \bar{d}l_M] = \overline{r_{PM}}(\bar{k}, \bar{d}l_M) - \bar{k}(\overline{r_{PM}}, \bar{d}l_M) = -\bar{k}(\overline{r_{PM}}, \bar{d}l_M)$ , откуда  $(\bar{k}, [\overline{r_{PM}}, \bar{k}], \bar{d}l_M]) = -(\overline{r_{PM}}, \bar{d}l_M)$ .

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \int_{C_{OQ}} \frac{(\bar{k}, [\bar{r}_{PM}, \bar{k}], \bar{d}l_M)}{r_{PM}^3} = \\ \int_{C_{OQ}} \frac{-(\bar{r}_{PM}, \bar{d}l_M)}{r_{PM}^3} = \int_{C_{OQ}} \text{grad}_M \left( \frac{1}{r_{PM}} \right) \bar{d}l_M = \frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{r_{OP}}. \end{aligned}$$

Учитывая это, из выражения (27) находим

$$\begin{aligned} \psi^B(Q) - \psi^B(O) + \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi} \left\{ \int_S \psi^B(P) \left( \frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{r_{OP}} \right) dS_P \right. \\ \left. + \int_V \psi^\delta(P) \left( \frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{r_{OP}} \right) d\vartheta_P \right\} \\ + \gamma h \int_{C_{OQ}} (\bar{k}, [\text{grad}\varphi_e, \bar{d}l_M]) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

Скалярный потенциал  $\varphi_e$  в области  $S$  является решением внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа с краевым условием

$$\frac{\partial\varphi_e}{\partial\nu}(Q) = -j\omega A_V^B(Q) - j\omega A_V^\delta(Q); \quad (29)$$

определенным из соотношений (25) и (24).

Для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы

$$\oint_L A_V^B(Q) dl_Q + \oint_L A_V^\delta(Q) dl_Q = 0. \quad (30)$$

Из соотношений (19) и (23) следует, что условие будет выполнено, если,  $\oint_L \frac{(\bar{v}_Q, [\bar{r}_{QP}, \bar{k}])}{r_{QM}^3} dl_Q = 0$ . Справедливость этого соотношения проверяется просто:  $\oint_L \frac{(\bar{v}_Q, [\bar{r}_{QP}, \bar{k}])}{r_{QM}^3} dl_Q = \oint_L \text{grad}_Q \left( \frac{1}{r_{QP}} \right) \bar{d}l_Q = 0$

Определив потенциал в виде  $\varphi_e(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \ln \left( \frac{1}{r_{QP}} \right) dl_P$ , применив выражение (29) имеем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma(Q) \frac{1}{\pi} \int_L \sigma(Q) \frac{\cos(\bar{r}_{QP}, \bar{v}_Q)}{r_{QP}} dl_P + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_S \psi^B(P) \frac{\sin(\bar{r}_{QP}, \bar{v}_Q)}{r_{QP}^2} dS_P \\ = - \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \int_V \psi^\delta(M) \frac{\sin(\bar{r}_{QP}, \bar{v}_Q)}{r_{QP}^2} dV_P, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $P'$  – проекция  $P$  на плоскость пластины.

Таким образом, интегральное уравнение (31) решено, однако решений может быть больше одного [10]. Для того, чтобы это уравнение стало однозначно разрешимым, преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned}
& \sigma(Q) - \frac{1}{\pi} \oint_L \sigma(P) \left[ \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}} - \frac{\pi}{L} \right] dl_P + \\
j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \int_S \int_S \Psi^B(M) \frac{\sin(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}^2} dS_P = & - \frac{j\omega \mu_0}{2\pi} \int_V \Psi^\delta(M) \frac{\sin(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}^2} dv_P.
\end{aligned} \quad (32)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
\int_{C_{OQ}} (\vec{k}, [\text{grad}_{\varphi_e}, d\vec{l}_M]) = \frac{1}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \left( \int_{C_{OQ}} \text{grad}_n \left( \ln \frac{1}{r_{PM}} \right) dl_M \right) dl_P = \\
\frac{1}{2\pi} \oint_L \sigma(P) [\theta(Q, P) - \theta(O, P)] dl_P,
\end{aligned} \quad (33)$$

где  $\text{grad}_n$  - нормальная к контуру  $C_{OQ}$  составляющая градиента;  $\theta(Q, P)$  – угол между некоторой осью  $x$  и  $\vec{r}_{QP}$ . Учитывая равенство (33), из выражения (28) находим

$$\begin{aligned}
\Psi^B(Q) + \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_S \frac{\Psi^B(P)}{r_{QP}} dS_P + \frac{\gamma h}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \theta(Q, P) dl_P + \\
\frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_V \frac{\Psi^\delta(P)}{r_{QP}} dv_P = \\
\Psi^B(O) + \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_S \frac{\Psi^B(P)}{r_{OP}} dS_P + \frac{\gamma h}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \theta(O, P) dl_P + \\
\frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_V \frac{\Psi^\delta(P)}{r_{OP}} dv_P.
\end{aligned} \quad (34)$$

