

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту  
(повна назва)

Кафедра прикладної математики  
(повна назва)

## АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Застосування методу Бройдена при комп'ютерному моделюванні  
нестационарних режимів по ділянці трубопроводу  
(тема)

Виконав:  
студент 2 курсу, групи ПМм-18-1  
Соловійов О. М.  
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика  
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна  
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика  
(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Гусарова І. Г.  
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_  
(підпис)

Тевяшев А. Д.  
(прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ \_\_\_\_\_

(підпис)

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 р.

**ЗАВДАННЯ**  
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Соловйову Олексію Максимовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Застосування методу Бройдена при комп'ютерному моделюванні нестационарних режимів по ділянці трубопроводу.

затверджена наказом по університету від “31” жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель нестационарного режиму транспорту газу по ділянці трубопроводу у загальному вигляді.

4. Зміст пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) \_\_\_\_\_

1. Системний аналіз проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу та постановка задачі дослідження

2. Формальна постановка задачі

3. Застосування вибраних методів

4. Програмна реалізація та аналіз результатів дослідження

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів) \_\_\_\_\_

1. Мета роботи \_\_\_\_\_

2. Актуальність роботи \_\_\_\_\_

3. Системний аналіз проблеми \_\_\_\_\_

4. Постановка задачі, вибір методу та алгоритм розв'язання \_\_\_\_\_

5. Результати обчислювального експерименту \_\_\_\_\_

### КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

Номер	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	жовтень – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	листопад – грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент \_\_\_\_\_  
(підпис)

Керівник роботи \_\_\_\_\_ проф. Гусарова І.Г.  
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

## РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 119 с., 20 табл., 32 рис., 2 дод., 18 джерел.

НЕСТАЦІОНАРНИЙ НЕІЗОТЕРМІЧНИЙ РЕЖИМ ТЕЧІЇ ГАЗУ, СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, МЕТОД СКІНЧЕНИХ РІЗНИЦЬ, МЕТОД БРОЙДЕНА, МЕТОД НЬЮТОНА.

Об'єкт дослідження – нестационарний неізотермічний режим течії газу (ННРТГ) по ділянці трубопроводу (ДТ).

Метою атестаційної роботи є проведення системного аналізу проблеми моделювання та аналізу ННРТГ; вибір математичної моделі (ММ) ННРТГ; вибір методу та розробка алгоритму розв'язання системи рівнянь ММ методом скінчених різниць (МСР) з використанням методу Бройдена та методу Ньютона; створення програмного продукту (ПП); аналіз результатів дослідження.

Метод дослідження – методи чисельного інтегрування систем рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу (ЧП ГТ) та методи розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР).

В результаті виконання атестаційної роботи проведений системний аналіз вказаної проблеми. Побудована ММ ННРТГ по ДТ, яка представляє з себе квазілінійну систему у ЧП ГТ з заданими начальними та граничними умовами. Для розв'язання крайової задачі застосований МСР з використанням рівномірної скінчено-різницевої сітки та методів Бройдена і Ньютона для розв'язання СНАР. Побудовані алгоритми методів Бройдена та методу Ньютона. Також створений ПП для моделювання параметрів газового потоку при ННРТГ. Проведений аналіз ефективності методів Бройдена та Ньютона.

Після проведення чисельних експериментів можна зробити висновок, що метод Бройдена для даної задачі працює повільніше, ніж метод Ньютона.

Результаті дослідження будуть корисні в газовій промисловості при управлінні газового потоку, зокрема, в аварійних ситуаціях.

## ABSTRACT

Introductory note: 119 p., 20 tables, 32 figures, 2 appendixes, 18 sources.

UNSTEADY UNISOTHERMAL GAS TRANSPORT MODES, SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, FINITE-DIFFERENCE METHOD, BROIDEN METHOD, NEWTON METHOD.

Object of research – unsteady unisothermal gas flow regime (UUGFR) through pipeline section (PS).

Purpose of work – to carry out system analysis of the problem modeling and analysis of the UUGFR; selection of mathematical model (MM) of UUGFR; method selection and algorithm development for solving MM system of equations by finite difference method (FDM) using Broyden and Newton methods; implementation of application product (AP); analysis of the research results.

Methods of research – methods of numerical integration of systems of hyperbolic equations in partial derivatives (HE PD) and methods of solving systems of nonlinear algebraic equations (SNAE).

As a result of the attestation work, a systematic analysis of the mentioned problem was conducted. The MM of UUGFR on the PS was constructed, which represents a quasi-linear system of HE PD with given initial and boundary conditions. For the solution of the boundary value problem, a FDM was used using the uniform finite-difference grid with the Broyden and Newton methods for solving SNAE. The algorithms of the method under consideration using the Broyden and Newton methods are constructed. Also created AP for modeling the parameters of the gas flow at UUGFR. The efficiency of the Broyden and Newton methods is analyzed.

