

А. М. ТИТАРЕНКО

### АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Изучение колебательных процессов при параметрическом возбуждении представляет большой интерес для современной электротехники, радиотехники и радиофизики в связи с широким применением нелинейных параметрических систем в устройствах усиления, генерирования, преобразования сигналов, в контрольно-измерительных комплексах.

В работе [1] рассмотрена колебательная система, описываемая уравнением Матье с нелинейной правой частью. При исследовании нелинейных параметрических систем с большой глубиной модуляции энергоемного параметра (индуктивности или емкости) необходимо учитывать большое число гармоник при модуляции параметра, т. е. рассматривать уравнение Хилла с нелинейной правой частью

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \left[ p^2 + \sum_{m=1}^N (-1)^m k_m \varepsilon^m \cos(m\tau) \right] y = k\varepsilon y^3. \quad (1)$$

В уравнении (1)  $\tau = \omega_n t$ ,  $\omega_n$  — частота накачки,  $\varepsilon$  — малый параметр,  $k$  — коэффициент, характеризующий степень нелинейности и тип системы,  $p = \omega/2\omega_n$  — регулируемая величина, пропорциональная собственной частоте  $\omega$ ,  $k_m$  — коэффициенты при гармонических составляющих,  $N$  — число (конечное или бесконечное) осциллирующих членов. Частота изменения параметра (например, нелинейной индуктивности или емкости) предполагается постоянной. Переменная  $y$  может обозначать, в частности, напряжение на обмотках резонансного контура нелинейной системы.

Будем искать решение уравнения (1) в виде [2]

$$y = a \cos(p\tau - \varphi) + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \dots + \varepsilon^n U_n \quad (2)$$

где  $a = a(\tau)$ ,  $\varphi = \varphi(\tau)$  — по предположению, медленно меняющиеся функции  $\tau$ .

Подставив (2) в (1), получим

$$\begin{aligned}
 & \left[ 2pa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \cos(p\tau - \varphi) + \left( -2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} \right) \times \\
 & \times \sin(p\tau - \varphi) + \varepsilon \left( \frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + p^2 U_1 \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 U_2}{d\tau^2} + p^2 U_2 \right) + \\
 & + \varepsilon^3 \left( \frac{d^2 U_3}{d\tau^2} + p^2 U_3 \right) + \dots + \varepsilon^n \left( \frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + p^2 U_n \right) = \\
 & = \varepsilon \frac{k_1 a}{2} \cos[(p+1)\tau - \varphi] + \varepsilon \frac{k_1 a}{2} \cos[(p-1)\tau - \varphi] + \\
 & + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 \cos(p\tau - \varphi) + \varepsilon \frac{1}{4} ka^3 \cos[3(p\tau - \varphi)] + \\
 & + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos[2(p\tau - \varphi)] - \\
 & - \varepsilon^2 \frac{k_2 a}{2} \cos[(p+2)\tau - \varphi] - \varepsilon^2 \frac{k_2 a}{2} \cos[(p-2)\tau - \varphi] + \varepsilon^2 k_1 U_1 \cos \tau + \\
 & + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 + \varepsilon^3 3ka U_1^2 \cos(p\tau - \varphi) + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 \cos[2(p\tau - \varphi)] + \\
 & + \varepsilon^3 \frac{k_3 a}{2} \cos[(p-3)\tau - \varphi] + \varepsilon^3 \frac{k_3 a}{2} \cos[(p+3)\tau - \varphi] + \\
 & + k_1 \varepsilon^3 U_2 \cos \tau - \varepsilon^3 k_2 U_1 \cos 2\tau + \varepsilon^4 k U_1^3 + \varepsilon^4 \frac{3}{2} ka^2 U_3 + \\
 & + \varepsilon^4 \frac{3}{2} ka^2 U_2 \cos[2(p\tau - \varphi)] + \varepsilon^4 6ka U_1 U_2 \cos(p\tau - \varphi) - \\
 & - \varepsilon^4 \frac{k_4 a}{2} \cos[(p+4)\tau - \varphi] - \varepsilon^4 \frac{k_4 a}{2} \cos[(p-4)\tau - \varphi] + \\
 & + \varepsilon^4 k_1 U_3 \cos \tau - \varepsilon^4 k_2 U_2 \cos 2\tau + \varepsilon^4 k_3 U_1 \cos 3\tau + \dots \quad (3)
 \end{aligned}$$

В работе [1] для первых трех зон параметрического возбуждения уравнения Матье с кубической правой частью получены инварианты движения, связывающие амплитуду и фазу колебаний. Получим инварианты движения уравнения (1) для первых четырех зон в случае, когда  $N=4$ . При этом для анализа колебаний в первой зоне достаточно первого приближения, во второй зоне — второго и т. д. Из (3) для определения  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  имеем

