Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Блишун А.П., Сидоров М.В.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТАЦИОНАРНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМ СООРУЖЕНИЕМ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМУ ГРУНТЕ

Вісник Запорізького національного університету.
Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 2. – С. 5 – 12.

УДК 519.63 : 532.5

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТАЦИОНАРНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМ СООРУЖЕНИЕМ В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

Блишун А.П., аспирант, Сидоров М.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Рассматривается задача расчета плоского стационарного фильтрационного течения жидкости под гидротехническим сооружением в кусочно-однородном грунте. На основании метода R-функций построена полная структура решения соответствующей краевой задачи, точно удовлетворяющая краевым условиям на границе области фильтрации, а также удовлетворяющая условиям сопряжения на линии раздела грунтов с различными коэффициентами фильтрации. Для аппроксимации неопределенной компоненты структуры решения предложено использовать энергетический метод (метода Ритца).

Ключевые слова: фильтрационное течение, кусочно-однородный грунт, функция тока, метод R-функций, метод Ритца.

Блішун О.П., Сидоров М.В. МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ СТАЦІОНАРНОЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ТЕЧІЇ ПІД ГІДРОТЕХНІЧНОЮ СПОРУДОЮ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ҐРУНТІ / Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

Розглянуто задачу розрахунку плоскої стаціонарної фільтраційної течії рідини під гідротехнічною спорудою у кусково-однорідному ґрунті. Відповідно до методу R-функцій побудовано повну структуру розв’язку відповідної крайової задачі, яка точно задовольняє крайові умови на межі області фільтрації, а також задовольняє умови спряження на лінії розділу ґрунтів з різними коефіцієнтами фільтрації. Для апроксимації невизначеної компоненти структури розв’язку запропоновано використати енергетичний метод (метод Рітца).

Ключові слова: фільтраційна течія, кусково-однорідний ґрунт, функція течії, метод R-функцій, метод Рітца.

Blishun O.P., Sidorov M.V. A NUMERICAL METHOD FOR ANALYSIS OF STATIC FILTRATION FLOW UNDER A HYDRAULIC STRUCTURE IN PARTIALLY HOMOGENEOUS SOIL / Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

The problem of calculating flat static filtration flow of liquid under a hydraulic structure in partially homogeneous soil is considered. A complete structure of a solution is obtained for a corresponding boundary problem basing on the method of R-functions. The complete structure of the solution exactly satisfies the boundary conditions on a boundary of the filtration area and satisfies the conjugation conditions on a diving line of soil with various filtration coefficients. For approximation of an undefined component of the structure of the solution the energetic method (Ritz’s method) is offered.

Keywords: filtration flow, partially homogeneous soil, stream function, the method of R-functions, Ritz’s method.

ВВЕДЕНИЕ

Усложняющаяся экологическая ситуация приводит к тому, что часто возникает сильное и устойчивое подтопление сельскохозяйственных и городских ландшафтов. В связи с этим проблема математического моделирования и разработки новых эффективных методов численного анализа течений в пористых средах (грунте) под гидротехническими сооружениями является актуальной научной проблемой.

Для решения задач математической физики, описывающих фильтрационные течения, используются различные точные и приближенные методы: разделения переменных, методы теории функций комплексного переменного, метод мажорантных областей, метод суммарных представлений, метод фиктивных областей, метод конечных элементов и др. Классические результаты по этим методам отражены в монографиях [6 – 9, 11].

Каждый из перечисленных методов обладает рядом достоинств. К основным недостаткам точных методов следует отнести ограниченный круг областей, к которым они могут быть применены, а основным недостатком существующих приближенных методов является то, что при их реализации обычно от рассмотрения геометрически сложных участков границы области фильтрации переходят к более простым, например, составленным из отрезков прямых.

Наиболее точно и полно учесть геометрическую и аналитическую информацию, содержащуюся в краевой задаче, позволяет метод R-функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева [12]. Для численного решения задач фильтрации метод *R*-функций был применен в [1 – 5, 13]. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в этих работах.

Цель настоящей работы является разработка на основе методов *R*-функций и Ритца новых средств математического моделирования и численного анализа фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями в кусочно-однородном грунте. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: построить структуру решения смешанной краевой задачи теории фильтрации, удовлетворяющую условиям сопряжения на границе грунтов с различными коэффициентами фильтрации; разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты построенной структуры на основании метода Ритца.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной) в кусочно-однородном грунте. На рис. 1 приведена общая схема фильтрации. Здесь $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \partial\Omega_{12}$ – область фильтрации, $\partial\Omega_{12}$ – линия раздела областей Ω_1 и Ω_2, $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$ – проницаемые участки границы области фильтрации, $\partial\Omega_2$ – граница основания плотины (флютбета), $\partial\Omega_4$ – граница водонепроницаемой области (водоупора), $\partial\Omega_5$ – шпунт.

