

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМИ СООРУЖЕНИЯМИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ

БЛИШУН А.П., СИДОРОВ М.В., ЯЛОВЕГА И.Г.

Рассматривается задача расчета фильтрационного течения жидкости под некоторыми гидротехническими сооружениями при наличии шпунтов. На основании методов R-функций и энергетического метода (метода Ритца) строится приближенный метод решения этой задачи. Эффективность разработанного численного метода иллюстрируется вычислительными экспериментами.

Введение

Актуальность исследования. При проектировании различных гидротехнических сооружений возникает необходимость численно моделировать движение жидкости в пористых средах. Для решения этой проблемы используются различные аналитические и численные методы математической физики (метод Фурье, вариационные методы, сеточные методы, метод фиктивных областей), методы теории функций комплексного переменного и т.д. Однако для каждого из этих методов имеются существенные ограничения, связанные с геометрией области, поведением коэф-

фициента фильтрации и прочее [1–4]. В связи с этим разработка новых приближенных методов решения этого класса задач является актуальной.

Цели и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка новых средств математического моделирования и численного анализа фильтрационных течений на основании методов R-функций и Ритца. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- построить структуру решения смешанной краевой задачи теории фильтрации;
- разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты построенной структуры на основании метода Ритца;
- провести вычислительные эксперименты.

Настоящая работа распространяет результаты, полученные в [9], на случай наличия шпунтов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу движения несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной). На рис. 1 приведена условная, но достаточно общая, схема фильтрации. Здесь D – область фильтрации, D_1 – подводная часть плотины (флютбет), $\partial\Omega_4$ – граница водонепроницаемой области, $\partial\Omega_5$ – шпунт.

Стационарная фильтрация несжимаемой жидкости описывается в рамках линейного закона Дарси уравнениями

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u} = -k(\bar{x})\nabla h, \quad \bar{x} \in D, \quad (2)$$

где \bar{u} – скорость фильтрации; $k(x, y)$ – коэффициент фильтрации; $h = y + \frac{p}{\rho g}$ – пьезометрический напор; p – давление; ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести.

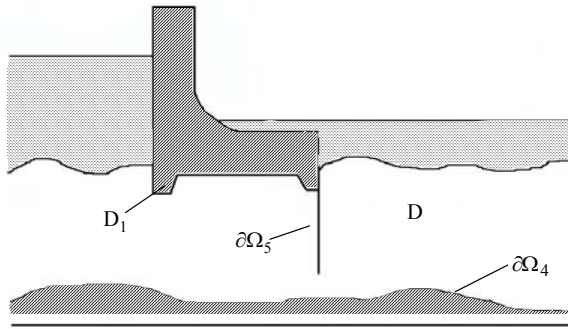


Рис. 1. Общая схема фильтрации

В плоском случае $\bar{x} = (x, y)$ из (1), (2) следует уравнение для напора:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(\bar{x}) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(\bar{x}) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \quad \bar{x} \in D. \quad (3)$$

При численном исследовании задачи удобнее от уравнения (3) для напора $h(\bar{x})$ перейти к уравнению для функции тока $\psi(x, y)$ с помощью соотношений

$$u_x = -k(x, y) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4)$$

$$u_y = -k(x, y) \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Тогда для функции тока получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (6)$$

Дополним уравнение (1) соответствующими граничными условиями. На проницаемых участках границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$, расчётной области D ставятся однородные условия второго рода:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (7)$$

Условие (7), как следует из (4) и (5), соответствует постоянству напора на $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$. Водоупор $\partial\Omega_4$, флюэтбет $\partial\Omega_2$ со шпунтом $\partial\Omega_5$ водонепроницаемы, поэтому нормальная составляющая скорости \bar{u} на этих участках границы равна нулю. Это приводит к тому, что на $\partial\Omega_3$, $\partial\Omega_4$ и $\partial\Omega_5$ функция тока принимает постоянные значения. Для определённости положим, что

$$\psi \Big|_{\partial\Omega_4} = Q, \quad (8)$$

$$\psi \Big|_{\partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_5} = 0. \quad (9)$$

Величина Q задаёт общий расход жидкости.