системы нелинейных дифференциальных уравнений вблизи резонансных частот  $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$  соответственно:

$$2pa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \varepsilon \frac{k_1 a}{2} \cos \psi_1;$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\varepsilon \frac{k_1 a}{2} \sin \psi_1; \quad (4)$$

$$2pa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \varepsilon^2 \frac{k_1^2 a}{2(4p^2 - 1)} -$$

$$- \varepsilon^3 \frac{3k^2 a^5}{128p^2} + \varepsilon^2 a \left[ \frac{k_1^2}{4(2p-1)} - \frac{k_2}{2} \right] \cos \psi_2;$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\varepsilon^2 a \left[ \frac{k_1^2}{4(2p-1)} - \frac{k_2}{2} \right] \sin \psi_2; \quad (5)$$

$$2pa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \varepsilon^2 \frac{k_1^2 a}{2(4p^2 - 1)} -$$

$$- \varepsilon^2 \frac{3k^2 a^5}{128p^2} + \varepsilon^3 \frac{3kk_1^2 a^3 (4p^2 + 3)}{4(4p^2 - 1)^2} + \varepsilon^3 \frac{3k^3 a^7}{512p^4} +$$

$$+ \varepsilon^3 a \left[ \frac{k_1^3}{32(p-1)(2p-1)} - \frac{k_1 k_2 (4p-3)}{8(p-1)(2p-1)} + \frac{k_3}{2} \right] \cos \psi_3;$$

$$-2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} =$$

$$= -\varepsilon^3 a \left[ \frac{k_1^3}{32(p-1)(2p-1)} - \frac{k_1 k_2 (4p-3)}{8(p-1)(2p-1)} + \frac{k_3}{2} \right] \sin \psi_3; \quad (6)$$

$$2pa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2a}{d\tau^2} - a \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \varepsilon^2 \frac{k_1^2 a}{2(4p^2 - 1)} -$$

$$- \varepsilon^2 \frac{3k^2 a^5}{128p^2} + \varepsilon^3 \frac{3kk_1^2 (4p^2 + 3) a^3}{4(4p^2 - 1)^2} + \varepsilon^3 \frac{3k^3 a^7}{512p^4} +$$

$$+ \varepsilon^4 \frac{3k^2 k_1^2 a^5 (251904p^8 + 42880p^6 - 5328p^4 - 96p^2 - 1)}{2048p^4 (4p^2 - 1)^3 (16p^2 - 1)} -$$

$$- \varepsilon^4 \frac{195k^4 a^9}{131072p^6} + \varepsilon^4 \frac{k_1^4 (8p^2 + 1) a}{32(4p^2 - 1)^2 (p^2 - 1)} +$$

$$+ \varepsilon^4 \frac{k_1^2 k_2 (2p^2 - p - 4)}{16(4p^2 - 1)(p^2 - 1)} + \varepsilon^4 a \left[ \frac{k_1^4}{192(2p-1)(p-1)(2p-3)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{k_1^2 k_2 (4p-3)}{96(p-1)(2p-1)(2p-3)} + \frac{k_1 k_3}{12(2p-3)} - \frac{k_4}{2} \Big] \cos \psi_4 \\
& - 2p \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = \\
= & - \epsilon^4 a \left[ \frac{k_1^4}{192(2p-1)(p-1)(2p-3)} - \frac{k_1^2 k_2 (4p-3)}{96(p-1)(2p-1)(2p-3)} + \right. \\
& \left. + \frac{k_1 k_3}{12(2p-3)} - \frac{k_4}{2} \right] \sin \psi_4. \quad (7)
\end{aligned}$$

В системах уравнений (4)–(7)  $\psi_n$  — обобщенная фаза,

$$\psi_n = \psi_n(\tau) = 2 \left( \frac{n}{2} - p \right) \tau + 2\varphi(\tau), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Из (4) — (7) по методике, изложенной в работе (1), находим  $\frac{d\psi_n}{d\tau}$ ,  $\frac{da}{d\tau}$ , после чего получаем инварианты движения, связывающие амплитуду и фазу колебаний. Эти инварианты для первых четырех зон параметрического возбуждения уравнения (1) с учетом соответствующих приближений имеют вид