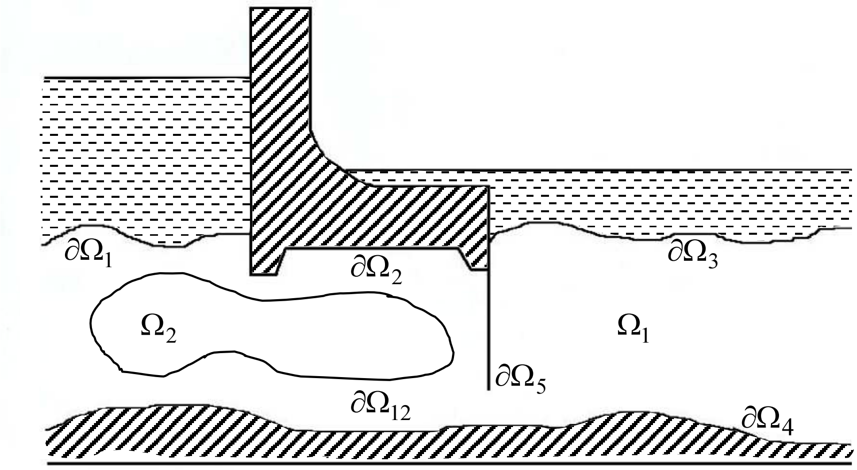

Рисунок 1 – Схема фильтрации

Пусть плоская стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в области Ω описывается линейным законом Дарси [11]:

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0\,, \tag{1}$$

$$\vec{v} = -\kappa\nabla h \quad \text{в} \quad \Omega\,, \tag{2}$$

где $\vec{v} = (v_x, v_y)$ − скорость фильтрации, κ − коэффициент фильтрации, $h = y + \dfrac{p}{\rho g}$ − пьезометрический напор, p − давление, ρ − плотность жидкости, g − ускорение силы тяжести.

Из (1), (2) следует, что напор является решением уравнения:

$$-\mathrm{div}\left(\kappa\nabla h\right) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa\frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa\frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\,. \tag{3}$$

Однако для численного анализа фильтрационного течения удобнее от решения краевой задачи для уравнения (3) перейти к решению краевой задачи для функции тока $\psi(x,\, y)$. Функция тока $\psi(x,\, y)$ плоского течения вводится соотношениями

$$\nu_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,, \quad \nu_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}\,. \tag{4}$$

Как легко увидеть, уравнение неразрывности (1) при этом обращается в тождество. Тогда из (2) следует, что

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Исключив перекрестным дифференцированием из равенств (5) напор h, получим для функции тока ψ уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \text{ в } \Omega. \tag{6}$$

Дополним уравнение (6) краевыми условиями.

Грунт, заполняющий область фильтрации Ω, будем предполагать кусочно-однородным, а именно, состоящим из двух частей: Ω_1 с коэффициентами фильтрации κ_1 и Ω_2 с коэффициентами фильтрации κ_2. Тогда функции тока

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \psi_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ \psi_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

а коэффициент фильтрации

$$\kappa(x,y) = \begin{cases} \kappa_1, & (x,y) \in \Omega_1, \\ \kappa_2, & (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Пусть линия $\partial\Omega_{12}$ является линией раздела двух грунтов. Тогда на участке $\partial\Omega_{12}$ ставятся условия сопряжения [8]

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_{12}} = \psi_2\big|_{\partial\Omega_{12}}, \quad \kappa_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_{12}} = \kappa_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{7}$$

где $\vec{n}$ – нормаль к $\partial\Omega_{12}$.

На проницаемых участках границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_3$ напор должен быть постоянным, что приводит к тому, что на $\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_3$ функция тока должна удовлетворять однородному условию Неймана:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_3} = 0, \tag{8}$$

где $\vec{n}$ – внешняя к $\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_3$ нормаль.

Граница основания плотины $\partial\Omega_2$, шпунт $\partial\Omega_5$ и граница водоупора $\partial\Omega_4$ водонепроницаемы, поэтому нормальная составляющая скорости фильтрации $\vec{v}$ на этих участках границы равна нулю, т.е. $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_5$, $\partial\Omega_4$ является линиями уровня функции тока. Это приводит к тому, что на $\partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_5$ и $\partial\Omega_4$ функция тока должна удовлетворять условиям Дирихле:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_2 \bigcup \partial\Omega_5} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_4} = Q, \tag{9}$$

где величина Q задаёт общий расход жидкости в области фильтрации.