Основные трудности, возникающие при численном решении задачи (6)–(9), вызваны неоднородностью грунта (коэффициент фильтрации $k(x, y)$ зависит от координат), криволинейностью границ $\partial\Omega_i$, $i = 1, \dots, 4$, наличием шпунта $\partial\Omega_5$, который может быть не единственным.

2. Общие положения теории R-функций

Рассмотрим основные конструктивные средства теории R-функций [6].

Определение. Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, определенная всюду в пространстве R^n , называется R-функцией, если существует такая булева функция $Y = F(X_1, \dots, X_n)$, что выполняется равенство

$$S[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S(x_1), \dots, S(x_n)],$$

где $S(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \geq 0, \\ 0, & \text{если } z < 0. \end{cases}$

Введем в рассмотрение следующие R-функции:

$$\bar{x} = -x, \quad (10)$$

$$x_1 \vee_{\alpha} x_2 = \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}), \quad (11)$$

$$x_1 \wedge_{\alpha} x_2 = \frac{1}{1+\alpha} (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2}), \quad (12)$$

где $-1 < \alpha(x_1, x_2) \leq 1$.

Функциям, заданным отношениями (10)–(12), соответствуют булевы функции – отрицание \bar{X} , дизъюнкция $X_1 \vee X_2$, конъюнкция $X_1 \wedge X_2$. В соответствии с этим функция $x_1 \vee_{\alpha} x_2$ называется R-дизъюнкцией, функция $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$ – R-конъюнкцией, а \bar{x} – R-отрицанием. Известно, что конъюнкция, дизъюнкция и отрицание составляют полную систему функций по отношению к множеству булевых функций. Но тогда система $x_1 \wedge_{\alpha} x_2$, $x_1 \vee_{\alpha} x_2$, \bar{x} является полной по отношению к классу R-функций.

С помощью R-функций можно осуществлять построение уравнений границ сложных областей. Если $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ – m областей, определяемых соответствующими неравенствами

$$f_i(x, y) \geq 0, \quad \dots, \quad f_m(x, y) \geq 0,$$

где $f_i(x, y)$, $i = 1, \dots, m$ – заданные функции, всюду определенные, k раз непрерывно дифференцируемые, то булевой функции $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ соответству-

ет область Ω , граница которой состоит из кусков границ областей $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Значению истинности булевой функции $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ соответствует принадлежность точки $M(x, y)$ области Ω , а значению ложности – ее непринадлежность к этой области. В этом случае говорят, что функция $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$ определяет логику построения области Ω с помощью областей $\Omega_1, \dots, \Omega_m$. Условимся предикат $P_i(x, y)$, принимающий значение истинности, равно единице, в области Ω_i и значение ложности, равно нулю, вне ее области, обозначать так:

$$P_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) > 0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Теорема 1 [6]. Если области Ω_i ($i = 1, \dots, m$) определяются соответственно неравенствами $f_i(x, y) \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), а логика построения области Ω задана булевой функцией $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$, то неравенство

$$\psi(x, y) \equiv \varphi[f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)] \geq 0,$$

где $\varphi(u_1, \dots, u_m)$ – R-функция, соответствующая булевой функции $F(\Omega_1, \dots, \Omega_m)$, определяет область Ω .

Теорема 2 [6]. Пусть область Ω определяется с помощью предиката

$$P(x, y) = F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)],$$

где $P_i(x, y) \equiv (f_i(x, y) > 0)$, $f_i(x, y)$ ($i = 1, \dots, m$) – определенные и непрерывные всюду функции, $F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)]$ – произвольная булева функция, записанная с помощью конъюнкций, дизъюнкций и отрицаний. Тогда, если в формуле $F[P_1(x, y), \dots, P_m(x, y)]$ произвести формальную замену P_i на f_i ($i = 1, \dots, m$), знаков конъюнкции, дизъюнкции и отрицания знаками R-конъюнкции, R-дизъюнкции и R-отрицания соответственно, то полученная функция (обозначим ее $\omega(x, y)$) будет всегда определена и непрерывна, положительна внутри области Ω и отрицательна вне этой области, а на границе области эта функция равна нулю.

