УДК 621.385.6

Н.П. СТОГНИЙ, Н. К. САХНЕНКО, канд. физ.-мат. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОБРАЗОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Введение

При взаимодействии электромагнитного поля с мгновенно образующейся плазмой происходит смещение частоты падающего поля [1]. Интерес также представляет взаимодействие поля и движущейся плазмы, так как это связано с возможностью генерации волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов [2]. Теоретически и экспериментально установлено, что при падении импульса на движущийся ионизационный фронт происходит одновременное смещение частоты и сжатие импульса [3]. В [4] установлено увеличение смещения частоты и усиление первичного сигнала в результате его взаимодействия с движущимся плазменным сгустком в волноводе. К этому результату приводит механизм двойной дисперсии: дисперсии волн в плазме и в волноводе.

Установление закономерностей взаимодействия электромагнитных волн и быстро образующейся плазмы представляет большой интерес для приложений в области оптоэлектроники, микроволновой техники, диагностики и зондирования атмосферы, ионосферы, плазмы в лабораторных и промышленных установках, установках термоядерного синтеза.

В данной работе теоретически исследуется двумерная задача преобразования электромагнитного поля в результате образования цилиндрического плазменного сгустка. Решение задачи получено аналитически в виде преобразования Лапласа. Обращение во временную область позволило оценить длительность переходного процесса и выявить особенности установившегося режима.

Постановка задачи

Рассматривается холодная изотропная плазма с постоянной плотностью, образующаяся в нулевой момент времени в результате резкой ионизации фоновой среды в цилиндрической области. Предполагается, что среда не обладает магнитными свойствами.
Основные уравнения для холодной изотропной плазмы имеют вид [5]:

$$rot\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$rot\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_p^2(t)\vec{E}. \tag{3}$$

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$, соответственно, векторы напряженности электрического и магнитного поля, ε_0 и μ_0 электрическая и магнитная постоянные, $\vec{J}$ - плотность тока электронов в плазме, ω_p - плазменная частота. Эти уравнения, следуя [5], удовлетворяют начальным условиям

$$\vec{E}(0^+) = \vec{E}(0^-),\ \vec{H}(0^+) = \vec{H}(0^-),\ \vec{J}(0^+) = 0 \tag{4}$$

Для описания полей вводится цилиндрическая система координат (ρ,ϕ,z). Предполагается, что плазменный цилиндр ориентирован вдоль оси Oz. Будем рассматривать параллельно- поляризованные поля, для которых отличными от нуля являются компоненты $\left\{E_z, H_\varphi, H_\rho\right\}$ и перпендикулярно- поляризованные, для которых отличны от нуля $\left\{H_z, E_\varphi, E_\rho\right\}$. От данных уравнений можно перейти к волновым уравнениям для z-компонент электрического поля в однородной плазме

$$\Delta E(t,\rho,\varphi)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(t,\rho,\varphi)-\frac{\omega_p^2}{c^2}\cdot E(t,\rho,\varphi)=0 \tag{5}$$

с начальными условиями

$$E(t=0^-)=E(t=0^+),\ \frac{\partial E}{\partial t}(t=0^-)=\frac{\partial E}{\partial t}(t=0^+) \tag{6}$$

и для магнитного поля

$$\Delta\dot{H}(t,\rho,\phi)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\dot{H}(t,\rho,\phi)-\frac{\omega_p^2}{c^2}\cdot\dot{H}(t,\rho,\phi)=0,\ \dot{H}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$H(t=0^-)=H(t=0^+)\,,\ \frac{\partial}{\partial t}H(t=0^-)=\frac{\partial}{\partial t}H(t=0^+)\,,\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}H(t=0^-)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}H(t=0^+) \tag{8}$$

Здесь $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ - оператор Лапласа.

Основная цель данного исследования состоит в нахождении нестационарного отклика поля на мгновенное образование плазмы.

Решение начальной задачи

Рассмотрим плоскую волну, которая распространяется в свободном пространстве.

$$\vec{E}_0=E_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(k\rho)e^{im\phi}e^{i\omega t}\cdot\vec{z}\,, \tag{9}$$

где $k=\frac{\omega}{c},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ - скорость света в вакууме.

