

УДК 621.385.6

А. В. ГРИЦУНОВ, канд. техн. наук, Г. И. ЧУРЮМОВ, д-р физ.-мат. наук

## К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОХОЖДЕНИЯ РАДИОИМПУЛЬСА ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНУЮ СТРУКТУРУ МЕДЛЕННОЙ ВОЛНЫ

Исследование распространения радиоимпульсов в замедляющих системах (ЗС) при наличии нелинейной среды (в качестве которой чаще всего используется электронный поток) относится к одной из важнейших проблем радиофизики, радиотехники и электроники. Поскольку в большинстве случаев анализируемый радиоимпульс является достаточно узкополосным, наиболее часто для этой цели используется метод комплексных амплитуд [1], в котором уравнения электромагнитного поля записываются не для исходного ВЧ-сигнала (как в методе мгновенных значений), а для его комплексной огибающей. Последняя получается как следствие смещения спектра радиоимпульса в сторону низких частот на величину так называемой базовой частоты  $\omega_b$ .

Главными преимуществами метода комплексных амплитуд по сравнению с методом мгновенных значений являются: применимость для всех типов ЗС (например, для спирали); «медленность» решения, позволяющая уменьшить затраты вычислительных ресурсов; более высокая точность моделирования, поскольку не используется приближение постоянства электродинамических параметров парциальных видов ячеек во всей полосе пропускания ЗС [2]. Более того, широкополосность метода комплексных амплитуд может быть увеличена до величин, присущих методу мгновенных значений, путем использования адаптивного подхода [3]. Все перечисленные преимущества при этом сохраняются. Таким образом, несмотря на появление новых алгоритмов моделирования соленоидальных полей, данная методика все еще является достаточно перспективной. Необходимо лишь усовершенствовать уравнения для расчета полей, чтобы учесть важные с практической точки зрения эффекты.

В работе [4] получено уравнение возбуждения периодической замедляющей системы для метода комплексных амплитуд. Его особенностью является учет нелинейности дисперсионной характеристики, а также частотных зависимостей коэффициента затухания, волнового сопротивления и поперечной структуры ВЧ-поля ЗС. Поскольку большинство электрофизических установок используют системы в виде цепочек связанных резонаторов, далее будем исходить из указанного уравнения. Оно записывается в двух формах. Первая основана на подходе Фурье (концепции стоячих волн), вторая – на подходе Даламбера (концепции бегущих волн). При необходимости полученные результаты можно с незначительными изменениями применить к замедляющим системам с распределенными параметрами (например, спирали).

Форма уравнения возбуждения, основанная на подходе Фурье, использует в качестве коэффициентов параметры нормальных видов колебаний ЗС. Она получается путем разложения электродинамических параметров ЗС и единичной структурной функции электрического поля волны  $E_{0w}(x, y, z, \beta)$  в ряд Тейлора по постоянной распространения в окрестности базовой частоты (индекс  $b$ ) и записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} + \delta_b A(t, z) + i \frac{d\delta_b}{d\beta} \frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \frac{d\omega_b}{d\beta} \frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_b}{d\beta^2} \frac{\partial^2 A(t, z)}{\partial z^2} = \\ & = -\frac{1}{8DW_{1b}} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int E_{0w}^*(x, y, \zeta, \beta_b) J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta + \\ & + \frac{i}{8DW_{1b}^2} \frac{dW_{1b}}{d\beta} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int E_{0w}^*(x, y, \zeta, \beta_b) J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta - \end{aligned}$$

$$-\frac{i}{8DW_{lb}} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int \frac{\partial E_{0w}^*(x, y, \zeta, \beta_b)}{\partial \beta} J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta. \quad (1)$$

Здесь  $A(t, z)$  – комплексная амплитуда волны;  $\omega$  и  $\beta$  – частота и постоянная распространения нормального вида ЗС;  $\delta$  – коэффициент затухания этого вида;  $W_l$  – средняя погонная единичная энергия электрического поля нормального вида;  $J_{exc}(t, x, y, z)$  – комплексная огибающая плотности возбуждающего тока на базовой частоте и постоянной распространения;  $S_t$  – поперечное сечение пространства взаимодействия;  $D$  – период ЗС. Предполагается, что групповая скорость волны  $v_g = (d\beta/d\omega)^{-1}$  коллинеарна координате  $z$ .