Итак, для определения функции тока $\psi(x,y)$ (а значит, и поля скоростей фильтрационного течения – см. (4)) нужно в областях Ω найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (7) – (9).

Считаем, что все кривые в области фильтрации являются гладкими или кусочно-гладкими.

Основные трудности, возникающие при численном решении задачи (6) − (9), – это необходимость учесть в вычислительном алгоритме условие сопряжения (7).

2. ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ

Для решения краевой задачи (6) – (9) воспользуемся структурно-вариационным методом акад. НАН Украины В.Л. Рвачёва [12]. Построим структуру решения краевой задачи (6) – (9), т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям (7) – (9).

Пусть функции $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, такие, что:

1) $\omega_i(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_i$;

2) $\omega_i(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega_i$;

3) $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial\vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega_i$;

где $\vec{n}$ – нормаль, внешняя к $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{5} \partial\Omega_i$; $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$.

Если граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых, каждая из которых допускает задание с помощью элементарной функции, то функции $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, с указанными свойствами могут быть построены с помощью метода R-функций [12] и являются также функциями элементарными.

Используя формулы «склейки» [12], построим функцию

$$f = \frac{Q\omega_2 \wedge_0 \omega_5}{\omega_4 + \omega_2 \wedge_0 \omega_5}, \qquad (10)$$

которая удовлетворяет условиям $f\big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_5} = 0$, $f\big|_{\partial\Omega_4} = Q$. Здесь $\wedge_0$ – знак R_0-конъюнкции [12]:

$$x_1 \wedge_0 x_2 := x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Тогда краевые условия (9) можно записать в виде

$$(\psi - f)\big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5} = 0. \qquad (11)$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор $D_1^{(1,\,3)}$, определяемый равенством

$$D_1^{(1,\,3)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega_1 \wedge_0 \omega_3\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\omega_1 \wedge_0 \omega_3\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Известно [12], что определенный так оператор $D_1^{(1,\,3)}$ обладает свойством

$$-D_1^{(1,\,3)}\psi\Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3},$$

где $\vec{n}$ – внешняя к $\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_3$ нормаль.

Тогда краевое условие (8) можно записать так:

$$D_1^{(1,\,3)}\psi\Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \qquad (12)$$

Пучок функций, удовлетворяющий условию (11), очевидно, имеет вид

$$\psi = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi + f, \qquad (13)$$

где Φ – неопределенная компонента.

Представим функцию Φ в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 \qquad (14)$$

и выберем Ψ_1 так, чтобы удовлетворялось и условие (12). Из условия (12) следует, что

$$D_1^{(1,\,3)}\psi = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2\,, \tag{15}$$

где Ψ_2 – некоторая ограниченная функция. Подставим (14) в (13):

$$\psi = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 + f \tag{16}$$

Подставляя формулу (16) в (15) и учитывая, что $D_1^{(1,\,3)}(uv) = uD_1^{(1,\,3)}v + vD_1^{(1,\,3)}u$, получаем

$$D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1\right) + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1 D_1^{(1,\,3)}(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) +$$

$$+\, \omega_1 \wedge_0 \omega_3 D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1\right) + D_1^{(1,\,3)} f = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2\,. \tag{17}$$

Учитывая, что

$$D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_1 \wedge_0 \omega_3\right) = 1 + O\left(\omega_1 \wedge_0 \omega_3\right) = 1 + \chi\omega_1 \wedge_0 \omega_3$$

и прибавляем к обеим частям равенства (17) $\omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1$, получим

$$D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1\right) + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \cdot \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 +$$

$$+\, \omega_1 \wedge_0 \omega_3 D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1\right) + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 + D_1^{(1,\,3)} f = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1\,,$$

или

$$\left(\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5\right)\Psi_1 = -D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1\right) -$$

$$-\omega_1 \wedge_0 \omega_3 \left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 - D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1\right) + \Psi_1 + \Psi_2\right) - D_1^{(1,\,3)} f\,. \tag{18}$$

Обозначим

$$\Phi_2 = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 - D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1\right) + \Psi_1 + \Psi_2\,.$$

Тогда из (18) получим, что

$$\Psi_1 = -\frac{1}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5}\left[D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1\right) + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Phi_2 + D_1^{(1,\,3)} f\right]. \tag{19}$$

Подставим (19) в (16), получим

$$\Psi_1 = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1 -$$

$$-\frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5}\left[D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1\right) + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Phi_2 + D_1^{(1,\,3)} f\right] + f\,.$$

Положим $\Phi_2 \equiv 0$, переобозначим Φ_1 через Φ и обозначим

$$\varphi = f - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} D_1^{(1,\,3)} f\,,$$

где f имеет вид (10).