Предположим, сначала, что в нулевой момент времени холодная изобронная плазма с постоянной плазменной частотой образуется во всем пространстве. Применяем преобразование Лапласа $L(p)=\int_0^\infty W(t)e^{-pt}dt$ к уравнению (5) и используем начальные условия (6). Преобразование Лапласа от решения уравнения (5) имеет вид:

$$L(p,\rho,\phi)=E_0\frac{(p+i\omega)}{\omega^2+p^2+\omega_p^2}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}\vec{z} \tag{10}$$

Вычисляя вычеты в полюсах можно найти представление во времени преобразованного поля:

$$\vec{E}(z,t)=\frac{E_0}{2}\left[\left(1+\frac{\omega}{\omega_f}\right)e^{i\omega_f t}+\left(1-\frac{\omega}{\omega_f}\right)e^{-i\omega_f t}\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}\vec{z} \tag{11}$$

Здесь $\omega_f^2=\sqrt{\omega^2+\omega_p^2}$.

Для магнитного поля решение может быть построено аналогично исходя из уравнений (7) и (8). В качестве первичного поля рассматривается плоская волна с амплитудой H_0 (заменим в формуле (9) E_0 на H_0). Получим решение в виде

$$\vec{H}(p)=H_0\frac{p^2+\omega_p^2+i\omega p}{p(p^2+\omega_p^2+\omega^2)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}\vec{z} \tag{12}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\vec{H}(z,t)=\frac{H_0}{\omega_f^2}\left[\omega_p^2+\omega\frac{\omega+\omega_f}{2}e^{i\omega_f t}+\omega\frac{\omega-\omega_f}{2}e^{-i\omega_f t}\right]\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}\vec{z} \tag{13}$$

Полученные решения совпадают с полученными ранее в [5-6]. Анализируя формулы (11) и (13) мы видим, что в результате резкого образования плазмы первичная плоская волна расщепляется на «прошедшую» и «отраженную» во времени волны, они обладают смещенной частотой ω_f и разными амплитудами. У магнитного поля также появляется стационарная составляющая.

Решение граничной задачи

Построим сначала решение задачи для случая *параллельной поляризации*. В качестве первичного поля рассматривается плоская волна (9), распространяющаяся в вакууме. В нулевой момент времени плазма образуется внутри цилиндра радиуса R.
Внутри цилиндра поле описывается уравнением (5) с начальными условиями (6), снаружи поле удовлетворяет волновому уравнению в вакууме (может быть получено из (5) при $\omega_p=0$). В качестве начальных также используются условия (6).

Преобразованное поле должно удовлетворять уравнениям:

$$\Delta E(p)-\frac{1}{c^2}\left(p^2E(p)-pE(0^-)-E'(0^-)\right)-\frac{\omega_p^2E(p)}{c^2}=0,\ \ \rho<R \tag{14}$$

$$\Delta E(p)-\frac{1}{c^2}\left(p^2E(p)-pE(0^-)-E'(0^-)\right)=0,\ \ \rho>R \tag{15}$$

Штрих здесь означает производную по времени. Для нахождения решения используется эволюционный подход, согласно которому решение задачи в ограниченной нестационарной области представимо в виде суперпозиции решения начальной задачи и решения, явно учитывающего влияние границы. Предположение мгновенного образования плазмы позволяет построить аналитическое решение в виде преобразования Лапласа.
Поле внутри неоднородности будем искать в виде:

$$L(p,\rho,\phi)=\frac{(p+i\omega)E_0}{\omega^2+p^2+\omega_p^2}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\cdot \mathrm{I}_m(\varphi\rho)\cdot e^{im\phi}\quad (\rho<R) \tag{16}$$

Снаружи:

$$L(p,\rho,\phi)=\frac{E_0}{p-i\omega}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m\cdot \mathrm{K}_m(\gamma\rho)\cdot e^{im\phi}\qquad (\rho>R) \tag{17}$$

Здесь $\varphi=\frac{\sqrt{p^2+\omega_p^2}}{c}$, $\gamma=\frac{p}{c}$, $\cdot\mathrm{I}_m(..)$ и $\cdot K_m(..)$ - модифицированные функции Бесселя.