Комплексная единичная структурная функция электрического поля бегущей волны определяется как

$$E_{0w}(x, y, z, \beta) = \sum_n E_{0n}(x, y, z) e^{i\beta(z-nD)}, \quad (2)$$

где  $E_{0n}(x, y, z)$  – единичная структурная функция электрического поля парциального вида  $n$ -го резонатора ЗС, формирующего полосу пропускания системы. Суммирование в формуле (2) осуществляется по всем ячейкам, функции  $E_{0n}$  которых отличны от нуля в точке  $(x, y, z)$ .

Комплексная амплитуда  $J_{exc}(t, x, y, z)$  плотности возбуждающего тока  $j_{exc}(t, x, y, z)$  определяется соотношением

$$j_{exc}(t, x, y, z) = \text{Re} \{ J_{exc}(t, x, y, z) e^{-i\beta_b z} e^{i\omega_b t} \}. \quad (3)$$

Мгновенное значение напряженности соленоидального электрического поля в точке  $(t, x, y, z)$  выражается зависимостью

$$E(t, x, y, z) = \text{Re} \left\{ [E_{0w}(x, y, z, \beta_b) A(t, z) + i \frac{\partial E_{0w}(x, y, z, \beta_b)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial A(t, z)}{\partial z}] e^{-i\beta_b z} e^{i\omega_b t} \right\}. \quad (4)$$

Форма уравнения возбуждения, основанная на подходе Даламбера, использует в качестве коэффициентов параметры бегущих волн. Она получается путем разложения электродинамических параметров ЗС и функции  $E_{0w}$  в ряд Тейлора по частоте в окрестности базовой постоянной распространения (индекс  $b$ ) и записывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \alpha_b A(t, z) - i \frac{d\alpha_b}{d\omega} \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} + \frac{d\beta_b}{d\omega} \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} - \frac{i}{2} \frac{d^2 \beta_b}{d\omega^2} \frac{\partial^2 A(t, z)}{\partial t^2} = \\ & = -\text{sgn}(v_{gb}) \frac{Z_{0b}}{2Dg^2} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int E_{0w}^*(x, y, \zeta, \omega_b) J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta + \\ & + \text{sgn}(v_{gb}) \frac{i}{2Dg^2} \frac{dZ_{0b}}{d\omega} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int E_{0w}^*(x, y, \zeta, \omega_b) J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta + \\ & + \text{sgn}(v_{gb}) \frac{iZ_{0b}}{2Dg^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z-D/2S_t}^{z+D/2} \int \frac{\partial E_{0w}^*(x, y, \zeta, \omega_b)}{\partial \omega} J_{exc}(t, x, y, \zeta) dS d\zeta. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\alpha$  – постоянная затухания бегущей волны;  $Z_0$  – сопротивление взаимодействия (продольное волновое сопротивление) [5];  $g$  – ширина зазора между ламелями ЗС.

Мгновенное значение напряженности соленоидального электрического поля в точке  $(t, x, y, z)$  при таком подходе выражается зависимостью

$$E(t, x, y, z) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ E_{0\omega}(x, y, z, \omega_b) A(t, z) - i \frac{\partial E_{0\omega}(x, y, z, \omega_b)}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} \right] e^{-i\beta_b z} e^{i\omega_b t} \right\}. \quad (6)$$

Если в нелинейной среде присутствуют временные и пространственные гармоники возбуждающего тока с частотами и постоянными распространения, близкими к базовым для рассматриваемой волны, в пространственно-временном спектре правых частей уравнений (1) и (5) появляются низкочастотные составляющие с относительно большими амплитудами. Как показано в работе [4], обе формы уравнения возбуждения при этом можно считать эквивалентными. Данный случай наиболее интересен с практической точки зрения.