After conducting numerical experiments, we can conclude that the Broyden method works slower than the Newton method for this problem.

The results of the study will be useful in the gas industry in the management of gas flow, in particular, in emergencies.

## ЗМІСТ

	С.
Перелік умовних позначень, скорочень і термінів .....	7
Вступ .....	8
1 Системний аналіз проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу з використанням рівномірної скінчено-різницевої сітки та постановка задачі дослідження.....	10
1.1 Вербальна модель системи.....	10
1.2 Функціональна модель системи.....	11
1.3 Інформаційна модель .....	14
1.4 Кваліметрична модель .....	17
1.5 Змістовна постановка задачі .....	21
2 Формальна постановка задачі .....	24
2.1 Математична модель стаціонарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу газотранспортної системи .....	25
2.2 Математична модель нестационарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу газотранспортної системи .....	29
3 Вибір і обґрунтування використовуваного методу .....	34
3.1 Чисельний метод і алгоритм розрахунку стаціонарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу .....	34
3.2 Методи і алгоритми розв'язання системи рівнянь математичної моделі ННРТГ по ДТ з використанням методу Бройдена і Ньютона .....	36
4 Програмна реалізація та аналіз результатів дослідження.....	46
4.1 Опис програмного продукту .....	46
4.2 Результати дослідження .....	46
Висновки .....	63
Перелік джерел посилання .....	64
Додаток А Код програми розрахунку ННРТГ по ДТ з використанням методу Бройдена .....	66

Додаток Б Код програми розрахунку ННРТГ по ДТ з використанням методу

Ньютона..... 94

**ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ І ТЕРМІНІВ**

СРТГ – стаціонарний режим течії газу

ННРТГ – нестационарний неізотермічний режим течії газу

РСРС – рівномірна скінчено-різницева сітка

ГТС – газотранспортна система

ДТ – ділянка трубопроводу

ЛД – лінійна ділянка

ММ – математична модель

РТГ – режими течії газу

СР – система рівнянь

СА – системний аналіз

ПП – програмний продукт

КС – компресорна станція

ГУ – граничні умови

ПУ – початкові умови



## ВСТУП

Газ, за роки свого використання, сформував широку потребу в ньому в багатьох сферах суспільного виробництва. Підприємства, які застосовують природний газ, ще не мають важливих причин для заміни цього високоефективного енергоносія.

Рівень газового добутку на території України не задовольняє власних потреб держави, тому частину газу імпортується із-за кордону, але вже багато років функціонує газопровід, який поки що постачає газ із Росії в Європу, і частина цього трубопроводу проходить через всю територію України. Газ повинен бути доставлений до споживача з мінімальними втратами, і відповідальність за це має обслуговуючий труби.

Комп'ютер реагує на зміни середовища труби і впроваджує контрзаходи, якщо щось не так, набагато швидше людини. Для автоматизації процесу необхідно, щоби комп'ютер працював швидко, і при цьому не створювати проблеми, але фізичні процеси не прості. Кожний випадок треба розглядувати окремо задля запобігання створення моделі, яка може працювати лише теоретично. Це дає змогу створити модель, яка буде працювати оптимально хоча би для даної задачі. З першого погляду, дуже важко сказати як вирішувати поставлену задачу оптимально, але можна просто провести експерименти з ефективності того чи іншого чисельного методу розв'язання конкретної задачі.

Для перевірки цих методів – для того, щоби їх можливо було використовувати в реальних ситуаціях, необхідно створити математичну модель, основу на реальних даних РТГ та ДТ, а також створити ПП для вирішення поставленої задачі. Було проведено декілька досліджень на цю тему, в тому числі, використовуючи метод скінченних різниць з використанням РСРС – цей метод використовується для знаходження чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь, але в процесі з'являється необхідність вирішення системи нелінійних рівнянь, для якої зазвичай використовувався метод Ньютона, тому що він має велику швидкість збіжності.

Одним з недоліків метода Ньютона є перерахунок матриці Якобі, і зважаючи складність системи, доцільно перевірити методи, в яких використовується апроксимація матриці Якобі. Одним з таких методів є метод Бroyдена.

Метою атестаційної роботи є проведення системного аналізу проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу; вибір математичної моделі ННРТГ; вибір методу розв'язання рівнянь математичної моделі; розробка алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних методом скінченних різниць з використанням методу Бroyдена та методу Ньютона; створення програмного продукту, який розраховує параметри газового потоку при ННРТГ по ДТ з використанням методу Бroyдена та Ньютона; порівняння оптимальності методів в умовах даної задачі.