Коэффициенты a_m и b_m находятся из граничных условий, а именно, из требования непрерывности на границе тангенциальных составляющих поля, в данном случае компонент E_z и H_φ. Компонента H_φ может быть найдена из уравнения (1). В результате преобразований, получим

$$a_m = A(p)\frac{-\gamma\cdot J_m(kR)\cdot \mathrm{K}'_m(\gamma R) + k\cdot J'_m(kR)\cdot \mathrm{K}_m(\gamma R)}{-\gamma\cdot \mathrm{I}_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}'_m(\gamma R) + \varphi\cdot \mathrm{I}'_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}_m(\gamma R)}, \quad (18)$$

$$b_m = A(p)\frac{k\cdot \mathrm{I}_m(\varphi R)\cdot J'_m(kR) - \varphi\cdot J_m(kR)\cdot \mathrm{I}'_m(\varphi R)}{-\gamma\cdot \mathrm{I}_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}'_m(\gamma R) + \varphi\cdot \mathrm{I}'_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}_m(\gamma R)} \quad (19)$$

Здесь $A(p) = \frac{E_0\omega_p^2(-i)^m}{(p^2+\omega_p^2+\omega^2)(p-i\omega)}$

Решение задачи для случая перпендикулярной поляризации строится аналогично. Преобразованное поле внутри неоднородности находим из уравнения (7) с начальными условиями (8), снаружи поле является решением волнового уравнения в вакууме.

$$L(p,\rho,\phi) = H_0\frac{p^2+\omega_p^2+i\omega p}{p(p^2+\omega_p^2+\omega^2)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m\cdot \mathrm{I}_m(\varphi\rho)\cdot e^{im\phi},\ (\rho < R) \quad (20)$$

$$L(p,\rho,\phi) = \frac{H_0}{p-i\omega}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m\cdot J_m(k\rho)\cdot e^{im\phi} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m\cdot \mathrm{K}_m(\gamma\rho)\cdot e^{im\phi}\ (\rho > R) \quad (21)$$

Неизвестные коэффициенты c_m и d_m находим из граничных условий:

$$c_m = \frac{\gamma J'_m(kR)K_m(\gamma R) + kJ_m(kR)K'_m(\gamma R)}{-\gamma I'_m(\varphi R)K_m(\gamma R) + \varphi I_m(\varphi R)K'_m(\gamma R)}\frac{\varphi}{\gamma}B(p)$$

$$d_m = \frac{\varphi J'_m(kR)I_m(\varphi R) + kJ_m(kR)I'_m(\varphi R)}{-\gamma I'_m(\varphi R)K_m(\gamma R) + \varphi I_m(\varphi R)K'_m(\gamma R)}B(p)$$

Здесь $B(p) = H_0\frac{i\cdot\omega_p^2}{(p-i\omega)(p^2+\omega_p^2+\omega^2)}(-i)^m$

Обратное преобразование во временную область находим по формуле Меллина $W(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} L(p)e^{pt}dp$.

Выражения (16) – (17), (20) – (21) имеют простые полюса в точках $p = \pm i\sqrt{\omega^2+\omega_p^2}$, $p = i\omega$, а также в нулях знаменателя

$$-\gamma\cdot \mathrm{I}_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}'_m(\gamma R) + \varphi\cdot \mathrm{I}'_m(\varphi R)\cdot \mathrm{K}_m(\gamma R)$$

для случая параллельной поляризации или

$$-\gamma I'_m(\varphi R)K_m(\gamma R) + \varphi I_m(\varphi R)K'_m(\gamma R)$$

для перпендикулярной поляризации. Нули знаменателей определяют собственные частоты плазменного цилиндра. Точки $p = 0$ и $p = \pm i\omega_p$ являются точками ветвления.

