ВЛИЯНИЕ РЕШЕТОК СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА ГЕНЕРАЦИЮ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОГО СЛОЯ

Л. Н. Литвиненко

Постановка задачи

Плоскопараллельный слой оптически активного вещества является наиболее простой моделью квантовых генераторов и усилителей и может быть использован для предварительного анализа работы таких устройств. Здесь мы рассмотрим зависимость условий самовозбуждения, энергетических характеристик излучения от геометрической формы решеток при различных способах нанесения их на торцы слоя. Будем полагать, что на плоскопараллельный слой толщины a с произвольным показателем преломления $N = N_0 + iN''$ идеально проводящие решетки наносятся следующими способами: а) слой с решеткой на одной из стенок, б) слой с решеткой на одной и идеальным зеркалом — на другой. Как понятно из простых физических соображений, последняя модель также эквивалентна плоскопараллельному слою удвоенной толщины, на стенки которого нанесены, одна над другой, идентичные ленточные решетки.

Конфигурация ленточных решеток, нанесенных на стенки слоя, показана на рис. 1. Здесь введены следующие обозначения: l — период решетки, d' — ширина узкой ленты, d — расстояние между широкими лентами.

Будем исследовать такое излучение, у которого вектор $\vec{E}$ параллелен образующим лент (т. е. $\vec{E} \parallel OX$). Независимо от способа нанесения решеток, возникшее за счет индуцированного излучения, электромагнитное поле будет периодично с периодом l как внутри, так и вне слоя. Следовательно, его удобно представить в виде ряда Фурье. Значения неизвестных коэффициентов Фурье в каждом случае мы определим путем отыскания такого решения уравнений Максвелла, которое подчиняется на торцах слоя точным граничным условиям: тангенциальная составляющая электрического поля на лентах решетки обращается в нуль, а на щелях тангенциальная составляющая электромагнитного поля непрерывна.

Для удобства рассмотрения разобьем все пространство на три области: I обл. — $z > 0$; II обл. — $-a < z < 0$; III обл. — $z < -a$. Внутри слоя (II обл.) электромагнитное поле представляет собой суперпозицию плоских волн, распространяющихся от одного торца слоя к другому. В I и III областях существуют уходящие от слоя волны, за исключением случая б). В последнем случае в III область электромагнитное поле не проникает.

Таким образом, излучаемое слоем электромагнитное поле можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{E}_{\mathrm{I}} &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih_n' z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \\
\vec{E}_{\mathrm{II}} &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n e^{-ih_n z} + C_n e^{ih_n (z+a)}\right) e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \\
\vec{E}_{\mathrm{III}} &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ih_n' (z+a)} e^{i2\pi n \frac{y}{l}}
\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, A_n, B_n, C_n, D_n — неизвестные коэффициенты Фурье, а величины

$$h'_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad h_n = \sqrt{k^2 N^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} \tag{2}$$

находятся из подчинения (1) волновому уравнению.
Для III области в случае б) $D_n \equiv 0$, множитель $e^{-i\omega t}$ в (1) и дальше подразумевается. Вектор $\vec{H}$ для каждой из областей определяется через $\vec{E}$ из уравнений Максвелла:

$$\vec{H}_{\mathrm{I}} = \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{h'_n}{k} e^{ih'_n z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{ih'_n z} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} \frac{n}{\varkappa},$$

$$\vec{H}_{\mathrm{II}} = \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-B_n e^{-ih_n z} + C_n e^{ih_n (z+a)}\right) \frac{h_n}{k} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n e^{-ih_n z} + \right.$$

$$\left. + C_n e^{ih_n (z+a)}\right) \frac{n}{\varkappa} e^{i2\pi n \frac{y}{l}}, \tag{3}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{III}} = \vec{j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-D_n) e^{-ih'_n (z+a)} \frac{h'_n}{k} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} - \vec{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-ih_n (z+a)} \frac{n}{\varkappa} e^{i2\pi n \frac{y}{l}},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты прямоугольной системы координат, $\varkappa = \frac{l}{\lambda}$.