Для интегрирования уравнения (1) или (5) необходимо решить ряд задач, к которым относятся, во-первых, расчет комплексной единичной структурной функции электрического поля бегущей волны  $E_{0\omega}(x, y, z, \beta)$  или  $E_{0\omega}(x, y, z, \omega)$  и производной от нее по постоянной распространения или частоте соответственно, во-вторых, получение комплексной огибающей плотности возбуждающего тока на базовой частоте и постоянной распространения  $J_{exc}(t, x, y, z)$ , в-третьих – выбор конечно-разностной схемы (шаблона) для каждой формы уравнения. Рассмотрим перечисленные задачи по-отдельности.

**Расчет единичных структурных функций бегущих волн.** Вычисление структурной функции  $E_{0\omega}(x, y, z, \beta)$  или  $E_{0\omega}(x, y, z, \omega)$  заключается в решении уравнения Гельмгольца для монохроматического электрического поля в совокупности резонаторов периодической ЗС. Учитывая периодичность системы, целесообразно использовать аналитическое решение методом разделения переменных путем разложения составляющих структурной функции в ряды Фурье по координате  $z$  [6]. В качестве периода разложения выбирается период ЗС. При этом постоянные распространения пространственных гармоник не зависят от  $\beta$ .

Выражения для составляющих функции  $E_{0\omega}$  проще всего получить с учетом того, что произведение

$$E_{0\omega}(x, y, z, \beta) e^{-i\beta z} = \sum_n E_{0n}(x, y, z) e^{-i\beta n D}$$

является линейной комбинацией структурных функций парциальных видов колебаний ячеек и, следовательно, удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Другими словами, функция  $E_{0\omega}(x, y, z, \beta)$  получается из выведенных в [6] выражений для составляющих поля бегущих волн путем уменьшения постоянных распространения фигурирующих в них пространственных гармоник на величину  $\beta$  (фазовых постоянных – на величину  $\gamma$ ).

В прямоугольной системе координат составляющие структурной функции для основной (прямо направленной) волны записываются как

$$E_{0\omega y}(x, y, z, \beta) = i \sum_s E_{0\omega}^s(\beta) X_{ys}(x, \beta) Y_{ys}(y, \beta) e^{-i \frac{2\pi s}{D} z}, \quad (7)$$

$$E_{0\omega z}(x, y, z, \beta) = \sum_s E_{0\omega}^s(\beta) X_{zs}(x, \beta) Y_{zs}(y, \beta) e^{-i \frac{2\pi s}{D} z},$$

где  $E_{0\omega}^s(\beta)$  – амплитуда  $s$ -й пространственной гармоники;  $X_{ys}(x, \beta)$ ,  $X_{zs}(x, \beta)$ ,  $Y_{ys}(y, \beta)$  и  $Y_{zs}(y, \beta)$  – вариационные функции (зависимости составляющих напряженности электрического поля  $s$ -й пространственной гармоники от поперечных координат). У комплементарной (встречной) волны выражения (7) отличаются знаком перед  $\beta$ .

Амплитуды пространственных гармоник рассчитываются по формуле  $E_{0\omega}^s(\beta) = (g/D) \times \sin(\beta_s g/2) / (\beta_s g/2)$ , где  $\beta_s = \beta + 2\pi s/D$ . Выражения для вариационных функций определяются конкретной конструкцией ЗС. Например, при постоянстве  $X_{ys}$  и  $X_{zs}$  зависимости  $Y_{ys}(y, \beta)$  и

$Y_{zs}(y, \beta)$  являются линейными комбинациями функций  $\text{sh}(\pm\sqrt{\beta_s^2 - k^2} y)$  и  $\text{ch}(\pm\sqrt{\beta_s^2 - k^2} y)$ . Составляющие производной  $\partial E_{0w}(x, y, z, \beta)/\partial \beta$  нетрудно найти, продифференцировав выражения (7) по  $\beta$ . Получаемые при этом зависимости здесь не приводятся вследствие их громоздкости. Аналогичный подход может быть использован в цилиндрической системе координат.