При обращении во временную область соответствующих слагаемых необходимо учитывать временное запаздывание, что должно быть выполнено с помощью использования асимптотических представлений функций Бесселя для больших значений аргумента:
Получаем такие представления

$$pa_m I_m(\varphi\rho) \approx \frac{E_0}{2}\frac{\omega_p^2}{p^2}(-i)^m J_m(kR)\sqrt{\frac{R}{\rho}}e^{\frac{p}{c}(\rho-R)},\ pb_m K_m(\gamma\rho) \approx \frac{E_0}{2}\frac{\omega_p^2}{p^2}(-i)^m J_m(kR)\sqrt{\frac{R}{\rho}}e^{\frac{p}{c}(R-\rho)}, \quad (22)$$

для случая параллельной поляризации и

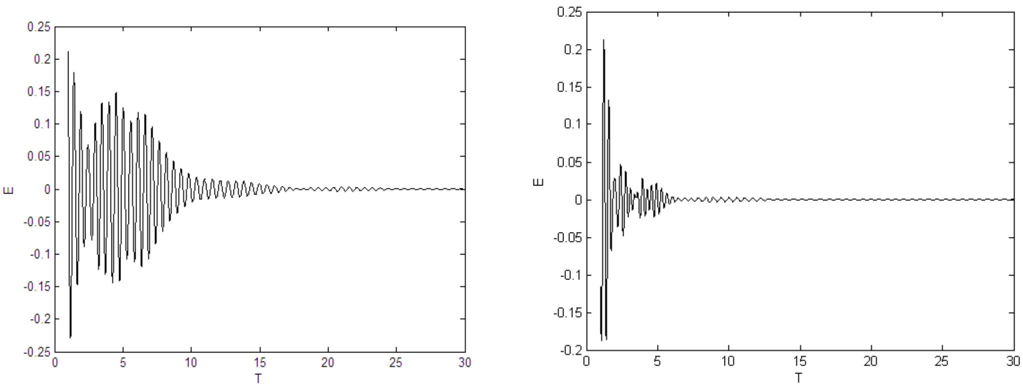
$$pc_m I_m(\varphi\rho) \approx \frac{H_0}{2}\frac{\omega_p^2}{p^2}(-i)^{m+1} J'_m(kR)\sqrt{\frac{R}{\rho}}e^{\frac{p}{c}(\rho-R)},\ pd_m K_m(\gamma\rho) \approx \frac{H_0}{2}\frac{\omega_p^2}{p^2}(-i)^{m+1} J'_m(kR)\sqrt{\frac{R}{\rho}}e^{\frac{p}{c}(R-\rho)} \quad (23)$$

для случая перпендикулярной поляризации.

Особенности переходного процесса

Рассмотрим детали переходного процесса на примере параллельной поляризации. После мгновенного образования плазмы в нестационарной области поле описывается первым слагаемым в (16), при этом преобразуется частота падающей волны при сохранении пространственной структуры поля. Во внешнем пространстве присутствует только первичное поле (первое слагаемое в 17). Из формулы (22) следует, что после образования плазмы от нестационарной границы отходят две нестационарные цилиндрические волны, распространяющиеся в противоположные стороны от границы со скоростью света. Они описываются вторыми слагаемыми в (16) и (17). После прохождения волновых фронтов от границы, полное поле описывается суммой вычетов во всех особых точках и интегралами вдоль разрезов, которые проходят вдоль отрицательной полуоси $\mathrm{Re}(p)$ комплексной плоскости и вдоль полуосей $\pm\mathrm{Im}(p)$, начиная от точек ветвления $p = \pm i\omega_p$. Вычеты в полюсах $p = \pm i\sqrt{\omega^2 + \omega_p^2}$ для полного поля равны нулю, т.е. в установившемся режиме компоненты с такими частотами отсутствуют, а вычет на частоте источника совпадает с выражениями для поля рассеяния плоской волны на стационарном плазменном цилиндре. Все собственные частоты цилиндра являются комплексными величинами, мнимая часть которых определяет скорость затухания колебаний.

На Рис. 1 (а, б) представлена нестационарная составляющая полного поля (из полного поля извлекли компоненту, соответствующую вычету на частоте падающей волны) в зависимости от нормированного времени ($T = tc/R$). Точка наблюдения расположена внутри на расстоянии 0,5 (Рис. 1. а) и 0,7 (Рис. 1. б) от центра, $\phi = 0$. Длина волны падающего поля равна $0{,}2\pi$ радиуса цилиндра. Коэффициент нормировки $\mathrm{N} = \mathrm{E}_0\, c/\rho_0$.