Об'єктом дослідження є нестационарний неізотермічний режим течії газу по ділянці трубопроводу.

Метод дослідження – методи чисельного інтегрування систем гіперболічних рівнянь у частинних похідних та методи розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь.

# 1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ НЕСТАЦІОНАРНОГО РЕЖИМУ ТЕЧІЇ ГАЗУ З ВИКОРИСТАННЯМ РІВНОМІРНОЇ СКІНЧЕНО-РІЗНИЦЕВОЇ СІТКИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

## 1.1 Вербальна модель системи

Складна система, яка буде досліджуватися, є «Моделювання та аналіз нестационарного режиму течії газу з використанням рівномірної скінчено-різницевої сітки».

Ціль створення системи: створення ММ нестационарного режиму течії газу, а також розв'язання задачі моделювання ННРТГ за допомогою методу скінченних різниць, та використання методу Бroyдена та Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь, яка з'являється в процесі розв'язання.

У системи є три метафункції: застосування методу Бroyдена, застосування методу Ньютона та порівняння ефективності використання цих методів в контексті задачі.

Призначення системи: розрахунок параметрів газу та газопроводу під час аварії.

Дана система складається з двох підсистем:

а) теоретична та обчислювальна база:

- 1) математичний апарат;
- 2) алгоритм методу скінченних різниць;
- 3) алгоритми методів розв'язання системи нелінійних рівнянь.

б) апарат керування:

- 1) прикладне програмне забезпечення;
- 2) дослідник;

Система, що розглядається, відноситься до цілеспрямованих систем, для яких призначення визначається їх можливістю (властивістю) сприймати потреби та виконувати певні дії для їх задоволення. Математична модель, а також її

аналіз, є призначенням системи. Для досягнення цілі, використовуються різноманітні ресурси. Такими ресурсами є: технологічні, енергетичні, часові, інформаційні.

Для процесу моделювання використовуються дослідник з такими інструментами як мовами програмування та математичні пакети. Для початку процесу необхідні дані про стаціонарний режим газу та граничні умови, а на виході системи отримуються результати аналізу.

Модель системи типу «чорний ящик» наведена на рисунку 1.1.

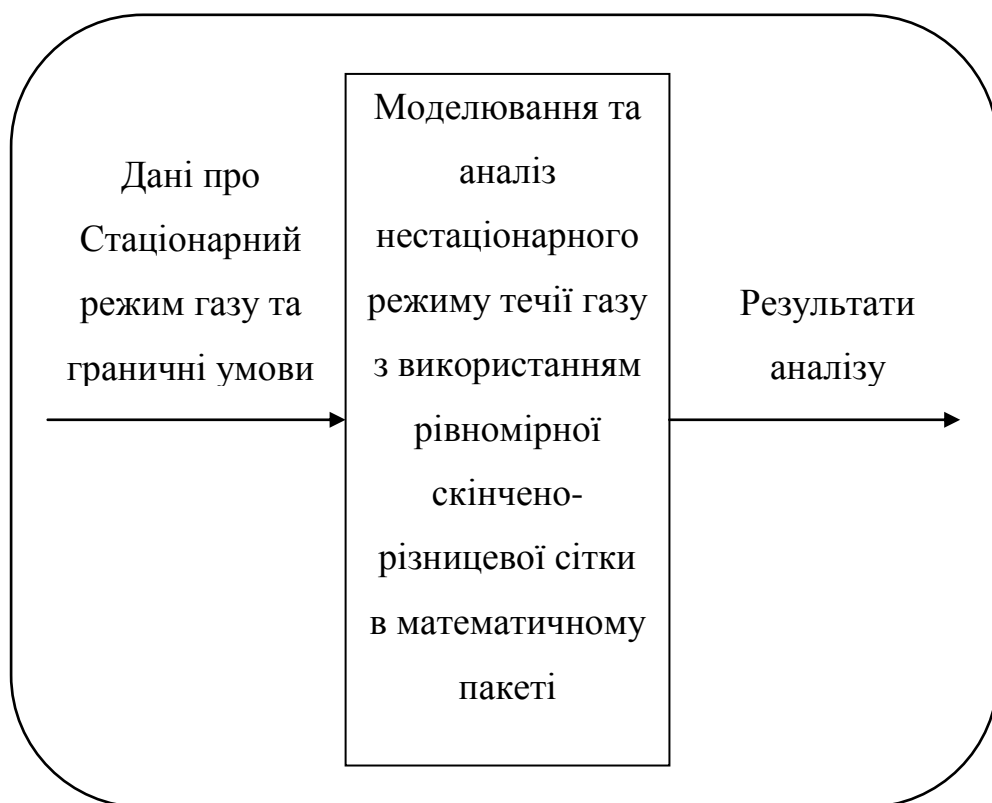


Рисунок 1.1 – Модель системи типу «чорний ящик»

## 1.2 Функціональна модель системи

Розглядаючи процес з позиції методології IDEF0, він має вигляд набору елементарних взаємозв'язаних між собою робіт з ресурсами, що надходять до кожної роботи [1]. На вхід системи подаються дані про стаціонарний режим га-

зу та граничні умови; керуючими засобами є метод скінченних різниць, математичний апарат та методи розв'язання системи нелінійних рівнянь; до механізмів відносяться прикладне програмне забезпечення та дослідник; на виході ми отримуємо результати аналізу моделі.

