

УДК 621.372.852

*Ю. В. ШПАГИН, Л. Г. МАРТЫНЕНКО*, канд. техн. наук,  
*А. Г. НЕРУХ*, канд. физ.-мат. наук

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ НА МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ЭЛЛИПСОИДЕ  
В СЛУЧАЕ МНОГОМОДОВОГО РЕЖИМА ВОЛНОВОДА**

---

При использовании металлических дисков в качестве элементов волноводных СВЧ-устройств возможны ситуации, требующие учета многомодового режима работы волновода. Например, при передаче электромагнитной энергии больших уровней необходим учет вклада высших типов колебаний в нагрев металлического диска. Для случая одномодового режима работы исследование нагрева диска проведено в работе [1].

Для описания любого явления, связанного с работой металлического диска в поле волновода, необходимо знание распределения электромагнитного поля в ближней зоне диска. В работе расчет такого распределения производится для случая многомодового

режима работы волновода. Как и в работе [1], диск аппроксимируется сплюснутым эллипсоидом вращения с полуосями  $R > d$ , причем размеры диска намного меньше длины волны  $\lambda \left( \frac{R}{\lambda} \ll 1 \right)$ . Конечная цель расчета — определение поля на поверхности металлического эллипсоида, что может быть найдено как предельное значение поля в ближней зоне рассматриваемого объекта.

Нахождение поля в ближней зоне тела произведем методом интегральных уравнений макроскопической электродинамики [2], согласно которому поле вне немагнитного тела объемом  $V$  при падении на него волны  $\vec{E}_0$  определяется интегралом

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{ick} (\text{grad div} + k^2) \int_V \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}') dV, \quad (1)$$

где  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $\omega$  — частота падающей волны;  $\vec{j}$  — общий ток, объединяющий ток смещения и ток проводимости

$$\vec{j} = \left( \frac{i\omega(\epsilon - 1)}{4\pi} + \sigma \right) \vec{E},$$

$\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость;  $\sigma$  — проводимость среды внутри объема  $V$ . Внося дивергенцию под интеграл в (1), приводим его к виду

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) - \text{grad } \Phi - \frac{i\omega}{c} \vec{A}, \quad (2)$$

в котором скалярный и векторный потенциалы определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \left( 1 - \frac{i}{k|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|} dV; \\ \vec{A} &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|} dV. \end{aligned} \quad (3)$$

Совершая предельный переход к электростатике, из выражения для  $\Phi$  определяем, что при  $k \rightarrow 0$  ток  $\vec{j} \sim k$ . Такое поведение наведенного тока существенно при разложении выражения для поля (2) в ряд Рэлея по степеням  $k$ , что целесообразно сделать в случае малых размеров тела по сравнению с длиной падающей волны  $\lambda$  ( $kR \ll \ll 1$ ). Оставляя в (2) только члены нулевого по  $k$  порядка, найдем, что в приближении квазистатики поле в ближней зоне тела  $V$  определяется выражением  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) - \text{grad } \Phi_0$  (4), где  $\Phi_0$  — электростатический потенциал тела. Хотя  $\vec{E}_0(\vec{r})$  и является функцией координат, в приближении квазистатики эта функциональная зависимость при нахождении электрического поля не учитывается. Она должна учитываться при вычислении магнитного поля, которое выражается через электрическое с помощью уравнения Максвелла

$\vec{H} = \frac{i}{k} \text{rot} \vec{E}$  (5). Согласно сказанному получим более удобные формулы, выражающие поля через векторную амплитуду падающей волны  $\vec{E}_0$ :  $\vec{E}_0(\vec{r}) = \widehat{W}(\vec{r})\vec{E}_0$  (6). Здесь  $\widehat{W}(\vec{r})$  — диагональный тензор, определяющий зависимость падающего поля от пространственных координат и представляющий собой медленно меняющуюся функцию на расстояниях, сравнимых с размерами тела  $V$ .

Скалярный потенциал этого тела можно представить как  $\Phi_0(\vec{r}) = \vec{I}\vec{E}_0(\vec{r})$  (7), где вектор  $\vec{I}$  — электростатическая характеристика данного тела. Подставив (6) в (7), найдем  $\Phi_0(\vec{r}) = \vec{I}(\widehat{W}\vec{E}_0) = \vec{W}(\vec{r})(\vec{I}\vec{E}_0)$  (8). В этом выражении  $\vec{W}$  — вектор с компонентами тензора  $\widehat{W}$ ;  $\vec{I}$  — диагональный тензор с компонентами вектора  $\vec{I}$ .