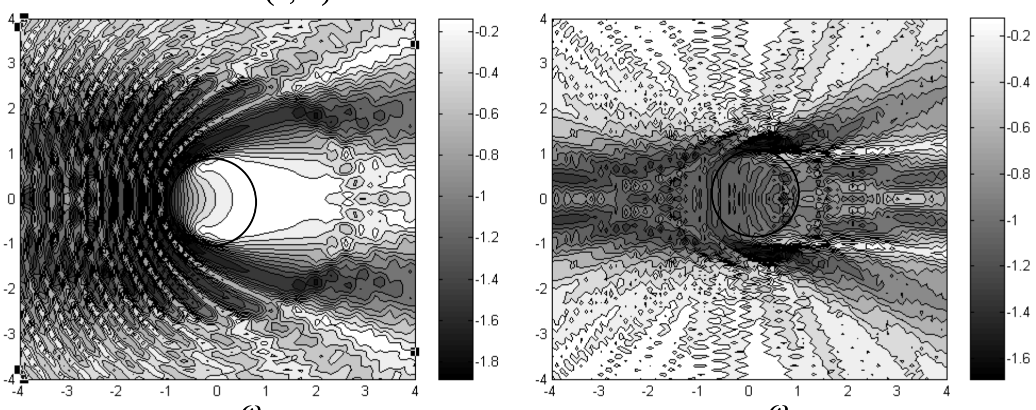


а. $\dfrac{\omega_p}{\omega_0} = 0{,}8, \quad r = 0{,}5$

б. $\dfrac{\omega_p}{\omega_0} = 0{,}6, \quad r = 0{,}7$

Рис. 1

Для случая параллельной поляризации переходной процесс проходит следующим образом, как показано на Рис. 2 (а, б):

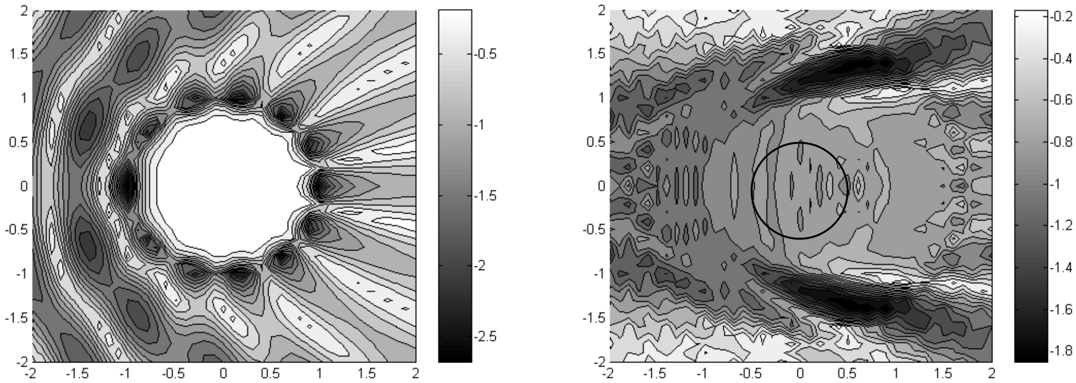


а. $\dfrac{\omega_p}{\omega_0} = 1$

б. $\dfrac{\omega_p}{\omega_0} = 0{,}8$

Рис. 2

Для случая перпендикулярной поляризации переходный процесс проходит аналогично (Рис. 3 (а, б)):



а. $\frac{\omega_p}{\omega_0} = 2$ б. $\frac{\omega_p}{\omega_0} = 0{,}8$

Рис. 3

Установившийся режим

В отличие от безграничного случая, когда изменение свойств среды изменяет частоту, но сохраняет пространственную структуру поля, в случае ограниченности нестационарной плазмы поле претерпевает и временные, и пространственные изменения. В установившемся режиме вблизи цилиндрической неоднородности совпадает с полем рассеяния плоской волны на стационарном плазменном цилиндре (в дальней зоне перестройка поля продолжается бесконечно во времени).