При застосуванні IDEF0 на новій системі визначаються вимоги та функції для подальшої розробки цієї системи, що відповідає вимогам та реалізує виділені функції. Якщо методологія IDEF0 використовується на існуючій системі, можна отримати інформацію про функції, які виконує система, та візуалізація механізмів, за допомогою яких ці функції виконуються. Перша діаграма в ієрархії діаграм IDEF0 завжди відображає функціонування системи в цілому (рисунок 1.2). Такі діаграми називають контекстними [1]. Після опису контексту, наступні діаграми показують більш детальний опис кожної роботи вищої діаграми окремо [2]. Цей процес називають декомпозицією, результат для даної контекстної діаграми системи наведено на рисунках 1.3–1.4.

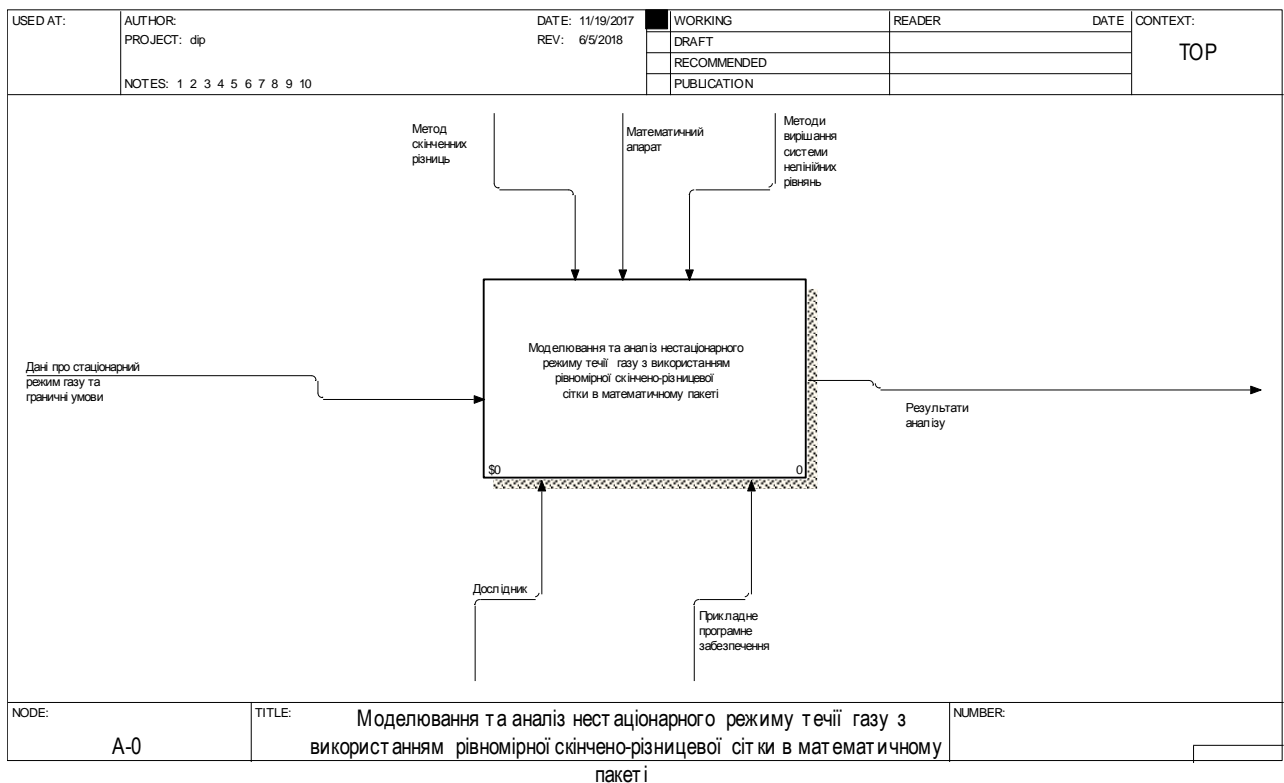


Рисунок 1.2 – Контекстна діаграма системи

З рисунку 1.3 можна робити висновки щодо внутрішньої будови системи, що розглядається. Основну проблему можна розбити на дві великих задачі: отримання моделі та аналіз отриманих результатів.