Для вычисления градиента потенциала  $\Phi_0$  функцию  $\vec{W}(\vec{r})$  в (8) следует считать постоянной, так как в рассматриваемом приближении она медленно меняется по сравнению со вторым множителем.

Тогда получим  $\text{grad} \Phi_0 = (\vec{W}\nabla)(\vec{I}\vec{E}_0) \times \vec{W} \times \text{rot}(\vec{I}\vec{E}_0)$  (9). При нахождении же магнитного поля необходимо учитывать функциональную зависимость обоих множителей, в результате чего имеем

$$\vec{H} = \frac{i}{k} \text{rot}(\widehat{W}\vec{E}_0) - \frac{i}{k} \text{rot}[(\vec{W}\nabla)(\vec{I}\vec{E}_0) + \vec{W} \times \text{rot}(\vec{I}\vec{E}_0)]. \quad (10)$$

Здесь внешний ротор применяется только к функции  $\vec{W}$ .

Если компоненты тензора  $\widehat{W}$  одинаковы,  $\widehat{W} = W\hat{E}$ , где  $\hat{E}$  — единичный тензор,

$$(\widehat{W}\nabla)(\vec{I}\vec{E}_0) = W\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(\vec{I}\vec{E}_0).$$

Тогда формулу для вычисления магнитного поля в ближней зоне малого проводящего тела представим в виде

$$\vec{H} = \frac{i}{k} \text{grad} W \times \left\{ \vec{E}_0 - \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) (\vec{I}\vec{E}_0) \right\} - \frac{i}{k} \text{rot}(\vec{W} \times \text{rot}(\vec{I}\vec{E}_0)). \quad (11)$$

Для дальнейших расчетов конкретизируем постановку задачи. Рассмотрим металлический эллипсоид, расположенный в центре поперечного сечения прямоугольного волновода с размерами  $a, b$ . Введем две системы координат, связанные с волноводом и с эллипсоидом, ориентированным так, что его ось симметрии  $z$  образует с осью, перпендикулярной к широкой стенке волновода, угол  $\Theta$ , а ось  $y$  перпендикулярна к узкой стенке волновода (рисунок).

Исследуем вначале многомодовый режим работы, когда в ненагруженном волноводе распространяется произвольный набор волн

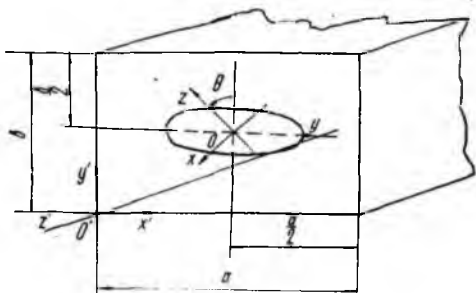
типа  $H_{mn}$ . В этом случае невозмущенное электрическое поле запишем в следующем виде [3]:

$$\vec{E}_0(\vec{r}') = E_0^{mn} \left( \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x' \sin \frac{n\pi}{b} y' \vec{e}_x - \frac{m}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x' \cos \frac{n\pi}{b} y' \vec{e}_y \right) e^{-ihz'}, \quad (12)$$

$$h = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad E_0^{mn} = \frac{ik}{\pi} \frac{a^2 b^2}{(mb)^2 + (na)^2} H_0^{mn}.$$

Переход в этой формуле к системе координат эллипсоида позволяет найти выражения для тензора  $\widehat{W}$  и векторной амплитуды  $\vec{E}_0$ :

$$\begin{aligned} W_{11} = W_{33} &= -e^{-ihz'} \frac{m}{a} \sin \frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) \cos \frac{n\pi}{b} \left(y' + \frac{b}{2}\right); \\ W_{22} &= e^{-ihz'} \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y' + \frac{b}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$



Здесь

$$\begin{aligned} y' &= -x \sin \theta + z \cos \theta, \quad z' = x \cos \theta + z \sin \theta; \\ \vec{E}_0^{mn} &= E_0^{mn} (-\sin \theta \vec{e}_x + \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z). \end{aligned} \quad (14)$$