Выводы

На основе аналитического решения задачи исследована эволюция поля при падении плоской волны на нестационарный круговой цилиндр, в котором в нулевой момент времени образуется плазма. Рассмотрены волны как параллельной, так и перпендикулярной поляризации. Показано, что, в отличие от безграничной нестационарной среды, изменение свойств в ограниченной области приводит к изменению пространственной структуры поля и восстановлении частоты поля к значению частоты источника. Обсуждаются возможности прохождения волны через плазменную область и образования области тени за объектом, а также установлено возбуждение поверхностных плазмонов.

Список литературы:

1. *Dawson J. M., and Mori W. B*. Frequency up-conversion of electromagnetic radiation with use of the overdense plasma // Phys. Rev. Lett. – 1988. – V. – 61, № 3. – P.337 – 340. 2. *Bakunov M. I. and Maslov A. V*. Frequency upshifting of electromagnetic radiation via Oblique Incidence on an Ionization Front // IEEE Trans. on a plasma Science. –1999. – V. –27, № 3. – P.655 – 663. 3. *Lampe M. and Ott E.* Interaction of electromagnetic waves with a moving ionization front // Phys. Fluids. –1978. –V. – 21(1). – P. 42 – 54. 4. *Нерух А. Г., Хижняк Н. А*. Энергетические соотношения при взаимодействии электромагнитных волн с движущимся плазменным сгустком в волноводе // Изв. вузов. Радиофизика. – 1983. – Т. 26, № 12. – С. 1601 – 1603. 5. *D. Kalluri*. Electromagnetics of complex media. CRC Press, pp. 291, 1999. 6. *Nerukh A. G., Scherbatko I. V., Marciniak M.* Electromagnetics of modulated media with applications to photonics. – Warsaw 2001, – 265 p.

Харьковский национальный университет
радиоэлектроники

Поступила в редколлегию

УДК 621.385.6

Моделирование преобразования электромагнитного поля в результате образования цилиндрической плазменной неоднородности / Н.П. Стогний, Н.К. Сахненко // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2010. Вып. 00. С. 00 — 00.

В данной работе теоретически исследуется двумерная задача преобразования электромагнитного поля в результате образования цилиндрического плазменного сгустка. Решение задачи получено аналитически в виде преобразования Лапласа. Обращение во временную область позволило оценить длительность переходного процесса и выявить особенности установившегося режима.

Показано, что изменение свойств в ограниченной области приводит к изменению пространственной структуры поля и восстановлении частоты поля к значению частоты источника. Обсуждаются возможности прохождения волны через плазменную область и образования области тени за объектом, а также установлено возбуждение поверхностных плазмонов.

Табл. 0. Ил. 3. Библиогр.: 6 назв.

УДК 621.385.6

Моделювання перетворення електромагнітного поля в результаті утворення циліндричної плазменної неоднорідності/ Н.П. Стогній, Н.К. Сахненко // Радіотехніка: Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2010. Вип. 00. С. 00 — 00.

В даній роботі теоретично досліджується двохвимірна задача перетворення електромагнітного поля в результаті утворення циліндричного плазменного згустку. Розв'язування задачі отримано аналітично у вигляді перетворення Лапласа. Перетворення в часову область дозволило оцінити тривалість перехідного процесу й виявити особливості режиму, який встановився.

Показано, що зміна властивостей в обмеженій області приводить до зміни просторової структури поля та відновлення частоти поля до значення частоти джерела. Обговорюються можливості проходу хвилі через плазменну область і утворення області з тінню за об'єктом, а також встановлено збудження поверхневих плазмонів.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр.: 6 назв.

UDC 621.385.6

Modeling of electromagnetic field transformation due to creation of plasma inhomogeneity / N.P. Stogniy, N.K. Sakhnenko // Radiotekhnika: All-Urk. Sci. Interdep. Mag. 2010. N 00. P. 00—00.

In this paper a 2D problem of electromagnetic field transformation due to creation of cylindrical plasma inhomogeneity is theoretically investigated. Solution is obtained analytically in the Laplace transform domain. Inversion in time domain has allowed us to estimate the duration of transient period and analyzed the features of the steady-state regime.

It is revealed that time varying of medium properties in bounded object leads to the transformation of the field pattern and recovery of transformed field frequency to the frequency of initial wave. Possibilities of transmission of the wave through the plasma object and formation of shadow region behind it are discussed. Excitation of surface plasmons has been shown.

0 tab. 3 fig. Ref.: 6 items.