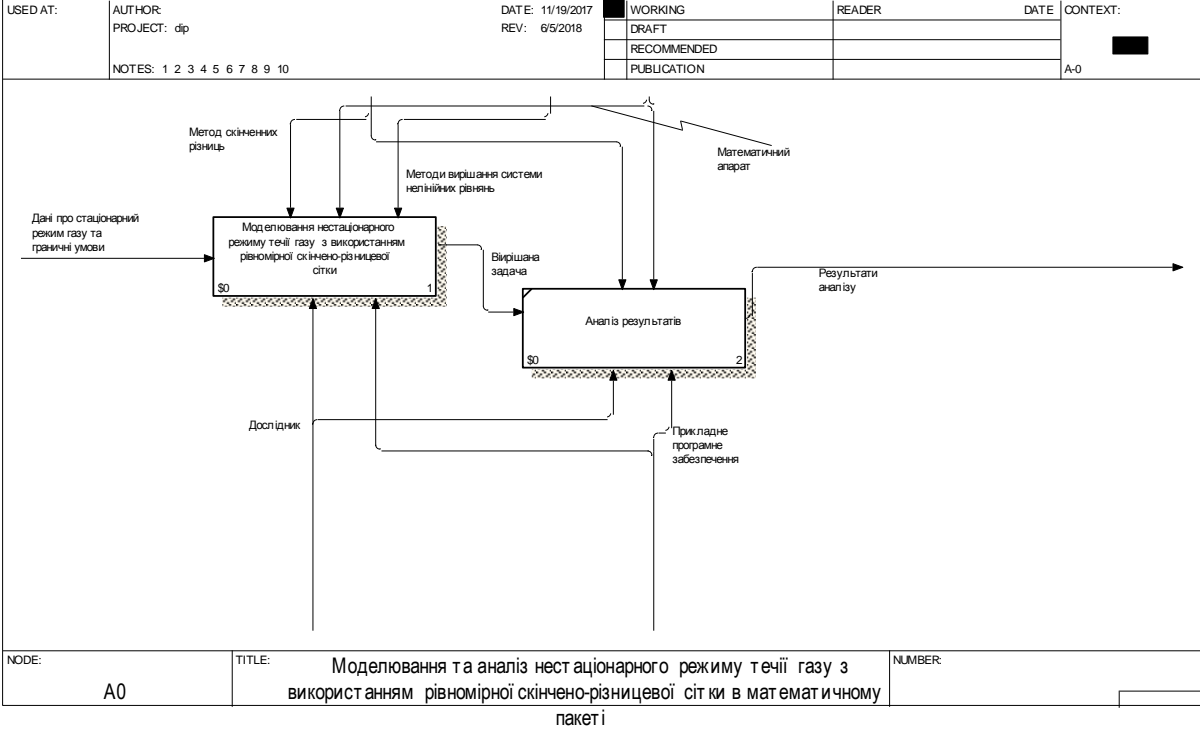


Рисунок 1.3 – Діаграма декомпозиції. Рівень A0

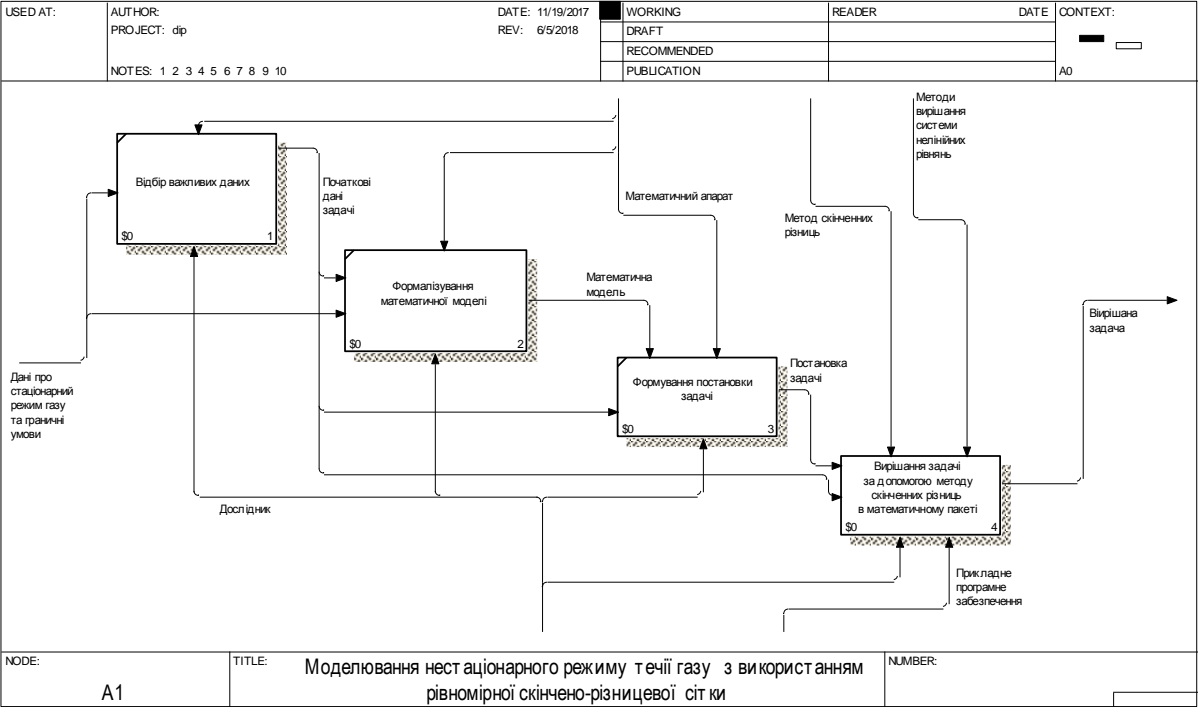


Рисунок 1.4 – Діаграма декомпозиції. Рівень A1

Розглянемо декомпозицію підсистеми А1 «Моделювання нестационарного режиму течії газу з використанням рівномірної скінчено-різницевої сітки» декомпозиції рівня А0, що зображено на рисунку 1.4. На даному етапі дослідження будується модель складного фізичного процесу, а також отримується розв'язок, на основі якого буде можливо в подальшому зробити висновки та провести