УДК 681.3

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

В.А. ТИМОФЕЕВ

Рассматривается задача оценивания параметров авторегрессионной модели для случая, когда отсутствует информация о статистических свойствах сигналов, а известен лишь уровень помехи. Предлагается алгоритм оценивания параметров, который является модификацией рекуррентного метода наименьших квадратов (МНК) с экспоненциальным взвешиванием информации , что существенно упрощает процедуру идентификации.

The paper conciders the problem of estimating parameters of an autoregression model when no information about statistical properties of signals is available and only a disturbance level is known. The paper proposes an algorithm of estimating parameters that is a modification of exponentilly-weighed recursive last-squares method (LSM), which substantially simplifies an identification procedure.

Введение

Являясь частью общей задачи оптимизации, задача идентификации требует для своего решения определенного объема информации. Так, при исследовании реальных объектов таковой является статистическая информация о свойствах этих объектов, условиях их функционирования, помехах и т. д. Если такая информация имеется в требуемом объеме, то решение задачи существенно упрощается с применением какого-либо из хорошо разработанных для этого случая методов (например, метода максимального правдоподобия, байесового метода, метода наименьших квадратов и т. д.).

Отсутствие такой априорной информации существенно усложняет задачу идентификации, а общих рекомендаций по ее решению в таких случаях не существует. В настоящей работе рассматривается подход к решению задачи идентификации динамического объекта, использующий только информацию об уровне помех.

Постановка задачи

Рассмотрим динамический объект, описываемый ARX моделью

$$y_t = a_1 y_{t-1} + \ldots + a_n y_{t-n} + b_0 u_t + b_1 u_{t-1} \ldots + b_m u_{t-m} + \xi_t, \quad (1)$$

где y, u_i, ξ_i – выходной, входной сигналы и помеха измерений соответственно в момент времени i; a_i; $a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ — подлежащие определению коэффициенты модели.

Если у исследователя есть информация о помехе ξ_t, например, о принадлежности распределения ее какому-либо классу распределений, то задача идентификации может быть решена путем выбора соответствующего функционала (квадратичного, модульного и т. д.) и последующей его минимизации. Если же никакой априорной иформации о характере и природе помехи нет, кроме их принадлежности некоторому ограниченному интервалу, используют другие методы, например, методы, основанные на эллипсоидальном оценивании [1–5]. В этом случае предполагается, что

$$|\xi_t| \le \delta_t^{\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, t), \quad (2)$$

и задача идентификации заключается в определении области D , внутри которой лежат искомые параметры модели (1).

Представление (1) в виде уравнения псевдолинейной регрессии

$$y_t = \Theta^T x_t + \xi_t, \quad (3)$$

где $\Theta = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m)^T$ – вектор параметров $N \times 1$, $N = (m+n+1)$; $x_t = (y_{t-1}, \ldots, y_{t-n}, u_{t,u_{t-1}}, \ldots, u_{t-m}$ — вектор обобщенных входов, $N \times I$, и учет (2) позволяют записать следующую пару неравенств:

$$y_t - \delta_t^{\frac{1}{2}} \le \Theta^T x_t \le y_t + \delta_t^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

задающих границы области D, содержащей искомые параметры.

Так как вектор искомых параметров Θ удовлетворяет всем условиям

$$(y_t - \Theta^T x_t)^2 \le \delta_t, \quad (5)$$

то в качестве оценок параметров $\hat{\Theta}$ используются только те, которые принадлежат множеству [1]

$$M_t(\hat{\Theta}) = \{ \hat{\Theta} : (y_t - \Theta^T x_t)^2 \le \delta_t, \; \hat{\Theta} \in R^{n+m+1} \}, \quad (6)$$

представляющему собой с геометрической точки зрения монотонную невозрастающую последовательность выпуклых политопов D_t

$$M_t = \bigcap_{k=1}^{t} D_k = M_{t-1} \bigcap D_t; \tag{7}$$

$$D_t = \{\hat{\Theta}: | y_t - \hat{\Theta}^T x_t \ | \le \delta_t\}. \tag{8}$$

Так как вычисление оценок $\hat{\Theta}$ представляет собой достаточно сложную задачу, применяют различные способы ее упрощения путем построения некоторого множества, ограничивающего $M_t(\hat{\Theta})$, в частности, задавая эти ограничения в форме эллипсоидов [3, 4].