Возможность построения функции $\omega(x, y)$, положительной внутри области и равной нулю на ее границе, может использоваться для построения координатных последовательностей при реализации вариационных и проекционных методов.

При построении координатных последовательностей также может понадобиться, чтобы кроме названных свойств функция $\omega(x, y)$ удовлетворяла следующему свойству:

$$\left. \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega} = 1,$$

где $\partial \Omega$ – граница области Ω ; \mathbf{n} – внутренняя нормаль (это условие нормализованности до первого порядка).

Построение функции $\omega(x, y)$ может быть осуществлено следующим образом. Вначале с помощью R-функций строится функция $\omega_1(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega_1(x, y)|_{\partial \Omega} = 0,$$

$$\omega_1(x, y) > 0 \text{ в области } \Omega.$$

После этого функцию $\omega(x, y)$ можно взять в виде

$$\omega(x, y) = \frac{\omega_1(x, y)}{\sqrt{\omega_1^2(x, y) + |\nabla \omega_1(x, y)|^2}}.$$

Для построения уравнения шпунта в дальнейшем нам понадобится следующий подход к построению уравнения разомкнутой линии.

Теорема 3 [6]. Если $\omega(x, y) = 0$ есть нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial \Omega$ области Ω , $\sigma(x, y) \geq 0$ есть некоторая область Σ , то уравнение

$$\omega_1(x, y) \equiv \sqrt{\omega^2(x, y) \vee_{\alpha} \overline{\sigma(x, y)}} = 0,$$

$-1 < \alpha < 1$, $\alpha = \text{const}$, является нормализованным (до первого порядка) уравнением элемента $\partial \Omega_1 = \partial \Omega \cap \Sigma$ границы $\partial \Omega$, выделяемого областью Σ .

Рассмотрим теперь метод R-функций применительно к решению краевых задач.

Пусть Ω – конечная или бесконечная область n -мерного евклидова пространства R^n и пусть $\partial \Omega$ – граница области Ω . Пусть A – некоторый дифференциальный оператор. Ставится задача отыскания функции $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n$, удовлетворяющей в каждой точке области Ω уравнению

$$Au(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

и одному или нескольким условиям на границе

$$B_i u(\mathbf{x})|_{\partial \Omega_i} = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (14)$$

где $\partial \Omega_i$ – части границы Ω ; B_i – дифференциальные операторы; $f(\mathbf{x})$ и $\varphi_i(\mathbf{x})$ – функции, заданные соответственно в Ω и на $\partial \Omega_i$. Если заданы область Ω , операторы A и B_i , то этим задается целый класс задач, для каждой из которых данными являются функции $f(\mathbf{x})$ и $\varphi_i(\mathbf{x})$. По этим данным требуется определить функцию $u(\mathbf{x})$.

Введем в рассмотрение формулу

$$u = V(\Phi_1, \dots, \Phi_m) + \Phi_0, \quad (15)$$

где V – m -местный оператор; Φ_0 – некоторая известная функция. Если при любом выборе достаточное число раз дифференцируемых и ограниченных в области Ω функций Φ_1, \dots, Φ_m формула (15) точно

удовлетворяет краевым условиям (14), то, следуя В.Л. Рвачеву, будем говорить, что формулой (15) определяется *структура решения краевой задачи* (13), (14). Структура, которая учитывает все краевые условия, называется общей.

Если существует возможность такого выбора неопределенных функций Φ_1, \dots, Φ_m , что формула (15) определяет точное решение краевой задачи, то структуру (15) будем называть *полной структурой*.