аналіз. При розгляданні блоку А14 «Вирішення задачі за допомогою методу скінченних різниць в математичному пакеті» також використовується декомпозиція, що зображена на рисунку 1.5. Ця декомпозиція пояснює, як буде розроблятися програмний продукт на ЕОМ.

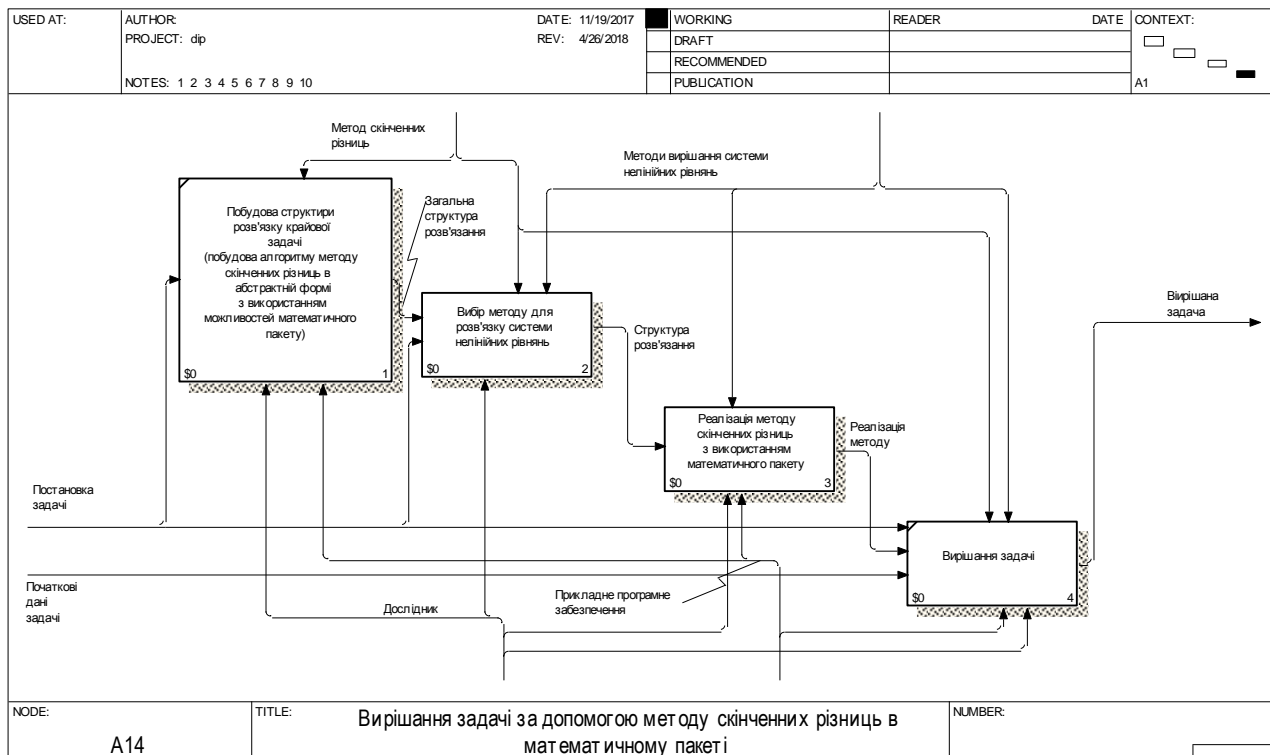


Рисунок 1.5 – Діаграма декомпозиції. Рівень А14

### 1.3 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи відображає зв'язки між елементами системи у вигляді структур даних, акцентуючи увагу дослідника на склад та взаємозв'язках потоків даних.