Условия самовозбуждения

1. Рассмотрим более подробно излучение слоем, показанным на рис. 1а. Подчиним электромагнитное поле выражений (1), (3) точным граничным условиям на одном периоде структуры:

$$z = 0 \quad \left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{I}t} = E_{\mathrm{II}t} = 0 \text{ (на лентах)} \\ E_{\mathrm{I}t} = E_{\mathrm{II}t}; \quad H_{\mathrm{I}t} = H_{\mathrm{II}t} \text{ (на щелях)} \end{array}\right\},$$

$$z = -a \quad \left.\begin{array}{l} E_{\mathrm{II}t} = E_{\mathrm{III}t} = 0 \text{ (на лентах)} \\ E_{\mathrm{II}t} = E_{\mathrm{III}t}; \quad H_{\mathrm{II}t} = H_{\mathrm{III}t} \text{ (на щелях)} \end{array}\right\}.$$

В случае, когда $\mu = 1$, после подстановки уравнений (1) и (3) в (4) и (5) получим

$$A_n = B_n + C_n e^{ih_n a}; \quad D_n = B_n e^{ih_n a} + C_n; \quad D_n h'_n = h_n B_n e^{ih_n a} - C_n; \tag{6}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \left(1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n}\right) e^{i2h_n a} e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad |y| < \frac{d'}{2}; \quad \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}; \tag{7}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (h_n + h'_n) \left[1 - \frac{(h_n - h'_n)^2}{(h_n + h'_n)^2} e^{i2h_n a}\right] e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad \frac{d'}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \tag{8}$$

Если обозначить

$$\left.\begin{array}{l} X_n = nB_n \left(1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n} e^{i2h_n a}\right) = n\alpha_n \\ G_n = \frac{1}{2}(h_n + h'_n)\left[1 - \left(\frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n}\right)^2 e^{i2h_n a}\right]\left[1 + \frac{h_n - h'_n}{h_n + h'_n} e^{i2h_n a}\right]^{-1} \\ \varphi = \frac{2\pi y}{l}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \theta' = \frac{\pi d'}{l}; \quad \varkappa = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda} \end{array}\right\} \tag{9}$$

и ввести параметр

$$\chi_n = 1 + iG_n \frac{l}{2\pi |n|} \quad (n \neq 0), \tag{10}$$

который при $n \to \infty$ убывает как $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, то система уравнений (7) — (8) примет вид, аналогичный системе, рассмотренной в работе [1]:

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{in\varphi} = 0; \quad |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \pi, \tag{11}$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = i\varkappa G_0 \alpha_0 + \sum_{n \neq 0} \chi_n \frac{|n|}{n} \chi e^{in\varphi}; \quad \theta' < |\varphi| < 0, \tag{12}$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{X_n}{n} = -\alpha_0; \quad \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} = -\alpha_0. \tag{13}$$

Воспользовавшись полученными в работе [1] результатами, запишем сразу решение системы уравнений (11) — (13), которое имеет вид однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, α_0, X_n:

$$\left.\begin{aligned}
&i\varkappa G_0 V_0^0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_2 R_0 + C_1 R_{-1}) = 0 \\
&i\varkappa G_0 V_m^0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_m^n + V_m^{-n}] - X_m + 2(C_2 R_m + C_1 R_{m-1}) = 0 \\
&(i\varkappa G_0 V_{[\sigma]}^0 + 1)\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_{[\sigma]}^n + V_{[\sigma]}^{-n}] + 2(C_2 R_{[\sigma]} + C_1 R_{[\sigma]}^{(+1)}) = 0 \\
&(i\varkappa G W_{[\sigma]}^0 + 1)\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [W_{[\sigma]}^n + W_{[\sigma]}^{-n}] + 2(C_2 \tilde{R}_{[\sigma]} + C_1 \tilde{R}_{[\sigma]}^{(+1)}) = 0
\end{aligned}\right| \tag{14}$$

Коэффициенты V_m^n, R_m, $V_{[\sigma]}^n$, $W_{[\sigma]}^n$, $R_{[\sigma]}$, $\tilde{R}_{[\sigma]}$, $R_{[\sigma]}^{(1)}$, $\tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)}$ подсчитываются в работе [1].

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (14) (равенство нулю ее определителя) и является условием самовозбуждения слоя, показанного на рис. 1а. Так как для (14) пригоден метод редукции, то в наиболее простом случае можем ограничиться требованием $\chi_1 = \chi_2 = \ldots = 0$. Тогда условие самовозбуждения будет иметь вид

$$i\varkappa \Delta G_0 + D = 0, \tag{15}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{[\sigma]} & R_{[\sigma]}^{(1)} & V_{[\sigma]}^0 \\ \tilde{R}_{[\sigma]} & \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} & W_{[\sigma]}^0 \\ R_0 & R_{-1} & V_0^0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} R_{[\sigma]} & R_{[\sigma]}^{(1)} & 1 \\ \tilde{R}_{[\sigma]} & \tilde{R}_{[\sigma]}^{(1)} & 1 \\ R_0 & R_{-1} & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Для удобства последующих выкладок запишем (15) в следующей форме:

$$\sqrt{r}\sqrt{\frac{r+t^2}{1+t^2}}\, e^{-2N''Ka} = 1; \quad 2kN_0 a + \gamma = 2\pi s, \quad s = 1, 2 \ldots \tag{17}$$