В работе [5] был получен алгоритм идентификации динамического объекта (1), основанный на методе эллипсоидов и состоящий в построении последовательности оптимальных эллипсоидов $\{ M_t \}$

$$M_t = \{\Theta \in R^{n+m+1} : (\Theta - \hat{\Theta}_t)^T P_t^{-1} (\Theta - \hat{\Theta}_t) \le 1\}, \tag{9}$$

где P_t – положительно определенная весовая матрица, определяющая размеры полуосей эллипсоида.

Рассмотренный в [5] алгоритм является модификацией рекуррентного МНК с экспоненциальным взвешиванием. В настоящей работе предлагается квазиоптимальный алгоритм идентификации, также основанный на эллипсоидальном оценивании, однако отличающийся от рассмотренного в указанной работе правилом построения эллипсоида.

Решение задачи эллипсоидального оценивания.

Аппроксимируем границы, соответствующие модели (1), эллипсоидом вида

$$D_t = \{ \Theta : (Y_t - X_t\Theta)^T R_t^{-1} (Y_t - X_t\Theta) \le 1\}, \quad R_t > 0, \tag{10}$$

включающим всю выборку наблюдений, имеющихся к моменту времени t

$$Y_t = X_t\Theta - E_t^T R_t^{-1} E_t \le 1, \tag{11}$$

где $Y_t = (y_1, y_2, \ldots, y_t)^T$; $X_t = (x_1^T, x_2^T, \ldots, x_t^T)$;

$E_t = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)^T$.

Объединяя (9) и (11), имеем

$$\begin{aligned}(\Theta - \hat{\Theta}_{t-1})^T P_{t-1}^{-1} (\Theta - \hat{\Theta}_{t-1}) +\\ + \rho_t (Y_t - X_t\hat{\Theta}^T)^T R_t^{-1} (Y_t - X_t\Theta) \le 1 + \rho_t,\end{aligned} \tag{12}$$

где $\rho_t > 0$.

Данное уравнение описывает новый эллипсоид M_t, центр которого

$$\hat{\Theta}_t = \hat{\Theta}_{t-1} + \rho_t P_t X_t R_t^{-1} E_t \tag{13}$$

и соответствующую ему матрицу осей

$$\begin{aligned}P_t = \beta^2 (P_{t-1} - \rho_t P_{t-1} X_t (R_t +\\ + \rho_t X_t^T P_{t-1} x_t)^{-1} X_t^T P_{t-1}.\end{aligned} \tag{14}$$

можно получить стандартными преобразованиями [1].

Здесь $E_t = Y_t - X_t\Theta_{t-1}$ — вектор $t \times 1$;

$$\beta^2 = 1 + \rho_t - E_t^T (R_t + \rho_t X_t P_{t-1} X_t^T)^{-1} E_t. \tag{15}$$

Как видно из (13), (14), свойства алгоритма существенно зависят от коэффициента ρ_t, поэтому задача его оптимального выбора является весьма важной.

В работе [2] показано, что минимизация $\|P_t\|$ дает

$$\rho_t = \frac{\mu_t \delta_t}{x_t^T P_{t-1} x_t}, \tag{16}$$

где μ_t — положительный действительный корень уравнения

$$\begin{aligned}(N-1)\mu_t^2 + \left(2N - 1 + \frac{e_t^2 - x_t^T P_{t-1} x_t}{\delta_t}\right)\mu_t +\\ + \left(N\left(1 - \frac{e_t^2}{\delta_t}\right) - \frac{x_t^T P_{t-1} x_t}{\delta_t}\right) = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

При этом границы внешнего эллипсоида для произвольного входного вектора x определяются неравенством

$$x^T\left(\hat{\Theta}_t - \frac{P^T x}{\sqrt{x^T P_t x}}\right) \le \Theta^T x \le x^T\left(\hat{\Theta}_t + \frac{P_t x}{\sqrt{x^T P_t x}}\right).$$

Для I-го компонента вектора параметров справедливо

$$\hat{\Theta}_{it} - p_{iit}^{\frac{1}{2}} \le \Theta^T x \le x^T\left(\hat{\Theta}_t + \frac{P_t x}{\sqrt{x^T P_t x}}\right). \tag{18}$$

Данный подход, хотя и отличается простотой, может оказаться неэффективным при исследовании динамических систем. Это, в первую очередь, относится к моделям ARMAX, имеющим невыпуклую область D. Другой недостаток такого оценивания состоит в том, что эллипсоид M_t совпадает с эллипсоидом M_{t-1}, когда ограничивающие гиперплоскости F_t параллельны гиперплоскостям, касательным к M_{t-1}. Чтобы избежать этого явления, рассмотрим условия, обеспечивающие уменьшение объема эллипсоида M_t по сравнению с M_{t-1}.