Если решается уравнение возбуждения в форме (5), функцию  $E_{0w}(x, y, z, \omega)$  и производную от нее  $\partial E_{0w}(x, y, z, \omega)/\partial \omega$  можно вычислить на основе результатов вышеприведенной методики, воспользовавшись разложением дисперсионной характеристики «холодной» ЗС в ряд Тейлора в окрестности базовой частоты:

$$\beta(\omega) \approx \beta_b + \frac{d\beta_b}{d\omega}(\omega - \omega_b).$$

**Расчет комплексной огибающей плотности возбуждающего тока.** Нахождение комплексной амплитуды  $J_{exc}(t, x, y, z)$  плотности возбуждающего тока  $j_{exc}(t, x, y, z)$  в численных моделях целесообразно выполнять методом Прони (гармонической интерполяцией) [7]. При этом интеграл Фурье для комплексной огибающей плотности тока

$$J_{exc}(t, x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} J_{exc}^{\omega}(\Omega, x, y, z) e^{i\Omega t} d\Omega,$$

где  $J_{exc}^{\omega}(\Omega, x, y, z)$  – спектральная плотность функции  $J_{exc}(t, x, y, z)$  в частотной области, преобразуется в сумму ограниченного числа дискретных временных гармоник:

$$J_{exc}(t, x, y, z) = \sum_h J_{exc}^h(x, y, z) e^{i\Omega_h t}, \quad (8)$$

где  $J_{exc}^h(x, y, z)$  и  $\Omega_h$  – соответственно комплексная амплитуда и частота  $h$ -й гармонической составляющей функции  $J_{exc}$ .

Поскольку гармоническая декомпозиция функции методом Прони является достаточно длительной процедурой, нет возможности анализировать возбуждающий ток во всех точках пространства взаимодействия, даже после перехода к эйлеровым координатам. Поэтому, воспользовавшись тем, что под интегралами в правых частях уравнений (1) и (5) от времени зависит только возбуждающий ток, применим гармоническую интерполяцию к комплексным временным выборкам мгновенных значений интегралов возбуждения

$$I_k(t) = \int_{z_k - D/2 S_t}^{z_k + D/2} \int E_{0w}^*(x, y, \zeta, \omega_b) j_{exc}(t, x, y, \zeta) e^{i\beta_b \zeta} e^{-i\omega_b t} dS d\zeta,$$

$$I_{\beta k}(t) = \int_{z_k - D/2 S_t}^{z_k + D/2} \int \frac{\partial E_{0w}^*(x, y, \zeta, \beta_b)}{\partial \beta} j_{exc}(t, x, y, \zeta) e^{i\beta_b \zeta} e^{-i\omega_b t} dS d\zeta$$

или

$$I_{\omega k}(t) = \int_{z_k - D/2 S_t}^{z_k + D/2} \int \frac{\partial E_{0w}^*(x, y, \zeta, \omega_b)}{\partial \omega} j_{exc}(t, x, y, \zeta) e^{i\beta_b \zeta} e^{-i\omega_b t} dS d\zeta$$

в дискретном множестве поперечных сечений  $z = z_k$  пространства взаимодействия. Из полученных дискретных комплексных спектров функций  $I_k$ ,  $I_{\beta k}$  и  $I_{\omega k}$  в  $k$ -м сечении затем отбираются гармоники с частотами  $-\Omega_{max} \leq \omega_h \leq +\Omega_{max}$ , где  $\Omega_{max}$  – максимальная частота,

удовлетворяющая условию узкополосности функции  $j_{exc}$  в частотной области, и подставляются в уравнение, аналогичное (8). Дифференцирование полученных медленно меняющихся во времени комплексных огибающих интегралов возбуждения по  $t$  в уравнении (5) не составляет труда. Напротив, поскольку эти функции не являются узкополосными в области постоянных распространения, дифференцирование их по  $z$  в уравнении (1) целесообразно выполнять с использованием линейной регрессионной модели [8].

**Выбор конечно-разностной схемы интегрирования уравнения возбуждения.** Рассмотрим способы интегрирования уравнений возбуждения (1) и (5). В основе каждого из них лежит неоднородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial A(t,z)}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial A(t,z)}{\partial t} = f(t,z),$$

дополненное членами, учитывающими нелинейность дисперсионной характеристики и затухание волны. Для решения данного уравнения методом конечных разностей обычно используется явный или неявный шаблон первого порядка аппроксимации [9]. Явная схема является условно устойчивой при  $\Delta t \leq \Delta z / |v_g|$ , где  $\Delta t$  и  $\Delta z$  – размеры шагов соответственно по времени и продольной координате. Неявная схема абсолютно устойчива.