где $\frac{N-1}{N+1} = \sqrt{r}\, e^{i\delta}$; $\operatorname{tg}\delta = -\frac{2N_0 N''}{N_0^2 - 1 + (N'')^2}$;

$$\frac{2D}{\varkappa(N+1)\Delta} = te^{-\delta_1}; \quad \operatorname{tg}\delta_1 = \frac{N''}{N_0 + 1};$$

$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} t + \tilde{\gamma}$ (γ — малая поправка).

2. Займемся теперь условиями излучения для слоя, показанного на рис. 1*б*. Граничные условия для полей (1), (3) в этом случае имеют следующий вид:

$$\left.\begin{array}{ll} z=0 & E_{It}=E_{IIt}=0 \text{ (на лентах)} \\ & E_{It}=E_{IIt}\quad H_{It}=H_{IIt} \text{ (на щелях)} \\ z=-a & E_{IIt}=0 \qquad \text{(на всем периоде)} \end{array}\right\}. \tag{18}$$

Подставив (1) и (3) в (18), получим связь между коэффициентами Фурье:

$$A_n = B_n + C_n e^{ih_n a}; \quad B_n = -C_n e^{ih_n a} \tag{19}$$

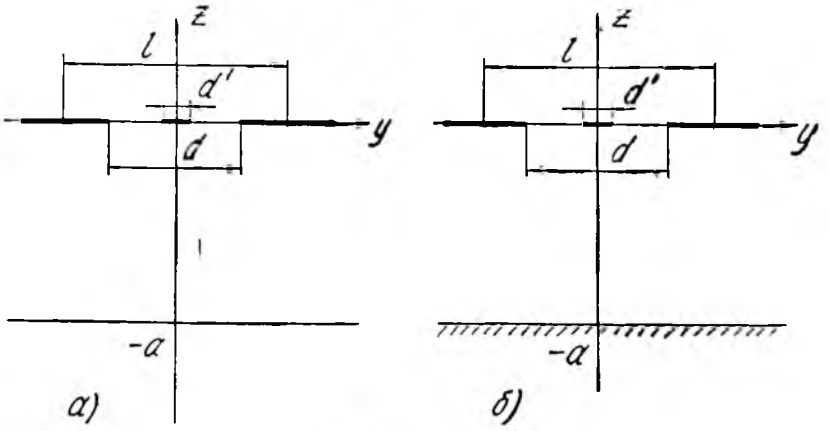

Рис. 1.

и систему уравнений относительно B_n:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (1 - e^{i2h_n a}) e^{i2\pi n \frac{y}{l}} = 0; \quad |y| < \frac{d}{2}; \ \frac{d}{2} < |y| < \frac{l}{2}, \tag{20}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \{h_n' (1 - e^{i2h_n a}) + h_n (1 + e^{i2h_n a}) e^{i\frac{2\pi n}{l} y} = 0; \quad \frac{d'}{2} < |y| < \frac{d}{2}. \tag{21}$$

Если обозначить

$$Y_n = \beta_n n = B_n (1 - e^{i2h_n a}); \quad g_n = \frac{1}{2}\left\{h_n' + h_n \frac{1 + e^{i2h_n a}}{1 - e^{i2h_n a}}\right\};$$

$$\eta_n = 1 + i g_n \frac{l}{2\pi |n|} (n \neq 0); \ \varphi = 2\pi \frac{y}{l}; \ \theta = \frac{\pi d}{l}; \ \theta' = \frac{\pi d'}{l},$$

то после некоторых преобразований уравнениям (20) и (21) можно придать вид

$$\sum_{n \neq 0} Y_n e^{in\varphi} = 0, \quad |\varphi| < \theta'; \ \theta < |\varphi| < \pi, \tag{22}$$

$$\sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} e^{in\varphi} = i g_0 \beta_0 + \sum_{n \neq 0} Y_n \frac{|n|}{n} \eta_n e^{in\varphi}, \quad \theta' < |\varphi| < \theta, \tag{23}$$

$$\sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{Y_n}{n} = -\beta_0; \quad \sum_{n \neq 0} \frac{Y_n}{n} = -\beta_0 \tag{24}$$