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) використовуються для опису документообігу та обробки інформації, і має тип модельної системи відображуючи досліджувану систему у вигляді мережі пов'язаних між собою робіт [3, 4].

Діаграми DFD має чотири елементи:

- стрілки (Позначають інформаційні потоки в системі документообігу, стрілки йдуть від об'єкта-джерела до об'єкта-приймача);
- роботи (Роботи мають вид прямокутників з округленими кутами. Ці елементи в DFD позначають функції або процеси, які змінюють і обробляють інформацію.);
- сховища даних (На одній діаграмі може бути присутнім кілька копій одного і того ж сховища даних. Сховища даних являють собою власне дані, до яких здійснюється доступ. Можуть бути змінені або створені роботами.);
- зовнішні посилання (Зовнішні посилання представляють собою організацію, людину або місце за рамками діаграми, і які беруть участь в процесі обміну інформацією з системою) [3].

Розглянемо декомпозицію системи «Моделювання та аналіз нестационарного режиму течії газу з використанням рівномірної скінченно-різницевої сітки в математичному пакеті» із застосуванням методології DFD.

Часто з'ясовується, що існуючі потоки інформації, важливі для діяльності компанії, реалізовані ненадійно і потребують реорганізації. Діаграмах потоків даних допомагає скласти узагальнену складну систему в загальну картину, яка дає чітке уявлення про те, які дані використовуються, і які функції виконуються системою документообігу [4].

На рисунку 1.7 зображена контекстна діаграма система, на рис. 1.8–1.9 декомпозиція системи рівня A0 і A3 відповідно.

На рівні A0 показано, як інструкції з першого відділу компанії створюють напрямок дослідження, на рівні A3 показано створення алгоритму для вирішення задачі та створення програмного продукту, який вирішує задачу.