$$\rho \left( 1 - 2p + \epsilon \frac{3kp}{8p} + \epsilon \frac{k_1}{2p} \cos \psi_1 \right) = C_1; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ 2(1-p) + \epsilon \frac{3kp}{8p} + \epsilon^2 \frac{k_1^2}{2p(4p^2-1)} + \epsilon^2 \frac{5k^2 p^2}{128p^3} + \right. \\
\left. + \epsilon^2 \left[ \frac{k_1^2}{4p(2p-1)} - \frac{k_2}{2p} \right] \cos \psi_2 \right\} = C_2; \quad (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ 2 \left( \frac{3}{2} - p \right) + \epsilon \frac{3kp}{8p} + \epsilon^2 \frac{k_1^2}{2p(4p^2-1)} + \right. \\
\left. + \epsilon^2 \frac{5k^2 p^2}{128p^3} + \epsilon^2 \frac{3kk_1^2(16p^4 + 16p^2 - 1)}{32p^3(4p^2-1)^2} \rho + \epsilon^2 \frac{51k^3 p^3}{4096p^6} + \right. \\
\left. + \epsilon^3 \left[ \frac{k_1^3}{32(2p-1)(p-1)p} - \frac{k_1 k_2 (4p-3)}{8p(2p-1)(p-1)} + \frac{k_3}{2p} \right] \cos \psi_3 \right\} = C_3; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ 2(2-p) + \epsilon \frac{3k}{8p} \rho + \epsilon^2 \frac{k_1^2}{2p(4p^2-1)} \left[ 1 + \epsilon^2 \frac{k_2(2p^2-p-4)}{8(p^2-1)} + \right. \right. \\
\left. \left. + \epsilon^2 \frac{k_1^2(8p^4 + 3p^2 - 2)}{16p^2(4p^2-1)(p^2-1)} \right] + \epsilon^2 \frac{5k^2}{128p^3} \rho^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 \frac{3kk_1^2(16p^4 + 16p^2 - 1)}{32p^3(4p^2 - 1)^2} p + \varepsilon^3 \frac{51k^3}{4096p^5} p^2 + \\
& + \varepsilon^4 \frac{k_1^2 k^2 (301056p^8 + 81792p^6 - 25872p^4 + 2112p^2 - 69)p^2}{2048p^5(4p^2 - 1)^3(16p^2 - 1)} + \\
& + \varepsilon^4 \frac{2703k^4}{655360p^7} p^4 + \varepsilon^4 \left[ \frac{k_1^4}{192p(2p-1)(p-1)(2p-3)} - \right. \\
& \left. - \frac{k_1^2 k_2(4p-3)}{96p(2p-1)(p-1)(2p-3)} + \frac{k_1 k_3}{12p(2p-3)} - \frac{k_4}{2p} \right] \cos \psi_4 \} = C_4. \quad (11)
\end{aligned}$$

В уравнениях (8)–(11)  $\rho$  — квадрат амплитуды колебаний,  $\rho = a^2(\tau)$ ;  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Из (8) — (11) видно, что наличие нелинейности ограничивает амплитуду параметрически возбуждаемых колебаний. Зная инварианты движения, можно построить всевозможные семейства фазовых портретов в координатах  $(U, V)$ , где

$$U = \sqrt{\rho} \cos \frac{\psi_n}{2}, \quad V = \sqrt{\rho} \sin \frac{\psi_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Подставив (12) в (8) и взяв  $n=N=1$ , получим

$$(U^2 + V^2)^2 + \frac{8p}{3k\varepsilon} \left( 1 - 2p - \frac{k_1\varepsilon}{2p} \right) (U^2 + V^2) + \frac{8k_1}{3k} U^2 = \frac{8p}{3k\varepsilon} C_1. \quad (13)$$

Уравнение (13) — уравнение семейства алгебраических кривых четвертого порядка на плоскости  $(U, V)$ , называемых в теории кривых овалами Кассини [3]. Для второй, третьей, четвертой и т. д. зон возбуждения получаются алгебраические кривые шестого, восьмого, десятого и т. д. порядков.

Рассмотрим случай, когда  $k < 0$  (жесткая нелинейная система). При анализе уравнения (13) и инвариантов движения будем предполагать, что для всех  $m$   $k_m = 1$  или мало отличается от 1. Посмотрим, как влияет количество осциллирующих членов в левой части уравнения (1) на положение фазовых портретов. Если в уравнении (1) присутствует только один осциллирующий член  $-k_1 \varepsilon \cos \tau$ , то фазовые портреты для колебаний в первой и высших зонах возбуждения качественно ничем не отличаются друг от друга. Это следует из анализа уравнений (8) — (11). Рассмотрим более подробно уравнение (13). Для него возможны три вида фазовых портретов в зависимости от того, какие координаты имеет точка, лежащая в плоскости  $(p, \varepsilon)$ . Если в плоскости  $(p, \varepsilon)$  точка находится внутри зоны возбуждения (или на ее левой границе) соответствующего линейного уравнения Матье (в дальнейшем для сокращения письма будем называть эти зоны просто зонами Матье), то фазовые портреты имеют вид, изображенный на рис. 1. Это

так называемый мягкий режим параметрического возбуждения колебаний, при котором в плоскости  $(U, V)$  есть три особые точки, из них начало координат является седлом, а две другие — центрами. Если точка находится левее левой границы зоны Матье, то получаются фазовые портреты, изображенные на рис. 2. Это