Левая часть уравнения зависит только от  $Q$ , а правая – от  $\theta$ , поэтому каждая из них порознь равна одной и той же константе, т.е.

$$\begin{aligned}
\Psi^B(Q) + \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_S \frac{\Psi^B(P)}{r_{QP}} dS_P + \frac{\gamma h}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \theta(Q, P) dl_P \\
+ \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_V \frac{\Psi^\delta(P)}{r_{QP}} dv_P = C
\end{aligned} \quad (35)$$

Дифференцируя уравнение (35) по касательному к контуру  $L$  направлению  $l_Q$  и учитывая, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta(Q, P)}{\partial l_Q} = \frac{\partial \ln \frac{1}{r_{QP}}}{\partial \nu_Q}, \text{ находим } \frac{\partial \Psi^B(Q)}{\partial l_Q} + \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_S \Psi^B(P) \frac{\sin(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}^2} dS_P \\
+ \frac{\gamma h}{2} \sigma(Q) - \frac{\gamma h}{2\pi} \oint_L \sigma(Q) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}} dl_P + \frac{j\omega \mu_0 \gamma h}{4\pi} \int_V \Psi^\delta(P) \frac{\sin(\vec{r}_{QP}, \vec{\nu}_Q)}{r_{QP}^2} dv_P = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда и из выражения (31) получаем  $\frac{\partial \Psi^B(Q)}{\partial l_Q} \equiv 0$ . Таким образом, из уравнений (35) и (31) следует, что

$$\Psi^B(Q) \equiv \text{const при } Q \in L. \quad (36)$$

Для того, чтобы  $\Psi^B(Q) \equiv 0$  при  $Q \in L$ , константу  $C$  в выражении (35) нужно выбрать таким образом, чтобы

$$\oint_L \Psi^B(Q) dl_Q = 0. \quad (37)$$



Тогда из соотношений (36) и (37) получаем

$$\psi^B(Q) \equiv 0 \text{ при } Q \in L. \quad (38)$$

Интегрируя выражение (35) по L и учитывая условие (37), находим

$$C = \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi L} \int_S \psi^B(P) \left[ \oint_L \frac{dl_Q}{r_{QP}} \right] dS_P + \frac{\gamma h}{2\pi L} \oint_L \sigma(P) \left[ \oint_L \Theta(Q, P) dl_Q \right] dl_P + \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi L} \int_V \psi^\delta(P) \left[ \oint_L \frac{dl_Q}{r_{QP}} \right] dv_P.$$

Подставляя последнее в выражение (35), находим распределение

$$\psi^B(Q) + \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi} \int_S \psi^B(P) \left[ \frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{L} \oint_L \frac{dl_M}{r_{PM}} \right] dS_P + \frac{\gamma h}{2\pi} \oint_L \sigma(P) \left[ \Theta(Q, P) - \frac{1}{L} \oint_L \Theta(M, P) dl_M \right] dl_P = - \frac{j\omega\mu_0\gamma h}{4\pi} \int_V \psi^\delta(P) \left[ \frac{1}{r_{QP}} - \frac{1}{L} \oint_L \frac{dl_M}{r_{PM}} \right] dv_P. \quad (39)$$

**Вывод.** Применение одного из наиболее эффективных и универсальных методов расчета - метода интегральных уравнений, позволяют производить численный расчет синусоидально изменяющегося во времени квазистационарного электромагнитного поля вихревых токов в тонкой пленке. Полученные зависимости для поверхностной удельной электрической проводимости (32) и функции тока (39) образуют полную систему интегральных уравнений. Решение системы уравнений, позволяет найти распределение  $\psi^B(Q)$  и  $\vec{\delta}(Q)$ , по которым определяют линейную плотность вихревого тока  $\vec{J}^B(Q)$ .

**Список литературы:** 1. Неразрушающий контроль. Справочник в 7 т.: Т.2 / под общ. ред. В.В.Клюева. М.: Машиностроение, 2003. – 688 с.: ил. 2. Светличный В.А., Тулунов В.В. Неразрушающий контроль пленок и покрытий // Системи озброєння і військова техніка – Харків ХУПС ім. І.Кожедуба - 2010 - №3(23) с.160-162. 3. Цейтлин Л.А. Вихревые токи в тонких пластинах и оболочках. – «Журнал технической физики». Т.ХХХІХ. 1969 №10. 4. Цейтлин Л.А. Потери на вихревые токи в тонких пластинах. – «Электричество», 1969, №9. 5. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 296 с. 6. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. К.: Техніка, 1974. 352 с. 7. Данилушкин А.И., Данилушкин И.А. Метод вторичных источников для моделирования электромагнитных процессов при индукционном нагреве // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 1998. № 6. С. 141-142. 8. Ковбасенко Ю.П. Метод расчета трехмерного электромагнитного поля тонких пластин и оболочек // Электричество. 1992. № 14. С. 45-47. 9. Некрасов Н.Н., Смирнов С.А. К расчету вихревых токов в тонкой пластине // Электричество. 1998. № 10. С. 61-65. 10. Гримальский О.В. Метод расчета трехмерного электромагнитного поля тонких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1990. № 6. С. 61-68.

Надійшла до редакції 15.04.12