Пусть новое наблюдение определяется парой гиперплоскостей

$$D_t = \left\{\Theta : y_t - \delta_t^{\frac{1}{2}} \le x_t^T\Theta \le x_t^T\Theta + y_t + \delta_t^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{19}$$

Необходимо найти эллипсоид минимального объема M_t (вида (9)), содержащий пересечение D_t и M_{t-1} (7) и строго меньший M_{t-1}.

Линейное преобразование, сохраняющее объем, т. е. произведение осей, вида

$$\varepsilon = Q^{-1}(\Theta - \hat{\Theta}_{t-1}), \tag{20}$$

где $QQ^T = P_{t-1}$, позволяет преобразовать эллипсоид M_{t-1} в гиперсферу

$$M'_{t-1} = \left\{\varepsilon : \varepsilon^T \varepsilon \le 1\right\}, \qquad (21)$$

Преобразуем также гиперплоскости D_t в D'_t. Для того, чтобы они были ортогональны оси ε_1, необходимо

$$Q^T x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

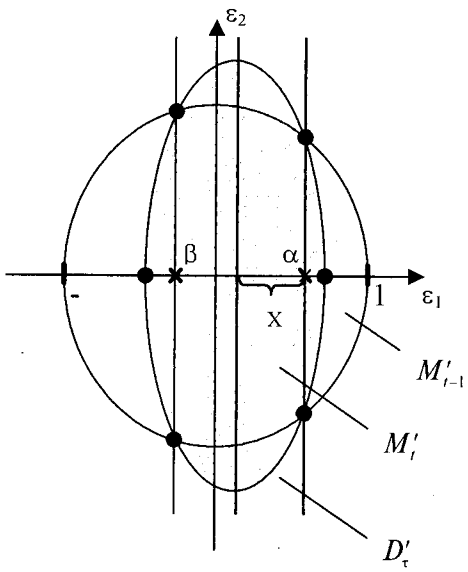

Рис. 1

Тогда эллипсоид, содержащий пересечение M'_{t-1} и D'_t (при этом гиперплоскости пересекают ось ε_1 в точках α и β, $(-1 \le \beta < \alpha \le 1)$) такой, как это показано на рис. 1, может быть представлен следующим образом:

$$M'_t = \left\{ \varepsilon : \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1t})^2}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon'^T \varepsilon}{\lambda} \le 1 \right\}, \qquad (23)$$

где $\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon'^T)$; ε' .— вектор ε, содержащий все компоненты, кроме ε_1.

Границы, определяющие M'_{t-1} и M'_t при $\varepsilon_1 = \alpha$, имеют вид

$$\frac{(\alpha - \varepsilon_{1t})^2}{\lambda_1} + \frac{1 - \alpha^2}{\lambda} = 1, \qquad (24)$$

а при $\varepsilon_1 = \beta$ —

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} \\ \dfrac{1}{\lambda} \end{bmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha + \beta - 2\varepsilon_{1t} \end{pmatrix}}{(\alpha + \beta)(1 + \varepsilon_{1t}^2) - 2(\alpha\beta + 1)\varepsilon_{1t}}. \qquad (25)$$

Решение дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}(N+1)(\alpha+\beta)\varepsilon_{1t} - (2(\alpha\beta+1) + N(\alpha+\beta)^2)\varepsilon_{1t} + \\ +(\alpha+\beta)(N\alpha\beta+1) = 0,\end{aligned} \qquad (26)$$

получаемого из условия

$$\frac{dV}{\partial \varepsilon_{1t}} = 0, \qquad (27)$$

где $V = \lambda_1 \lambda^{N-1}$, позволяет определить минимальный объем M'_t.