При вычислении  $\text{grad } \Phi_0$  необходимо учесть медленность функции  $\widehat{W}$ , взяв ее значение в центре эллипсоида. Полагая в (13)  $x = y = z = 0$ , получаем: для мод  $m = 2p + 1, n = 2q$

$$\vec{W}_{2p+1, 2q} = -\frac{2p+1}{a} (-1)^{p+q} (\vec{e}_x + \vec{e}_z); \quad (15)$$

для мод  $m = 2p, n = 2q + 1$

$$\vec{W}_{2p, 2q+1} = \frac{2q+1}{b} (-1)^{p+q} \vec{e}_y. \quad (16)$$

Для остальных типов мод значение  $\widehat{W}$  в центре эллипсоида равно нулю.

При нахождении вектора  $\vec{T}$  учтем, что в рассматриваемом приближении квазистатики падающее поле  $\vec{E}_0$  однородно в окрестности

данного тела и, следовательно, можно воспользоваться известным выражением для потенциала идеально проводящего эллипсоида вращения в однородном поле [4]. Если это поле имеет составляющие  $\vec{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, E_{0z})$ , то потенциал

$$\Phi_0 = R^2 d \left\{ \frac{I_x}{I_1} (xE_{0x} + yE_{0y}) + \frac{I_z}{I_2} zE_{0z} \right\}, \quad (17)$$

$$\text{где } I_x = \frac{1}{(R^2 - d^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R^2 - d^2}{\xi + d^2}} - \frac{\sqrt{\xi + d^2} \sqrt{R^2 - d^2}}{R^2 + \xi} \right);$$

$$I_z = \frac{2}{(R^2 - d^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \sqrt{\frac{R^2 - d^2}{\xi + d^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R^2 - d^2}{\xi + d^2}} \right); \quad (18)$$

$$I_1 = R^2 d I_x (\xi = 0); \quad I_2 = R^2 d I_z (\xi = 0).$$

Здесь  $\xi$  — эллиптическая координата, определяемая в системе координат эллипсоида соотношением

$$\frac{x^2 + y^2}{R^2 + \xi} + \frac{z^2}{d^2 + \xi} = 1$$

и равная нулю на его поверхности.

Из (17) получаем выражение

$$\vec{T} = R^2 d \left( \frac{I_x}{I_1} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) + \frac{I_z}{I_2} z\vec{e}_z \right). \quad (19)$$

Перейдем к вычислению полей на поверхности эллипсоида. Рассмотрим моды с индексами  $(2p + 1, 2q)$ . Подставив значение  $\vec{W}$  из (15) и  $\vec{T}$  из (19) в формулу (9), запишем

$$\operatorname{grad} \Phi_0 = -\frac{2p+1}{a} (-1)^{p+q} \operatorname{grad} (I_x E_{0x}^{mn} + I_z E_{0z}^{mn}). \quad (20)$$

Поскольку поле определяется на поверхности эллипсоида, то удобно ввести угловые координаты поверхности эллипсоида  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\nu \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  согласно формулам  $x = R \sin \nu \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \nu \sin \varphi$ ,  $z = d \cos \nu$ . Тогда вычисление градиента в (20) дает

$$\operatorname{grad} \Phi_0 = \frac{2p+1}{a} (-1)^{p+q} E_0^{mn} \{ \psi (\alpha \sin \nu \vec{e}_\rho + \cos \nu \vec{e}_z) + (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) \}. \quad (21)$$

Здесь  $\alpha = \frac{d}{R}$ ;  $\vec{e}_\rho$  — радиальный орт цилиндрической системы координат, связанной с эллипсоидом,

$$\psi = \frac{-a_1 \sin \theta \sin \nu \cos \varphi + a_2 \cos \theta \cos \nu}{\alpha^2 \sin^2 \nu + \cos^2 \nu}; \quad (22)$$

$$a_1 = \frac{2(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} - \alpha \sqrt{1-\alpha^2}}; \\ a_2 = \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}}. \quad (23)$$

С помощью этих выражений определим электрическое поле на поверхности эллипсоида. Подставив (21) в (4), найдем

$$\vec{E}^{2p+1, 2q} = -\frac{2p+1}{a} (-1)^{p+q} E_0^{2p+1, 2q} \psi (\alpha \sin \nu \vec{e}_p + \cos \nu \vec{e}_z). \quad (24)$$