Систему уравнений (22) — (24) можно решить по аналогии с (11) — (13). Решение ее также будет иметь вид однородной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных β_0, Y_n, C_1 и C_2:

$$i\varkappa g_0 V_0^0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(c_2 R_0 + c_1 R_{-1}) = 0;$$

$$(m = 1, 2 \ldots)\ i\varkappa g_0 V_m^0 \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n [V_m^n + V_m^{-n}] - Y_m + 2(c_2 R_m + c_1 R_{m-1}) = 0;$$

$$(i\varkappa g_0 V_{[\sigma]}^0 + 1)\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n [V_{[\sigma]}^n + V_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 R_{[\sigma]} + c_1 R_{[\sigma]}^{(1)}) = 0; \tag{25}$$

$$(i\varkappa g_0 W_{[\sigma]}^0 + 1)\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \eta_n [W_{[\sigma]}^n + W_{[\sigma]}^{-n}] + 2(c_2 \bar{R}_{[\sigma]} + c_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)}) = 0.$$

Величины V_m^n, R_m, $V_{[\sigma]}^n$, $R_{[\sigma]}$, $R_{[\sigma]}^{(1)}$, $W_{[\sigma]}^n$, $\bar{R}_{[\sigma]}$, $\bar{R}_{[\sigma]}^{(1)}$ такие же, как и в системе уравнений (14). Система линейных алгебраических уравнений (25) допускает получение решения методом редукции, поэтому в наиболее простом случае условие самовозбуждения имеет вид

$$i\varkappa g_0 \Delta + D = 0, \tag{26}$$

где D и Δ совпадают с (16). После простых преобразований условию (26) можно придать вид, аналогичный (17):

$$\frac{r + t^2}{1 + t^2} e^{-iN^2 Ka} = 1; \quad 2kN_0 a + \gamma = 2\pi s. \tag{27}$$

Величины r, t, γ имеют вид (17).

Как видно, в условия самовозбуждения (17) и (27) входят величины D и Δ, зависящие от конфигурации решетки, находящейся на стенках слоя. Следовательно, изменение геометрических размеров решетки повлечет за собой изменение условий генерации и несомненно скажется на энергетических характеристиках излучения — потоке мощности внутри слоя и плотности электромагнитной энергии.

Энергетические характеристики излучения

Для рассматриваемого нами частного случая длинноволнового приближения $\varkappa \ll \frac{0{,}5}{N_0}$ в выражениях для электромагнитного поля следует ограничиться только гармониками с индексом $n = 0$. В этом случае поток мощности $\vec{P}$ электромагнитного излучения, плотность электрической $U_э$, магнитной $U_м$ энергии имеет следующий вид:

$$\text{а)}\ \vec{P}_а = -\vec{k}\frac{C}{N_0} U_0^a \left\{\operatorname{sh} k\left[z + a\left(1 - \frac{\ln r}{\ln R_a}\right)\right] + \zeta_a \sin\left[(2\pi s - \gamma)\left(\frac{z}{a} + 1\right) + \delta_0\right]\right\}; \tag{28}$$

$$U_э^a = \frac{1}{2} U_0^a (1 - \zeta_a^2)\left\{\operatorname{ch} k\left[z + a\left(1 - \frac{\ln r}{\ln R_a}\right)\right] + \cos\left[(2\pi s - \gamma)\left(\frac{z}{a} + 1\right) + \delta_0\right]\right\}, \tag{29}$$

$$U_м^a = \frac{1}{2} U_0^a (1 + \zeta_a^2)\left\{\operatorname{ch} k\left[z + a\left(1 - \frac{\ln r}{\ln R_a}\right)\right] - \cos\left[(2\pi s - \gamma)\left(\frac{z}{a} + 1\right) + \delta_0\right]\right\}, \tag{30}$$

$$\text{б)}\ P_б = -\vec{k}\frac{C}{N_0} U_0^б \left\{\operatorname{sh}\left[k\left(\frac{z}{a} + 1\right)\ln\sqrt{R_б}\right] + \zeta_б \sin\left[(2\pi s - \gamma)\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a} + 1\right)\right]\right\}, \tag{31}$$

$$U_э^б = \frac{1}{2} U_0^б (1 - \zeta_б^2) \left\{ \mathrm{ch} \left| k \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_б} \right| + \cos \left| (2\pi s - \gamma) \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \right| \right\}, \quad (32)$$

$$U_м^б = \frac{1}{2} U_0^б (1 + \zeta_б^2) \left\{ \mathrm{ch} \left| k \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_б} - \cos \left| (2\pi s - \gamma) \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \right| \right\}. \quad (33)$$