К сожалению, контрольные расчеты для холодной замедляющей системы показывают, что при сколько-нибудь существенной ширине спектра сигнала (порядка 1% и более от базовой частоты) первый порядок конечно-разностной аппроксимации не обеспечивает достаточной точности интегрирования уравнений возбуждения. Поэтому возникает задача выбора устойчивых разностных схем второго порядка, пригодных для решения этих уравнений.

Шаблон явной трехслойной схемы второго порядка аппроксимации для интегрирования уравнения (5) изображен на рис. 1а. Соответствующие ему конечно-разностные приближения записываются как

$$\frac{\partial A_k^l}{\partial z} \approx \frac{A_{k+1}^l - A_{k-1}^l}{2\Delta z}, \quad \frac{\partial A_k^l}{\partial t} \approx \frac{A_k^{l+1} - A_k^{l-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 A_k^l}{\partial t^2} \approx \frac{A_k^{l-1} - 2A_k^l + A_k^{l+1}}{\Delta t^2}.$$

Данная схема является условно-устойчивой при  $\Delta t \leq \Delta z / |v_g|$ . Для уравнения (1) явную двухслойную схему второго порядка построить невозможно.

Помимо ограничения на размер временного шага, недостатком данного шаблона является необходимость доопределения граничного условия на выходном конце ЗС. Экстраполяция амплитуды полиномом (до третьей степени включительно) не обеспечивает сходимости решения. Гармоническая экстраполяция на трех точках [10] пригодна только для монохрома-

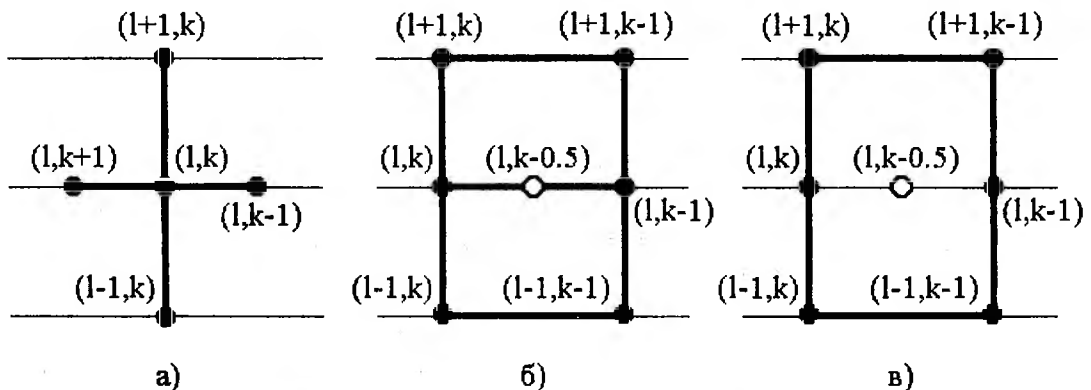


Рис. 1

тической функции  $A(t,z)$ . Таким образом, явная схема второго порядка, по-видимому, неприемлема для интегрирования уравнения (5).

В качестве альтернативы можно предложить неявную схему того же порядка аппроксимации с весами, шаблон которой изображен на рис. 1б. Соответствующие ей конечно-разностные приближения имеют вид:

$$A_{k-0,5}^l \approx \sigma \frac{A_{k-1}^{l-1} + A_k^{l-1} + A_{k-1}^{l+1} + A_k^{l+1}}{4} + (1-\sigma) \frac{A_{k-1}^l + A_k^l}{2},$$

$$\frac{\partial A_{k-0,5}^l}{\partial z} \approx \frac{\sigma}{2} \frac{A_k^{l-1} - A_{k-1}^{l-1}}{\Delta z} + (1-\sigma) \frac{A_k^l - A_{k-1}^l}{\Delta z} + \frac{\sigma}{2} \frac{A_k^{l+1} - A_{k-1}^{l+1}}{\Delta z},$$

$$\frac{\partial A_{k-0,5}^l}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \frac{A_{k-1}^{l+1} - A_{k-1}^{l-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{A_k^{l+1} - A_k^{l-1}}{2\Delta t},$$

$$\frac{\partial^2 A_{k-0,5}^l}{\partial t^2} \approx \frac{1}{2} \frac{A_{k-1}^{l-1} - 2A_{k-1}^l + A_{k-1}^{l+1}}{\Delta t^2} + \frac{1}{2} \frac{A_k^{l-1} - 2A_k^l + A_k^{l+1}}{\Delta t^2},$$

где  $\sigma = 0 \dots 1$  – весовой коэффициент.