Решая это уравнение с учетом (25), имеем

$$\begin{cases} \lambda_1 = N(\alpha - \varepsilon_{1t})(\varepsilon_{1t} - \beta); \\ \alpha = \dfrac{N(\alpha+\beta)(\alpha - \varepsilon_{1t})(\varepsilon_{1t} - \beta)}{\alpha + \beta - 2\varepsilon_{1t}}. \end{cases} \qquad (28)$$

Только в случае, если $\alpha\beta = N^{-1}$, то один из корней (26) равен нулю, $\lambda_1 = \lambda = 1$, M'_{t-1} совпадает с M'_t.

Если D'_τ пересекает M'_{t-1} при $\varepsilon_1 = \alpha$ и $\varepsilon_1 = \beta$ с $\alpha\beta < -N^{-1}$, то M'_t будет содержать часть D'_{t-1}, заключенную между $\varepsilon_1 = \alpha$ и $\varepsilon_1 = -N\alpha$, т. е. объем M'_t будет меньше M_{t-1}.

Следовательно, вектор параметров λ_1, α и β, удовлетворяющих (28), обеспечивает решение задачи идентификации, т. е. получение требуемой эллипсоидной оценки искомого параметра $\hat{\Theta}$.

Моделирование

На рис. 2 приведены результаты моделирования работы алгоритма (13), (14) при различном выборе параметра ρ для случая $x \sim N(0,1)$, $N = 5$, $\xi \sim N(0; 0{,}2)$. На графиках изменение ошибки идентификации показано тонкими линиями.

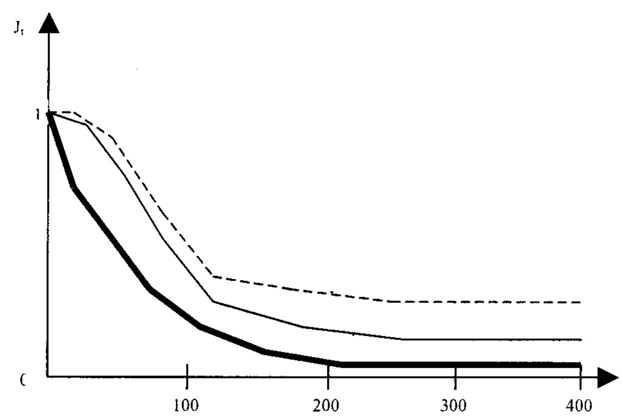

Рис. 2

Графики отражают изменение величины

$$J_t = \frac{\left\| \hat{\Theta}_t - \Theta \right\|^2}{\left\| \hat{\Theta}_0 - \Theta \right\|^2}.$$

На рисунке тонкая линия соответствует заданию величины ρ в соответствии с (16), пунктирная – заданию $\rho = 0{,}1$, жирная – вычислению параметров λ и α в соотношении (28). Как видно из рисунка, хотя выбор любого значения ρ обеспечивает сходимость алгоритма, наибольший эффект достигается при вычислении эллипсоида с помощью соотношения (28). При этом следует, однако, иметь в виду, что достигаемое улучшение сопровождается увеличением количества вычислений.

Заключение

В работе получены соотношения, обеспечивающие решение задачи идентификации с требуемой точностью. Так как отсутствие информации о помехах приводит к усложнению алгоритма оценивания, при практическом применении того или иного алгоритма следует оценить необходимые вычислительные затраты и на основании этого сделать вывод о целесообразности использования такого подхода. Если вычислительные затраты окажутся значительными, следует использовать какой-либо из известных методов, например, рекуррентный МНК.

Литература: 1. *Schweppe F.S.* Uncertain dynamic systems. – London: Prentice-Hall,Inc. – 1973. – 553 p. 2. *Norton J.P.* An introduction to identification. – London: Academic Press, Inc. – 1986. 310 p. 3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1986. 320 с. 4. *Бакан Г.М., Волосов В.В., Куссуль Н.Н.* Оценивание состояния непрерывных динамических систем методом эллипсоидов // Кибернетика и системный анализ, 1996. – №6. – с. 72–91. 5. *Тимофеев В.А.* Эллипсоидальное оценивание параметров динамического объекта при наличии ограниченных помех // Проблемы бионики, 2002. – Вып. 56. С. 28–34.

Поступила в редколлегию 11.11.2002 г.

Тимофеев Владимир Александрович, канд. техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник каф. ЭВМ ХНУРЭ.