Здесь мы воспользовались условиями излучения (17) и (27) в виде

$$\text{а)}\ K_a = \ln R_a; \quad \text{б)}\ K_a = \frac{1}{2} \ln R_б, \quad (34)$$

где

$$R_a = \sqrt{r} \sqrt{\frac{r + t^2}{1 + t^2}}; \quad R_б = \sqrt{\frac{r + t^2}{1 + t^2}}; \quad (35)$$

$$\zeta_a = \frac{\lambda \ln R_a}{4\pi N_0 a}; \quad \zeta_б = \frac{\lambda \ln R_б}{4\pi N_0 a}. \quad (36)$$

Для отыскания величин U_0^a, $U_0^б$ следует привлечь нелинейную теорию оптических свойств плоскопараллельных слоев, согласно которой отрицательный коэффициент поглощения K зависит от плотности энергии внутри слоя U следующим образом:

$$K = \frac{K_0}{1 + \alpha U}, \quad (37)$$

где α — параметр нелинейности; K_0 — коэффициент поглощения данного вещества при $U \to 0$. Усредняя $U = U_э + U_м$ по z с учетом (34), получим

$$U_0^a = \frac{K_0 a - \ln R_a}{\alpha (R_a - 1)} 2 \frac{\sqrt{r} R_a}{R_a + r}; \quad (38)$$

$$U_0^б = \frac{K_0 2a - \ln R_б}{\alpha (R_б - 1)} \sqrt{R_б}. \quad (39)$$

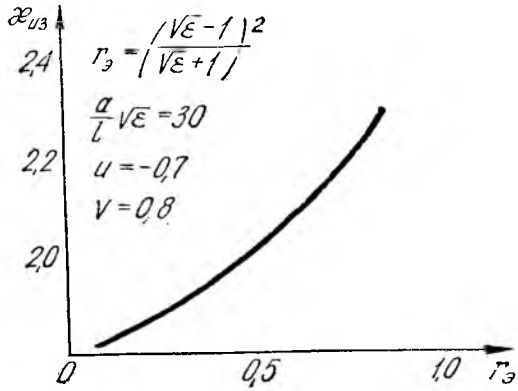

Рис. 2.

Поскольку обычно $\frac{\lambda}{a} \ll 1$, а R_a, $R_б \sim 1$, то ζ_a, $\zeta_б < 1$, поэтому с большой степенью точности можно записать

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_a &= -k \frac{C}{N_э} U_0^a \,\mathrm{sh} \left\{ k \left| z + a \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right| \right\} \\ U_a &= U_э^a + U_м^a = U_0^a \,\mathrm{ch} \left\{ k \left| z + a \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R_a} \right) \right| \right\} \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{P}_б &= -k \frac{C}{N_б} U_0^б \,\mathrm{sh} \left| k \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_б} \right| \\ U_б &= U_э^б + U_м^б = U_0^б \,\mathrm{ch} \left| k \left(\frac{z}{a} + 1 \right) \ln \sqrt{R_б} \right| \end{aligned}\right\}. \quad (41)$$

На рис. 2 приведена зависимость частоты самовозбуждения $\varkappa$ от параметров, характеризующих геометрические размеры решетки $U = \cos\theta$; $V = \cos\theta'$, электродинамические свойства оптически активного вещества N_0 и N'', относительную толщину слоя.

Заметим, что условия самовозбуждения (15) и (26) совпадают с условием равенства нулю определителя неоднородной системы уравнений, аналогичной (14), полученной в работе [2] при определении дифракционного спектра электромагнитного поля, нормально падающего на решетку

с прилегающим диэлектрическим слоем конечной толщины. Это естественно, так как бесконечно большому коэффициенту прохождения соответствует переход оптически активного слоя от режима усиления к режиму генерации (самовозбуждения).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. В. П. Шестопалову за ценные указания, использованные в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. Записки мех.-матем. ф-та ХГУ и Харьковского матем. об-ва, т. 30, 4, 1964.

2. Л. Н. Литвиненко. Дифракционные свойства плоских металлических решеток специальной формы с диэлектриком и экраном, Изв. вузов, «Радиофизика» (в печати).

3. А. П. Хапалюк, Б. И. Степанов. Изв. АН БССР, сер. физ.-тех., № 4, 132, 1961.

4. О. А. Третьяков, В. П. Шестопалов. Оптика и спектроскопия, т. XV, 5, 709, 1963.