Данная схема является абсолютно устойчивой при  $\sigma \geq 0,5$ . Минимальные погрешности интегрирования обеспечиваются при наименьших значениях весового коэффициента. Однако ввиду наличия в уравнении (5) дополнительных по отношению к уравнению переноса членов, близкая к нижнему пределу величина  $\sigma$  может вызвать неустойчивость этой схемы.

С другой стороны, учитывая, что порядок аппроксимации данного шаблона не зависит от  $\sigma$ , можно выбрать значение весового коэффициента, равное единице. Соответствующий шаблон показан на рис. 1в, а аппроксимация по продольной координате имеет вид

$$\frac{\partial A_{k-0,5}^l}{\partial z} \approx \frac{1}{2} \frac{A_k^{l-1} - A_{k-1}^{l-1}}{\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{A_k^{l+1} - A_{k-1}^{l+1}}{\Delta z}.$$

Связь между четными и нечетными слоями в этой схеме осуществляется только через вторую производную по времени. Такое «расщепление» может, в принципе, явиться источником неустойчивостей. Таким образом, с учетом вышесказанного, оптимальными значениями  $\sigma$  следует считать близкие к  $2/3$ .

Ввиду малости коэффициента затухания, приведенный способ расчета величины  $A_{k-0,5}^l$  не является критичным. Ее можно, например, вычислять как среднее арифметическое от значений амплитуд в углах шаблона или во всех шести его точках. Столь же не критичным является метод расчета правой части уравнения возбуждения в том же месте. Интегрирование данного уравнения на каждом временном слое осуществляется обычным для краевой задачи порядком [9], т.е. от входа к выходу ЗС. Начальные условия проще всего брать нулевыми.

Шаблон неявной двухслойной схемы второго порядка для решения уравнения (1) приведен на рис. 2а. Ему соответствуют конечно-разностные приближения вида

$$A_k^{l-0,5} \approx \sigma \frac{A_{k-1}^{l-1} + A_{k-1}^l + A_{k+1}^{l-1} + A_{k+1}^l}{4} + (1-\sigma) \frac{A_k^{l-1} + A_k^l}{2},$$

$$\frac{\partial A_k^{l-0,5}}{\partial t} \approx \frac{\sigma}{2} \frac{A_{k-1}^l - A_{k-1}^{l-1}}{\Delta t} + (1-\sigma) \frac{A_k^l - A_k^{l-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma}{2} \frac{A_{k+1}^l - A_{k+1}^{l-1}}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial A_k^{l-0,5}}{\partial z} \approx \frac{1}{2} \frac{A_{k+1}^{l-1} - A_{k-1}^{l-1}}{2\Delta z} + \frac{1}{2} \frac{A_{k+1}^l - A_{k-1}^l}{2\Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 A_k^{l-0,5}}{\partial z^2} \approx \frac{1}{2} \frac{A_{k-1}^{l-1} - 2A_k^{l-1} + A_{k+1}^{l-1}}{\Delta z^2} + \frac{1}{2} \frac{A_{k-1}^l - 2A_k^l + A_{k+1}^l}{\Delta z^2}.$$

Эта схема является абсолютно устойчивой при  $\sigma \geq 0,5$ .

