ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ІТЕРАЦІЙНИММИ МЕТОДАМИ

Шона С.І.
Науковий керівник – к.ф.-м.н., доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Леніна 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36),
e-mail: shonchuk@mail.ru

In this paper we consider nonlinear boundary value problem $-\Delta u = f(u)$ in $\Omega \subset R^2$, $u = 0$ on $\partial\Omega$. We research problem, when $f(u) = e^{-u}$. We got approximately solution, used 2 different iteration methods.

У цій роботі ми розглядаємо два методи побудови наближеного додатного розв'язку наступної крайової задачі:

$$-\Delta u = f(u) \text{ у } \Omega \subset R^2, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

коли область Ω є прямокутник $[0,1]\times[0,1]$.

Задача (1), (2) описує багато реальних процесів. Наприклад, якщо $f(u) = e^{-u}$, то маємо математичну модель для задачі про течію провідного середовища у циліндрі з непроникливими стінками.

Перший метод побудови наближеного розв'язку задачі (1), (2) опирається на теорію R-функцій з використанням квазіфункцій Гріна.

Нехай $\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2) = 0$ – нормалізована до першого порядку рівняння $\partial\Omega$.

Скориставшись методикою з [1] отримали, що розв'язок задачі (1), (2) задовольняє нелінійне інтегральне рівняння:

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \int_\Omega u(\xi) K(\mathbf{x},\xi) d\xi, \tag{3}$$

де $u_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \mathrm{G}(\mathbf{x},\xi) f(u(\xi)) d\xi$, $K(\mathbf{x},\xi) = -\frac{1}{2\pi}\Delta_\xi q(\mathbf{x},\xi)$, $q(\mathbf{x},\xi) = -\frac{1}{2}\ln(r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\xi))$, $r = \|\mathbf{x}-\xi\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - \xi_i)^2}$, $\mathrm{G}(\mathbf{x},\xi)$ – квазіфункція Гріна оператора для першої крайової задачі у області Ω, $\mathrm{G}(x,\xi) = \ln\frac{1}{r} - q(x,\xi)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

Ітераційний процес для знаходження наближенного розв'язку задачі (1), (2) будуємо за наступною схемою

$$u^{(k+1)}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega} \mathrm{G}(\mathbf{x},\xi)e^{-u^{(k)}(\xi)}d\xi + \int_{\Omega} u^{(k)}(\xi)K(\mathbf{x},\xi)d\xi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (4)$$

Оберемо за початкове наближення $u^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$, отримаємо

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\xi)d\boldsymbol{\xi} = u_0(\mathbf{x}).$$

Таким чином за ітераційною схемою (4) отримаємо послідовність $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)} \dots$.

Другий метод, пов'язаний з використанням точної функції Гріна, яка має наступний вигляд [2]:

$$G(x,\xi) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x_1}{l_1}\sin\frac{k\pi x_2}{l_2}\sin\frac{n\pi\xi_1}{l_1}\sin\frac{k\pi\xi_2}{l_2}}{\pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2}+\frac{k^2}{l_2^2}\right)},$$

де $x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [0,1]$. Тоді розв'язкок задачі (1), (2) задовольняє нелінійному інтегральне рівняння [3]

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\xi) f(u(\xi))d\xi. \qquad (5)$$

Ітераційний процес будуємо за схемою

$$u^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})e^{-u^{(k)}(\xi)}d\boldsymbol{\xi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (6)$$

Таким же чином, як і для першого метода, за початкове наближення обираємо $u^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$, отримаємо

$$u^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x},\xi)d\boldsymbol{\xi} = u_0(\mathbf{x}),$$

Як і в першому випадку отримуємо послідовність $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)} \dots$. Збіжність ітераційного процесу для ітераційної схеми (6) має двобічний характер.

Література.

1. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Метод квазифункций Грина. // Актуальные проблемы механики деформируемых сред с.188 – 1979

2. Тевяшев А.Д., Колосова С.В., Сидоров М.В. Вибрані глави математичної фізики у прикладах та задачах: Навч. посібник для студентів напрямку «Прикладна математика». –Харків: ХНУРЕ, 2007. – 340 с.

3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 394 с.