Для вычисления магнитного поля преобразуем формулу (10). Так как согласно (9)

$$\vec{E} = \widehat{W} \vec{E}_0 - \sum_{i=1}^3 W_i \operatorname{grad} (I_i E_{0i}), \quad (25)$$

после подстановки (25) в (10) получим явное выражение для магнитного поля вблизи эллипсоида:

$$\vec{H} = \frac{i}{k} \sum_{i=1}^3 [\operatorname{grad} W_i \times (\vec{e}_i E_{0i} - \operatorname{grad} (I_i E_{0i}))]. \quad (26)$$

Вектор в круглых скобках имеет вид

$$\vec{e}_i E_{0i} - \operatorname{grad} (I_i E_{0i}) = \psi_i E_0^{mn} (\alpha \sin \nu \vec{e}_p + \cos \nu \vec{e}_z), \quad (27)$$

$$\text{где } \psi_1 = -\frac{\alpha_1 \sin \nu \cos \varphi \sin \theta}{\alpha^2 \sin^2 \nu + \cos^2 \nu}; \quad \psi_2 = \frac{\alpha_1 \sin \nu \sin \varphi}{\alpha^2 \sin^2 \nu + \cos^2 \nu};$$

$$\psi_3 = \frac{\alpha_2 \cos \nu \cos \theta}{\alpha^2 \sin^2 \nu + \cos^2 \nu}. \quad (27a)$$

Для нахождения величин  $\operatorname{grad} W_i$  в (26) необходимо использовать формулы (13), положив затем в полученных выражениях  $x = y = z = 0$ . После выполнения всех вычислений из (26) определим выражение для магнитного поля на поверхности эллипсоида в случае  $(2p+1, 2q)$  моды:

$$\vec{H}^{2p+1, 2q} = \frac{(2p+1) h}{ak} (-1)^{p+q} E_0^{2p+1, 2q} (\psi_1 + \psi_3) \times \\ \times \{ \alpha \sin \nu \sin \varphi (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) - \\ - (\alpha \sin \nu \cos \varphi \sin \theta - \cos \nu \cos \theta) \vec{e}_y \}. \quad (28)$$

Полагая в этой формуле  $p = q = 0$ , получаем выражение для магнитного поля в одномодовом режиме волны типа  $H_{10}$  [1].

Рассмотрим теперь моды с индексами  $2p, 2q + 1$ . Вектор  $\vec{W}$  в этом случае имеет только один компонент (16). Вычисление полей выполняется аналогично предыдущему случаю:

$$\vec{E}^{2p, 2q+1} = -\frac{2q+1}{b} (-1)^{p+q} E_0^{2p, 2q+1} \psi' (\alpha \sin \nu \vec{e}_p + \cos \nu \vec{e}_z). \quad (29)$$

Здесь 
$$\psi' = -\frac{a_1 \sin \nu \sin \varphi}{\alpha^2 \sin^2 \nu + \cos^2 \nu}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^{2p, 2q+1} &= \frac{(2q+1)h}{bk} E_0^{2p, 2q+1} (-1)^{p+q} \psi_2 \times \\ &\times \{ -\alpha \sin \nu \sin \varphi (\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_z) - \\ &- (\cos \nu \cos \theta - \alpha \sin \nu \cos \varphi \sin \theta) \vec{e}_y \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Если индексы моды колебаний оба четные или нечетные, то электрическое поле в окрестности эллипсоида в рассматриваемом приближении равно нулю, т. е. равны нулю компоненты тензора  $\vec{W}$ . Поскольку производные этих компонентов отличны от нуля, то согласно (26) магнитное поле на поверхности будет отличаться от нуля и определится выражениями: при  $m = 2p, n = 2q$

$$\begin{aligned} \vec{H}^{m, n} &= \frac{i\pi}{k} E_0^{mn} (-1)^{p+q} \left\{ \left[ -\frac{m}{a^2} (\psi_1 + \psi_3) \cos \nu - \right. \right. \\ &- \left. \frac{n^2}{b^2} \psi_2 \alpha \sin \nu \sin \varphi \cos \theta \right] \vec{e}_x + \frac{n^2}{b^2} \psi_2 (\alpha \sin \nu \cos \varphi \cos \theta + \\ &+ \cos \nu \sin \theta) \vec{e}_y + \left[ -\frac{n^2}{b^2} \psi_2 \alpha \sin \nu \sin \varphi \sin \theta + \right. \\ &\left. \left. + \frac{m^2}{a^2} (\psi_1 + \psi_3) \alpha \sin \nu \cos \varphi \right] \vec{e}_z \right\}; \end{aligned} \quad (32)$$