Выбирая единичное значение весового коэффициента, получаем шаблон, изображенный на рис. 2б. Соответствующая аппроксимация по временной координате записывается как

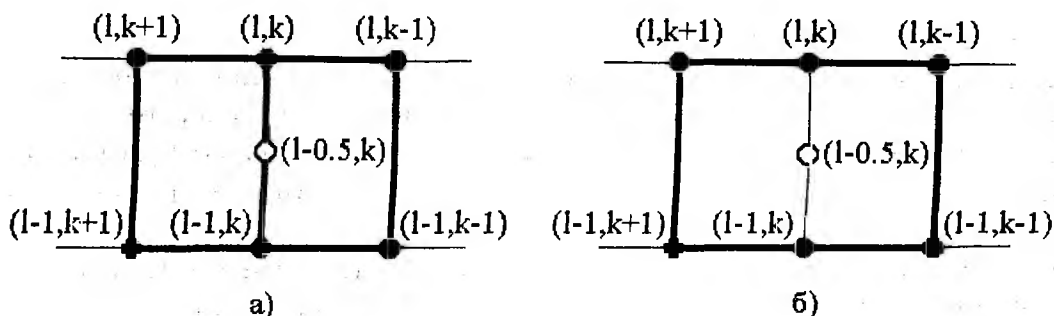


Рис. 2

$$\frac{\partial A_k^{l-0,5}}{\partial t} \approx \frac{1}{2} \frac{A_{k-1}^l - A_{k-1}^{l-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{A_{k+1}^l - A_{k+1}^{l-1}}{\Delta t}.$$

Недостатком ее также является возможность (по крайней мере, теоретическая) появления неустойчивостей, связанных с «расщеплением» между четными и нечетными узлами по продольной координате.

Для двухслойных схем второго порядка граничное условие во втором от начала замедляющей системы узле по координате  $z$  можно определить с помощью экстраполяции первого порядка.

В заключение отметим, что хотя при контрольных расчетах двухслойная схема показала в целом несколько меньшую погрешность, имеющиеся на сегодняшний день результаты не позволяют отдать предпочтение какой-либо из двух вышеописанных форм уравнения возбуждения. Поэтому окончательный выбор вида этого уравнения должен осуществляться на этапе программной реализации.

Таким образом, рассмотрены главные особенности методики интегрирования полученных в работе [4] двух форм уравнения возбуждения замедляющей системы в виде цепочки связанных резонаторов для метода комплексных амплитуд. Эти уравнения можно использовать в качестве базовых при анализе распространения узкополосных радиоимпульсов в структурах с медленной волной при наличии нелинейной среды, например, электронного потока. Возможна, разумеется, разработка альтернативных алгоритмов, однако предложенная здесь методика обеспечивает достаточную для большинства практических применений точность моделирования указанного процесса.

**Список литературы:** 1. *Gritsunov A.V.* On Spectral Modeling of Microwave Devices // *Telecomm. and Radio Engineering*. 2001. V. 55, No. 8. P. 98 – 102. 2. *Gritsunov A.V.* The Spectral Approach to Solving of EMC Problems at Microwave Tubes Simulation // *Proc. Int. Symposium and Exhibition on Electromagnetic Compatibility*. Wroclaw (Poland). 2002. 3. *Грицунов А.В.* Адаптивный метод комплексных амплитуд в спектральных моделях СВЧ-приборов // *Материалы междунар. конф. «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии»*. Севастополь: «Вебер». 2001. С. 224 – 227. 4. *Грицунов А.В.* К выводу уравнения возбуждения периодической замедляющей системы для метода комплексных амплитуд // *Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 2001. Вып. 122. С. 169 – 178. 5. *Грицунов А.В.* К расчету коэффициентов матричного уравнения возбуждения резонаторной замедляющей системы // *Там же*. 2002. Вып. 124. С. 16 – 23. 6. *Магнетроны* сантиметрового диапазона. Т. 1 / Под ред. С.А. Зусмановского. М.: Сов. радио, 1950. 420 с. 7. *Gritsunov A.V., Turenko L.Y.* Harmonic Decomposition of an Exciting Current at Electron Devices Simulation // *Telecomm. and Radio Engineering*. 2002. V. 57 (to be published). 8. *Грицунов А.В.* О сглаживании выходных параметров нестационарных моделей // *Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 2001. Вып. 120. С. 119 – 122. 9. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с. 10. *Герасимов В.П., Грицунов А.В., Писаренко В.М.* К моделированию граничных условий в цепочке связанных резонаторов для метода мгновенных значений // *Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 2002. Вып. 129. С. 119 – 126.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 18.06.2002*