Вид структуры (15) определяется видом оператора V и функции Φ_0 . Очевидно, что этот вид зависит не только от вида дифференциальных операторов V_i и заданных функций $\varphi_i(x)$, но также от формы области и формы участков границы, на которых задано то или иное из краевых условий. Вся эта информация должна быть учтена при построении структуры.

Методы поиска приближений неопределенных функций могут быть самыми различными. При этом если структура содержит более одной неопределенной функции, может оказаться, что существует неодинаковая возможность их выбора. Выбор метода в этом случае будет существенно влиять на то, какие приближения неопределенных функций будут получены. Однако достаточно хорошее приближение решения задачи в целом может быть все же получено, несмотря на указанное различие в выборе неопределенных функций.

В большинстве случаев структуры краевых задач имеют вид

$$u = V(\Phi_1, \dots, \Phi_m) + \Phi_0 = \sum_{i=1}^m V_i(\Phi_i) + \Phi_0,$$

где V_i – некоторые линейные дифференциальные операторы. Если каждую из неопределенных функций приближать обобщенными полиномами вида

$$\Phi_i = \sum_{k=0}^{n_i} c_k^{(i)} \psi_k(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\{\psi_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) – некоторая полная последовательность функций, то, учитывая линейность операторов V_i , получаем

$$u = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{n_i} c_k^{(i)} V_i(\psi_k) + \Phi_0. \quad (16)$$

Выражение (16) содержит $N = n_1 + \dots + n_m$ неопределенных постоянных, при любом выборе которых точно удовлетворяются краевые условия задачи. Таким образом, формулу (16) можно рассматривать как некоторую координатную функцию. Изменяя числа n_i ($i = 1, \dots, m$), можем получить любое желаемое количество координатных функций. Отыскание постоянных c_k может быть осуществлено по обычной процедуре одного из вариационных или проекционных методов (Ритца, Бубнова–Галеркина, наименьших квадратов и т.д.).

Например, в [6] показано, что краевым условиям

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi|_{\partial\Omega_1}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \right) \Big|_{\partial\Omega_2} = \chi|_{\partial\Omega_2}$$

удовлетворяет структура

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} [\chi + \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - \alpha \omega_1 \Phi_1 - \alpha \varphi] + \varphi, \quad (17)$$

где $\omega_i = 0$ есть нормализованное уравнение участка $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$, $i = 1, 2$; Φ_1, Φ_2 – неопределенные компоненты, $D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$.

3. Применение структурно-вариационного метода

Для решения задачи (6) – (9) будем применять метод R -функций. Выделим область Ω (пересечение $|x| < L$ с D), вне которой фильтрация незначительна. На боковых границах Ω поставим условие $\psi|_{x=\pm L} = Q$.

Предположим, что известны функции $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$, $\omega_4(x, y)$, $\omega_5(x, y)$, такие, что:

$$1) \quad \omega_i(x, y)|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

$$2) \quad \omega_i(x, y) > 0 \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \cup \left(\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^5 \partial\Omega_j \right) \cup \{x = \pm L\},$$

$$3) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_i} = 1, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Такие функции всегда можно построить с помощью аппарата теории R -функций по методике, описанной в разделе 2. Тогда функция

$$\varphi_1 = \frac{Q \omega_2 \wedge_\alpha \omega_5}{\omega_2 \wedge_\alpha \omega_5 + \omega_4 \wedge_\alpha \frac{1}{2L} (L^2 - x^2)}$$

обладает свойствами $\varphi_1|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3} = 0$, $\varphi_1|_{\partial\Omega_4 \cup \{x=\pm L\}} = Q$, а на $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_5$ принимает, вообще говоря, произвольные значения, $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$.