Тогда структура решения задачи (6) – (9), удовлетворяющая условию (8), (9), имеет вид

$$\psi = B(\Phi) = \varphi + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi\right). \tag{20}$$

Для того чтобы удовлетворить условиям сопряжения (7) воспользуемся следующим подходом [14]. Функцию тока $\psi(x, y)$ будем искать в виде

$$
\psi(x,y)=\begin{cases}\psi_1(x,y)=B(\Phi), & (x,y)\in\Omega_1;\\ \psi_2(x,y)=B(\Phi)-A\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x,y)\in\Omega_1,\end{cases} \tag{21}
$$

где $B(\Phi)$ имеет вид (20), $\omega_{1-2}=0$ – нормализованное уравнение границы $\partial\Omega_{12}$ раздела двух грунтов, причем $\omega_{1-2}>0$ в области Ω_2; а оператор $D_1^{(1-2)}$ определяется равенством

$$
D_1^{(1-2)}=\frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}
$$

и обладает свойством

$$
D_1^{(1-2)}u\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}},
$$

где $\vec{n}$ – нормаль к $\partial\Omega_{12}$, направленная внутрь Ω_2. Тогда

$$
D_1^{(1-2)}\omega_{1-2}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=1.
$$

Заметим, что функция вида (21) удовлетворяет на $\partial\Omega_{12}$ первому из условий сопряжения (7) при любом выборе константы A. Тогда постоянную A следует выбрать так, чтобы удовлетворять второму из условий сопряжения (7). Имеем

$$
\kappa_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\kappa_1D_1^{(1-2)}\psi_1\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\kappa_1D_1^{(1-2)}(B(\Phi))\Big|_{\partial\Omega_{12}},
$$

$$
\kappa_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\vec{n}}\Big|_{\partial\Omega_{12}}=\kappa_2D_1^{(1-2)}\psi_2\Big|_{\partial\Omega_{12}}=
$$

$$
=\kappa_2\left(D_1^{(1-2)}(B(\Phi))-AD_1^{(1-2)}\omega_{12}\cdot D_1^{(1-2)}(B(\Phi))-A\omega_{12}D_1^{(1-2)}\left(D_1^{(1-2)}(B(\Phi))\right)\right)\Big|_{\partial\Omega_{12}}=
$$

$$
=\kappa_2(1-A)D_1^{(1-2)}(B(\Phi))\Big|_{\partial\Omega_{12}}.
$$

Тогда

$$
\kappa_1=\kappa_2(1-A),
$$

откуда

$$
A=1-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}=\frac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}.
$$

Значит,

$$
\psi(x,y)=\begin{cases}B(\Phi), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B(\Phi)-\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x,y)\in\Omega_1.\end{cases} \tag{22}
$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема. Структура решения краевой задачи (6) – (9), точно удовлетворяющая условиям (7) – (9), имеет вид (22), где $B(\Phi)$ определяется формулой (20).

3. ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА (МЕТОДА РИТЦА)

Обозначим

$$\phi=\begin{cases}\varphi, & (x,y)\in\Omega_1;\\ \varphi-\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}\omega_{12}D_1^{(1-2)}\varphi, & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

В задаче (6) – (9) сделаем замену

$$\psi(x,y)=\phi(x,y)+u(x,y),$$

где $u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2,\end{cases}$ – новая неизвестная функция. Это приводит к задаче с однородными краевыми условиями

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=F \text{ в } \Omega, \tag{23}$$

$$u\big|_{\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_4\cup\partial\Omega_5}=0, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_3}=0, \tag{25}$$

$$u_1\big|_{\partial\Omega_{12}}=u_2\big|_{\partial\Omega_{12}},\quad \kappa_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}=\kappa_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega_{12}}, \tag{26}$$

где обозначено

$$F=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\in L_2(\Omega).$$

Введём в рассмотрение оператор краевой задачи (23) – (26), действующий в $L_2(\Omega)$ по правилу

$$Au\equiv-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{27}$$

с областью определения $D_A\subset L_2(\Omega)$, состоящей из тех функций $C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, которые удовлетворяют краевым условиям (24) – (26).