при  $m = 2p + 1, n = 2q + 1$

$$\begin{aligned} \vec{H}^{m, n} &= \frac{i\pi}{k} \frac{mn}{ab} (-1)^{p+q} E_0^{mn} \{ [-\psi_2 \cos \nu - \\ &- (\psi_1 + \psi_3) \alpha \sin \nu \sin \varphi \cos \theta] \vec{e}_x + \\ &+ (\psi_1 + \psi_3) [\alpha \sin \nu \cos \varphi \cos \theta + \cos \nu \sin \theta] \vec{e}_y + \\ &+ [-(\psi_1 + \psi_3) \cos \nu \sin \theta + \psi_2 \alpha \sin \nu \cos \varphi] \vec{e}_z \}. \end{aligned} \quad (33)$$

Исследуем многомодовый режим для волн типа  $E$ . Преобразуя выражение для невозмущенного электрического поля [3] в систему координат эллипсоида, находим

$$\vec{E}_0^{mn} = E_0^{mn} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad (34), \text{ а тензор } \widehat{W} \text{ имеет компоненты}$$

$$\begin{aligned} W &= e^{-ihz'} \left[ \frac{ih\pi n}{b\gamma^2} \sin \frac{m\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \cos \frac{n\pi}{b} \left( y' + \frac{b}{2} \right) \sin \theta + \right. \\ &\left. + \sin \frac{m\pi}{a} \left( y + \frac{a}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{b} \left( y' + \frac{b}{2} \right) \cos \theta \right]; \end{aligned}$$

$$W_{32} = e^{-ihz'} \frac{ihm\pi}{a\chi^2} \cos \frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) \sin \frac{n\pi}{b} \left(y' + \frac{b}{2}\right);$$

$$W_{33} = e^{-ihz'} \sin \frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2}\right) \left[ -\frac{ihn\pi}{b\chi^2} \cos \frac{n\pi}{b} \left(y' + \frac{b}{2}\right) \cos \theta + \right. \\ \left. + \sin \frac{n\pi}{b} \left(y' + \frac{b}{2}\right) \sin \theta \right], \quad (35)$$

$$\text{где } \chi^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Определение полей на поверхности эллипсоида производится так же, как и в случае  $H$ -волн. При  $m = 2p$ ,  $n = 2q$  электрическое поле в рассматриваемом приближении равно нулю. Если индексы имеют разную четность, выражения для электрического поля с точностью до постоянного множителя совпадают с соответствующими выражениями для случая  $H$ -волн. При нечетных индексах

$$\vec{E} = (-1)^{p+q} E_0^{mn} (-\psi \operatorname{ctg} \theta + \psi_3 \operatorname{tg} \theta) (\alpha \sin \nu \vec{e}_p + \cos \nu \vec{e}_z). \quad (36)$$

Магнитное поле можно вычислить по формуле (26), в которой вектор в круглых скобках определяется теперь таким же выражением (27), если в нем произвести замену  $\psi_1$  на  $\frac{-1}{\sin \theta} \psi_1$  и  $\psi_3$  на  $\frac{1}{\cos \theta} \psi_3$ . Координаты вектора изменяются в соответствии с формулами (35).

Полученные выражения, описывающие распределение полей на поверхности металлического эллипсоида, который расположен в центре поперечного сечения прямоугольного волновода и работает в многомодовом режиме, позволяют учесть поправки, вносимые в режим работы высшими типами колебаний.

Список литературы: 1. Шпагич Ю. В., Мартыненко Л. Г., Нерух А. Г. Тепловой режим металлического диска в волноводе // Журн. техн. физики. 1985. Т. 55, № 1. С. 35—38. 2. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. К., 1986. 280 с. 3. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1973. 608 с. 4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1959. 532 с.

Поступила в редколлегию 09.06.87