Значит, задачу (6) – (9) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (18)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5 \cup \{x=\pm L\}} = \varphi_1|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5 \cup \{x=\pm L\}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (20)$$

Заменяя ω_1 на $\omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)$, ω_2 на $\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3$, φ на φ_1 , при $a = 0, \chi = 0$ из (17) получим структуру решения задачи (18) – (20) в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)\Phi_1 + \\ & + \frac{\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3 \cdot \omega_3 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)}{\omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) + \omega_1 \wedge_\alpha \omega_3} \times \\ & \times \left[\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3 \cdot \Phi_2 - D_1^{(2)}\varphi_1 - \right. \\ & \left. - D_1^{(2)} \left(\omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)\Phi_1 \right) \right] + \varphi_1, \end{aligned} \quad (21)$$

где Φ_1, Φ_2 – неопределённые компоненты,

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Недостатком структуры (21) является её громоздкость и наличие двух неопределённых компонент Φ_1 и Φ_2 . Решение задачи (18) – (20) можно упростить, если учесть, что условие (20) – естественное.

Легко проверить, что функция

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\omega_1 \wedge_\alpha \omega_3 \cdot \omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)}{\omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2) + \omega_1 \wedge_\alpha \omega_3} \cdot D_1^{(2)}\varphi_1$$

удовлетворяют условиям (19) и (20). Тогда в задаче (18) – (20) сделаем замену:

$$\psi(x, y) = \varphi_2(x, y) + u(x, y),$$

где $u(x, y)$ – новая неизвестная функция. Это приводит к задаче

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = f, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (22)$$

$$u|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5 \cup \{x=\pm L\}} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad (24)$$

где обозначено

$$f(x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] \in L_2(\Omega).$$

Введём в рассмотрение оператор краевой задачи (22) – (24), действующий в $L_2(\Omega)$ по правилу

$$Au = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (25)$$

с областью определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \right. \\ \left. u|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5 \cup \{x=\pm L\}} = 0, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0 \right\} \subset L_2(\Omega).$$

Пусть оператор (25) эллиптический невырожденный, т.е. существует такая постоянная μ_0 , что для всех $(x, y) \in \Omega$.

$$\frac{1}{k(x, y)} t_1^2 + \frac{1}{k(x, y)} t_2^2 \geq \mu_0 (t_1^2 + t_2^2).$$

В этом случае можно доказать [7], что оператор A положительно определён, условие (23) – главное, (24) – естественное. Значит, функция u может быть найдена как минимум функционала $(Au, u) - 2(u, f)$. Тогда структуру решения краевой задачи (22) – (24) можно взять в виде:

$$u = \omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)\Phi,$$

где Φ – неопределённая компонента.

Для аппроксимации компоненты Φ воспользуемся методом Ритца. Замкнув множество D_A в метрике, порожденной нормой

$$\|u\|_{H_A}^2 = \iint_{\Omega} \frac{1}{k(x, y)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

получим энергетическое пространство H_A со скалярным произведением

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \frac{1}{k(x, y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Выберем систему координатных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\varphi_i \in H_A, i = 1, 2, \dots$;
- 2) при любом n функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;
- 3) система $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ полна в H_A .

Неопределённый компонент Φ представим в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i.$$

Согласно методу Ритца для коэффициентов c_1, \dots, c_n , получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [\tilde{\omega}\varphi_i, \tilde{\omega}\varphi_j] c_i = (f, \varphi_j), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\tilde{\omega} = \omega_2 \wedge_\alpha \omega_4 \wedge_\alpha \omega_5 \wedge_\alpha \frac{1}{2L}(L^2 - x^2)$.

Если область Ω может быть (при подходящем выборе системы координат) заключена в горизонтальную полосу $0 \leq y \leq H$, то в качестве координатной системы можно выбрать

$$\varphi_{mn}(x, y) = P_m\left(\frac{x}{L}\right) P_n\left(\frac{2y}{H} - 1\right),$$

где $P_k(t)$ – полиномы Лежандра. Они образуют полную ортогональную на $[-1; 1]$ систему:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(t^2 - 1)^k].$$

Тогда

$$u(x, y) \approx u_N(x, y) = \sum_{m+n=0}^N c_{mn} \tilde{\omega}(x, y) \varphi_{mn}(x, y).$$

Сходимость последовательности приближенных решений к точному решению (вообще говоря, обобщенному) задачи (22) – (24) следует из теорем о сходимости метода Рунге [7].

4. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был проведен для случая, когда флютбет имеет прямоугольное сечение. Для расчётов выбрано $L = 3$, а высота водопроницаемого слоя $H = 1$. Рассмотрен случай заглубления флютбета $h = 0,25$ с постоянной шириной, равной 1, случаи различного расположения шпунта. Было принято, что границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$ плоские. Водоупор $\partial\Omega_4$ также считался плоским. Во всех случаях коэффициент фильтрации принимался постоянным: $k(x, y) = 1$, а расход жидкости $Q = 1$.

1 случай. Заглубление флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, один шпунт длиной 0,25. Область показана на рис. 2.

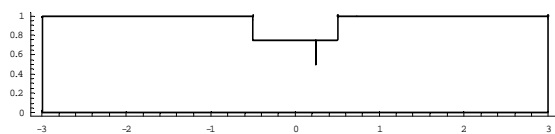


Рис. 2. Расчетная область для случая 1

В этом случае

$$\omega_1(x, y) = \omega_3(x, y) = 1 - y;$$

$$\omega_2(x, y) = (y - 0,75) \wedge_{\alpha} (0,25 - x^2); \quad \omega_4(x, y) = y;$$

$$\omega_5(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1^2(x, y) + \tau_2^4(x, y)} - \tau_1(x, y)}{2}\right)^2 + \tau_2^2(x, y)},$$

где

$$\tau_1(x, y) = 2(0,0625 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2),$$

$$\tau_2(x, y) = x - 0,25.$$

Обозначим

$$\omega_L(x, y) = \frac{1}{6}(9 - x^2) \wedge_{\alpha} y,$$

$$\omega_U(x, y) = \omega_5(x, y) \wedge_{\alpha} (-\omega_2(x, y)),$$

$$\omega_B(x, y) = [-(y - 1)] \wedge_{\alpha}$$

$$\wedge_{\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{6}(9 - x^2) \wedge_{\alpha} (\omega_1(x, y) \cdot \omega_4(x, y)) \right] \wedge_{\alpha} [-\omega_2(x, y)] \right\}.$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{\omega_U}{\omega_U + \omega_L}, \quad \varphi_2 = \varphi_1 - \frac{(\omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U) \cdot \omega_B}{\omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U + \omega_B} \cdot D^{(B)} \varphi_1.$$

Структуру решения получим в виде

$$\psi = \varphi_2 + \omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U \Phi - \frac{(\omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U) \cdot \omega_B}{\omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U + \omega_B} \cdot D^{(B)} [\omega_L \wedge_{\alpha} \omega_U \Phi].$$

Здесь Φ – неопределенная компонента, представим ее в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{m+n=0}^N c_{mn} P_m\left(\frac{x}{3}\right) P_n(2y - 1),$$

где $P_k(t)$ – полиномы Лежандра.

На рис. 3 приведена картина линий уровня ($\delta\psi = 0,1$) приближенного решения для $N = 5$ (21 базисная функция).

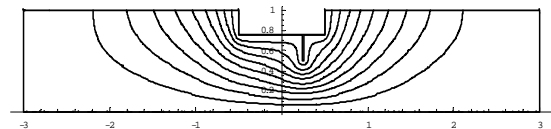


Рис. 3. Линии уровня функции тока

2 случай. Заглубление флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, один шпунт длиной 0,5. Область показана на рис. 4.

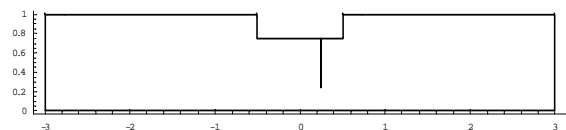


Рис. 4. Расчетная область для случая 2

В этом случае изменится выражение для $\tau_1(x, y)$:

$$\tau_1(x, y) = 0,25 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2.$$

На рис. 5 приведена картина линий уровня ($\delta\psi = 0,1$) приближенного решения для $N = 5$ (21 базисная функция).