Можно доказать, что оператор A положительно определён. Значит, функция u может быть найдена как минимум функционала $(Au,u)-2(u,F)$ [10], а структуру решения краевой задачи (23) – (26) можно взять в виде

$$u=\begin{cases}B_1(\Phi), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B_1(\Phi)-\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}\omega_{12}D_1^{(1-2)}(B_1(\Phi)), & (x,y)\in\Omega_2;\end{cases}$$

где $B_1(\Phi)=\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\Phi-\dfrac{\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\cdot\omega_1\wedge_0\omega_3}{\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5+\omega_1\wedge_0\omega_3}D_1^{(1,3)}\left(\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\Phi\right)$ (см. формулу (20)), Φ – неопределённая компонента.

Замкнув множество D_A в метрике, порожденной нормой

$$\|u\|_{H_A}^2=\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{\kappa}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy,$$

получим энергетическое пространство H_A со скалярным произведением

$$[u,v]=\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Неопределённую компоненту Φ представим в виде

$$\Phi\approx\Phi_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\tau_i\,,$$

где $\{\tau_i\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (тригонометрические или степенные полиномы, сплайны и пр.). Тогда система функций $\{\varphi_i\}$, где

$$\varphi_i=\begin{cases}B_1(\tau_i), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B_1(\tau_i)-\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}\omega_{12}D_1^{(1-2)}(B_1(\tau_i)), & (x,y)\in\Omega_2;\end{cases}$$

$$B_1(\tau_i)=\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\tau_i-\frac{\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\cdot\omega_1\wedge_0\omega_3}{\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5+\omega_1\wedge_0\omega_3}D_1^{(1,\,3)}\left(\omega_2\wedge_0\omega_4\wedge_0\omega_5\tau_i\right),$$

является координатной, т.е.

а) $\varphi_i\in H_A$, $i=1,2,\dots$;

б) при любом n функции $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ линейно независимы;

в) система $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots$ полна в H_A.

Согласно методу Ритца для коэффициентов $c_1,\dots,c_n$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i,\varphi_j]c_i=(F,\varphi_j)\,,\ j=1,\dots,n\,.$$

Тем самым мы построим приближенное решение u_n задачи (23) – (26):

$$u_n=\begin{cases}B_1(\Phi_n), & (x,y)\in\Omega_1;\\ B_1(\Phi_n)-\dfrac{\kappa_2-\kappa_1}{\kappa_2}\omega_{12}D_1^{(1-2)}(B_1(\Phi_n)), & (x,y)\in\Omega_2.\end{cases}$$

Сходимость соответствующей последовательности приближенных решений $\psi_n=\phi+u_n$ задачи (6) – (9) к точному решению (вообще говоря, обобщенному) следует из теорем о сходимости метода Ритца [10].

ВЫВОДЫ

В работе впервые для численного анализа задачи фильтрации под гидротехническим сооружением в кусочно-однородном грунте применены методы *R*-функций и Ритца. Построена структура решения соответствующей краевой задачи, которая точно удовлетворяет краевым условиям на границе области фильтрации и условиям сопряжения на границе разделе грунтов с различными коэффициентами фильтрации. Разработанный численный метод может быть применен в инженерной практике при проектировании гидросооружений. Это и определяет научную новизну и практическую значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блишун А.П. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода *R*-функций / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // Радиоэлектроника и информатика. – 2010. – № 2. – С. 40 – 46.

2. Блишун А.П. Математическое моделирование стационарных фильтрационных течений со свободной границей методом *R*-функций / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // АСУ и приборы автоматики. – 2010. – Вып. 150. – С. 18 – 27.

3. Блишун А.П. Численный анализ стационарных фильтрационных течений со свободной границей структурно-вариационным методом / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // АСУ и приборы автоматики. – 2010. – Вып. 151. – С. 20 – 27.

4. Блишун А.П. Метод *R*-функций в задачах стационарной фильтрации со свободной границей / А.П. Блишун // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2011. – № 2. – С. 29 – 37.

5. Блишун А.П. Применение метода *R*-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями / А.П. Блишун, М.В. Сидоров, И.Г. Яловега // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 00 – 00.

6. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике / П.Н. Вабищевич. – М. : Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.

7. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

8. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, Н.В. Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1977. – 288 с.

9. Ляшко Н.И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / Н.И. Ляшко, Н.М. Великоиваненко. – К. : Наук. думка, 1973. – 264 с.

10. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1970. – 511 с.

11. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664 с.

12. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения / В.Л. Рвачев. – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.

13. Сидоров М.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений / М.В. Сидоров, А.В. Стороженко // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4. – С. 58 – 61.

14. Темников А.В. Современные приближенные аналитические методы решения задач теплообмена / А.В. Темников, А.П. Слесаренко. – Самара: Изд-во Самар. политехн. ин-та, 1991. – 92 с.