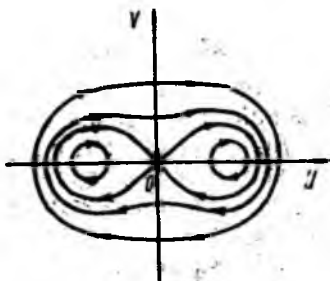


Рис. 1

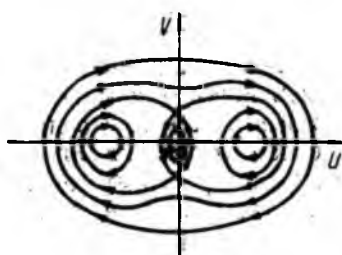


Рис. 2

жесткий режим возбуждения, когда в плоскости  $(U, V)$  существует пять особых точек, а именно: центр в начале координат, два центра на оси  $U$  и два седла на оси  $V$ . Наконец, если точка в плоскости  $(p, \varepsilon)$  находится на правой границе зоны Матье или правее ее, то получаются кривые, изображенные на рис. 3. В этом случае положение покоя является устойчивым стационарным состоянием и в плоскости  $(U, V)$  начало координат является единственной особой точкой типа центра.

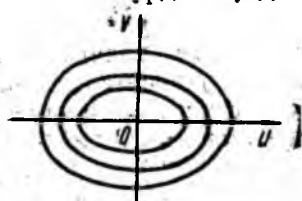


Рис. 3

Если в уравнении (1) из осциллирующих членов оставить только два, т. е.  $(-k_1 \varepsilon \cos \tau + k_2 \varepsilon^2 \cos 2\tau)u$ , то это приведет к повороту на  $90^\circ$  семейств фазовых портретов для второй и всех последующих зон параметрического возбуждения. Это видно из уравнений (9) — (11).

При удержании в уравнении (1) первых трех осциллирующих членов наблюдаем следующее: все семейства фазовых портретов, начиная с третьей зоны, поворачиваются на  $90^\circ$  по сравнению с предыдущим случаем.

Из обнаруженной закономерности следует, что если в уравнении (1) оставить, например, шесть осциллирующих членов, то это приведет к тому, что семейства фазовых портретов для 1, 3, 5 зон будут качественно отличаться от соответствующих семейств для 2, 4, 6, 7, 8, 9, ... зон только поворотом на  $90^\circ$ .

Вообще каждое удержание  $N$  первых ( $N > 1$ ) осциллирующих членов в уравнении (1) приводит к повороту на  $90^\circ$  всех семейств фазовых портретов, начиная с номера  $N$ , и сохраняет неизменным последовательное чередование положений фазовых портретов для предыдущих зон параметрического возбуждения.

Очевидно, что в случае наличия бесконечного числа осциллирующих членов в уравнении (1) ( $N = \infty$ ) семейства фазовых портретов для четных зон качественно отличаются от соответствующих семейств для нечетных зон только поворотом на  $90^\circ$ .

Анализ уравнения (1) для случая  $k > 0$  (мягкая нелинейная система) показывает, что в этом случае семейства фазовых портретов для каждой зоны возбуждения исходного нелинейного уравнения качественно отличаются от рассмотренных выше соответствующих семейств при  $k < 0$  только поворотом на  $90^\circ$ . Таким образом, в дальнейшем для мягкой нелинейной системы предполагается, что запись рис. 1, 2, 3 означает рисунки, приведенные в данной статье, но повернутые на  $90^\circ$  относительно начала координат. При этом рис. 1 соответствует точкам плоскости  $(p, \epsilon)$ , лежащим внутри зоны Матье или на ее правой границе, рис. 2 — точкам правее правой границы зоны Матье, а рис. 3 — точкам в плоскости  $(p, \epsilon)$ , лежащим на левой границе или левее ее.

Необходимо отметить, что если в уравнении (1) под знаком суммы отсутствует множитель  $(-1)^m$  и если все  $k_m$  одного знака, то и для четных, и для нечетных зон возбуждения фазовые портреты будут одни и те же (т. е. поворота на  $90^\circ$  не будет), но в любом случае семейства фазовых портретов для жесткой системы будут отличаться от семейств для мягкой системы поворотом на  $90^\circ$  относительно начала координат.

Результаты работы могут использоваться при расчете и проектировании нелинейных колебательных систем, работающих в первой и высших зонах параметрического возбуждения.

**Список литературы:** 1. Титаренко А. М., Зуев Н. Г., Чередников П. И. О зонах возбуждения одного нелинейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Х., 1985. 21 с. Дел. в УкрНИИНТИ 23.07.85, № 1502. 2. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. М., 1969. 400 с. 3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справ. по математике. М., 1986. 544 с.

Поступила в редколлегию 27.12.88