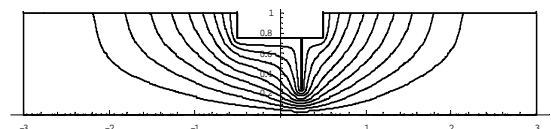


Рис. 5. Линии уровня функции тока

3 случай. Заглубление флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, два шпунта длиной $0,25$ и $0,5$, расположенные симметрично. Область показана на рис. 6.

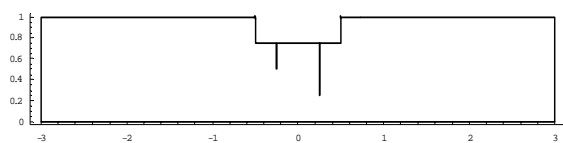


Рис. 6. Расчетная область для случая 3

В этом случае $\omega_5(x, y) = \omega'_5(x, y) \wedge_\alpha \omega''_5(x, y)$, где

$$\omega'_5 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1'^2 + \tau_2'^4} - \tau_1'}{2}\right)^2 + \tau_2'^2},$$

$$\omega''_5 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1''^2 + \tau_2''^4} - \tau_1''}{2}\right)^2 + \tau_2''^2},$$

$$\tau_1' = 0,25 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2, \quad \tau_2' = x - 0,25,$$

$$\tau_1'' = 2(0,0625 - (x + 0,25)^2 - (y - 0,75)^2),$$

$$\tau_2'' = x + 0,25.$$

На рис. 7 приведена картина линий уровня ($\delta\psi = 0,1$) приближенного решения для $N = 5$ (21 базисная функция).

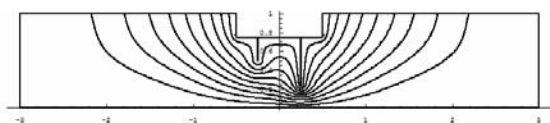


Рис. 7. Линии уровня функции тока

Выводы

Проектировщиков гидротехнических сооружений интересуют в основном следующие три величины: 1) расход жидкости; 2) максимальное и общее давление на флютбет; 3) максимальная выходная скорость.

Анализ приближенного решения позволяет сделать следующие выводы:

1. Если увеличить длину одного или нескольких шпунтов, то все линии тока снизятся, расход уменьшится, выходная скорость уменьшится. Если стремиться уменьшить выходную скорость, то наиболее эффективным является удлинение крайнего правого шпунта.

2. Если увеличить длину одного шпунта, то давление на флютбет слева от этого шпунта повысится, а справа – снизится; в частности, увеличение длины крайнего правого шпунта повысит давление на флютбет всюду.

Эти результаты полностью согласуются с инженерной практикой и теоретическими результатами [9].

Таким образом, в работе впервые для численного решения задач фильтрации под гидротехническими сооружениями применены методы R-функций и Ритца. Полученные приближенные решения сравнивались с решениями, полученными П.Н. Вабищевичем в [2, 8] с помощью метода фиктивных областей. Результаты хорошо согласуются.

Сказанное выше определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

Литература: 1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с. 2. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с. 3. Ляшко И.И., Сергиенко Н.В., Мистецкий Г.Е., Скопеецкий В.В. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. К.: Наук. думка, 1977. 288 с. 4. Ляшко И.И., Великоованенко Н.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1973. 264 с. 5. Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. 2004. № 4. С. 58 –61. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 511 с. 8. Вабищевич П.Н., Гассиев Р.В. Численное решение задач напорной фильтрации под гидротехническим сооружением // ЖВМ и МФ, 1987. Т. 27, № 10. С. 1580 – 1584. 9. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

Поступила в редколлегию 11.05.2010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дорошенко В.А.

Блишун Александр Павлович, студент гр. ПМм-09-1 фахта прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Увлечения и хобби: покер, футбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: всемирная история, история искусств. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Яловега Ирина Георгиевна, канд. техн. наук, ст. преп. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, анализ динамических систем, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: оригами. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.