Розв'язання диференційних рівнянь за допомогою перетворень з використанням системи комп'ютерної математики Maple

Т. М. Крохмаль[1], О. М. Нікітенко[2]
[1]*Харківська загально-освітня школа № 63, Харків, Україна*
[2]*Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна*
nikonxipe@gmail.com

Розглядаються приклади застосування системи комп'ютерної математики Maple для розв'язання диференційних рівнянь за допомогою перетворень Лапласа та диференційних перетворень.

Ключові слова: Maple, перетворення Лапласа, диференційні перетворення.

Символічне (операційне) числення широко застосовують у найрізноманітніших галузях науки та техніки.

Велику роль воно відіграє під час дослідження процесів як в лінійних фізичних системах електротехніки, автоматики, радіотехніки, механіки тощо (інтегральні перетворення), так і в нелінійних фізичних системах електроніки, радіотехніки, керування тощо (диференційні перетворення).

Сучасний математичний апарат дозволяє розв'язувати задачі, які описують за допомогою систем лінійних диференційних рівнянь (звичайних і в частинних похідних), різницевих та диференційно-різницевих рівнянь, диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами та певними типами інтегральних рівнянь. Така універсальність цих методів пояснюється їхньою універсальністю — можливістю отримати розв'язок найпростішими та економічними засобами та методами.

Алгоритм знаходження розв'язків диференційних рівнянь за допомогою методів перетворень містить з три кроки.

Суть першого кроку полягає в переході з області оригіналів до області зображень. Для інтегральних перетворень Лапласа такий перехід здійснюють за допомогою інтеграла Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,$$

а для диференційних перетворень — за допомогою диференціювання функції-оригіналу (Пухов, 1978, 1980, 1986)

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}.$$

Суть другого кроку полягає в розв'язанні алгебричних рівнянь чи системи таких рівнянь в області зображень для інтегральних перетворень Лапласа або знаходженні дискрет диференційного спектру для диференційних перетворень. Для зручності використання перетворень створено таблиці таких перетворень для функцій, що найчастіше використовують.

Суть третього кроку полягає в поверненні з області зображень в область оригіналів.

Для інтегральних перетворень Лапласа такий перехід здійснюють за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\cdot\infty}^{\sigma+i\cdot\infty} e^{pt}F(p)dp\,,$$

а для диференційних перетворень — за допомогою степеневого ряду Тейлора

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)t^k\,.$$

Розв'язання за допомогою методів перетворень вимагає додаткових рутинних обчислень. Тому доцільно скористатися системами комп'ютерної математики (СКМ), які дозволяють здійснити такі обчислення.

З усіх систем комп'ютерної математики найпривабливішою виглядає СКМ вищого класу Maple, яка має найбільше поширення серед таких систем. На ядрі СКМ Maple базуються такі популярні СКМ нижчого класу як MATLAB та Mathcad (Гречко, 2013).

Інша СКМ вищого класу Mathematica під час експлуатації має суттєво більше проблем різноманітного характеру (Аладьев, 2006).

Розглянемо можливість застосування Maple для знаходження розв'язків диференційних рівнянь.

Як приклад розглянемо задачу Коші для лінеаризованого рівняння руху заряджених частинок у приладах циліндричної конструкції зі схрещеними полями.

Лінеаризоване диференційне рівняння руху в радіальному напрямі має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2}=b-(1+b)x, \tag{1}$$

де $b=\frac{\eta}{\omega_H^2 r_k^2}\frac{U_a}{\ln s_a}$ — параметр, який залежить як від електростатичного потенціалу U_a, так і від напруженості магнітного поля ω_H.

Початкові умови для задачі Коші визначають нульовими:

$$x(0)=0,\ \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=0. \tag{2}$$

Рівняння (1) має аналітичний розв'язок

$$x(t)=\frac{b}{1+b}(1-\cos\sqrt{1+b}t). \tag{3}$$

Застосуємо перетворення Лапласа до розв'язання рівняння (1) з початковими умовами (2).

В області зображень це рівняння набуде вигляду:

$$p^2X(p)=\frac{b}{p}-(1+b)X(p)$$

Розв’язком цього рівняння буде

$$\frac{b}{p(p^2+1+b)}$$

Результатом зворотного перетворення Лапласа буде вираз

$$\frac{b}{1+b}(1-\cos\sqrt{1+b}),$$

що повністю збігається з розв’язком (2).

Застосовуючи команду прямого перетворення Лапласа **laplace(eq,t,p)** з бібліотеки **inttrans** Maple до рівняння (1), отримаємо таке алгебричне рівняння

$$p^2 laplace\left(x\left(t\right),t,p\right)=\frac{b}{p}-laplace\left(x\left(t\right),t,p\right)-blaplace\left(x\left(t\right),t,p\right).$$

Розв’язуючи отримане рівняння відносно $laplace\left(x\left(t\right),t,p\right)$ за допомогою команди **solve**, здобудемо такий розв’язок

$$\frac{b}{p\left(p^2+1+b\right)}.$$

Застосовуючи до отриманого розв’язку команду зворотного перетворення Лапласа **invlaplace(%,p,t)**, добудемо такий розв’язок

$$\frac{\left(1-\cosh\left(\sqrt{-1-b}t\right)\right)b}{1+b},$$

який, після нескладних алгебричних перетворень, набуває вигляду (2).

Застосуємо метод диференційних перетворень до розв’язання рівняння (1) з початковими умовами (3).

В області зображень це рівняння набуде рекурентного вигляду:

$$X(k+2)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}(b\sigma(k)-(1+b)X(k)),$$

тут $\sigma(k)=\begin{cases}1,\ k=0\\ 0\ k\neq 0\end{cases}$

Після обчислення дискрет диференційного спектру за вище наведеною рекурентною формулою отримуємо розв’язок у вигляді ряду

$$x(t)=\frac{1}{2!}bt^2-\frac{1}{4!}b(1+b)t^4+\frac{1}{6!}b(1+b)^2t^6-\frac{1}{8!}b(1+b)^3t^8+\cdots, \quad (4)$$

який є розвиненням у степеневий ряд розв’язку (2).

Розглянемо реалізацію диференційних перетворень у СКМ Maple.

Для цього необхідно згенерувати код обчислень

```
> ted :=k->piecewise(k=0,1);
> X(0) := 0; X(1) := 0;
> for k from 0 to kk do
> X(k+2):=1/(k+1)/(k+2)*(b*ted(k)-(1+b)*X(k));
> end do:
```

Результатом виконання цього коду будуть дискрети диференційного спектру, з яких у подальшому отримують розв'язок у вигляді ряду (4).

Показано можливість застосування системи комп'ютерної математики Maple для розв'язання лінійних диференційних рівнянь методами перетворень.

Застосування комп'ютерних технологій під час викладання вищої математики та природничих дисциплін надає змогу відмовитися від рутинних обчислень, а більше уваги приділяти кращому засвоєнню викладеного матеріалу.

Список літератури

Аладьев, В. З. (2006). *Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования.* Москва: Лаборатория Базовых Знаний.

Гречко, А. Л. (2013). Сучасний стан програмного забезпечення в курсах якісної теорії диференціальних рівнянь та динамічних систем. У *Матеріалах II Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 20—21 грудня* 2012 р. (с. 296—298). Київ: НТУУ «КПІ».

Пухов, Г. Е. (1978). *Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике.* Киев: Наукова думка.

Пухов, Г. Е. (1980). *Дифференциальные преобразования функций и уравнений.* Киев: Наукова думка.

Пухов, Г. Е. (1986). *Дифференциальные преобразования и метематическое моделирование физических прцессов.* Киев: Наукова думка.