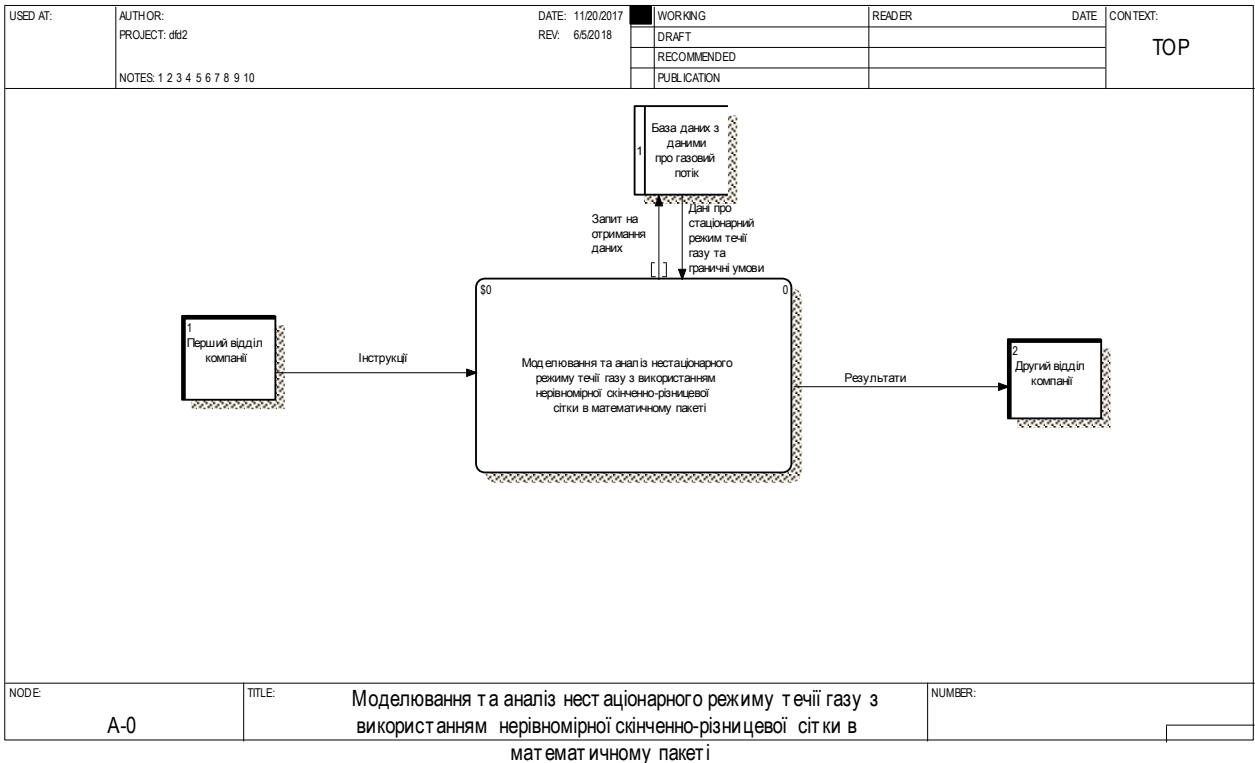


Рисунок 1.6 – Контекстна діаграма системи у методології DFD

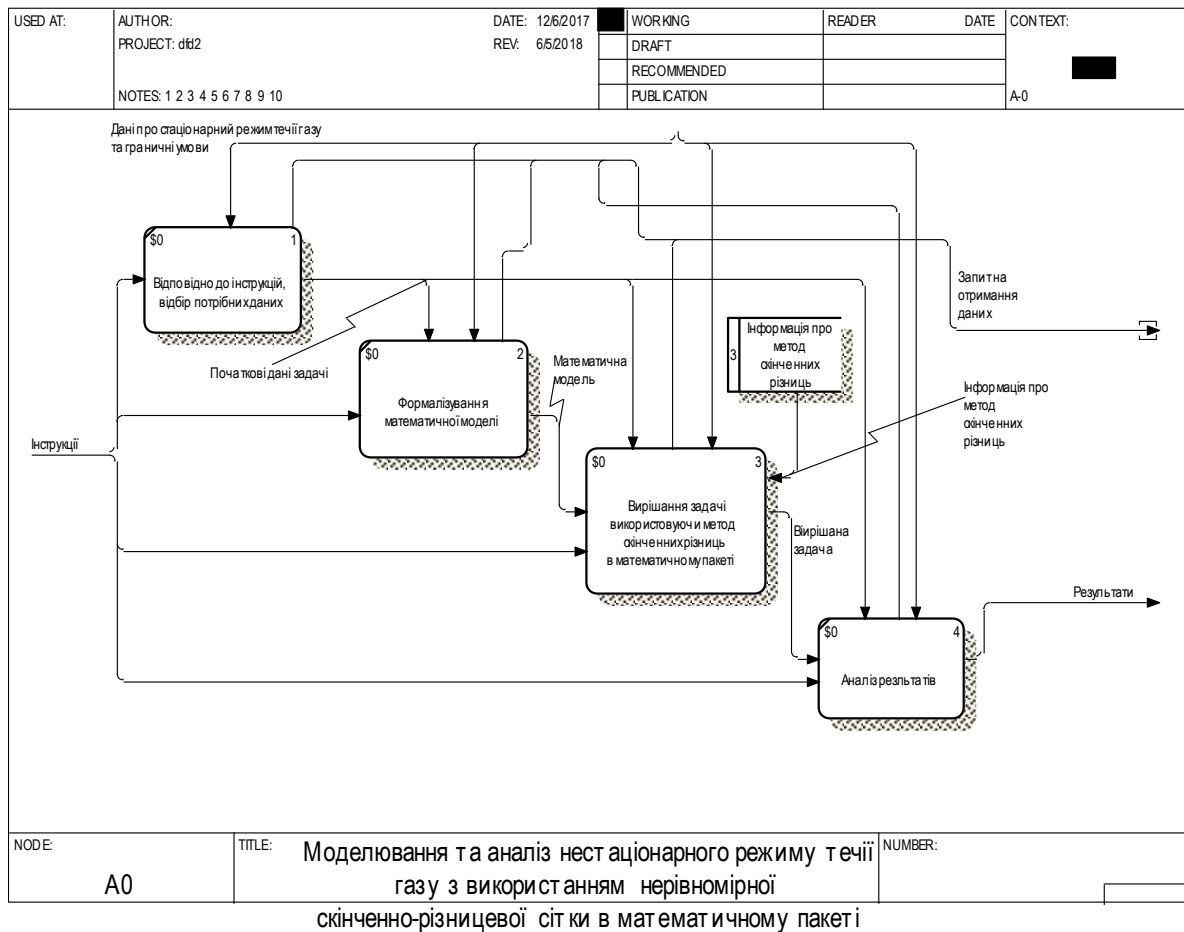


Рисунок 1.7 – Діаграма декомпозиції A0 у методології DFD

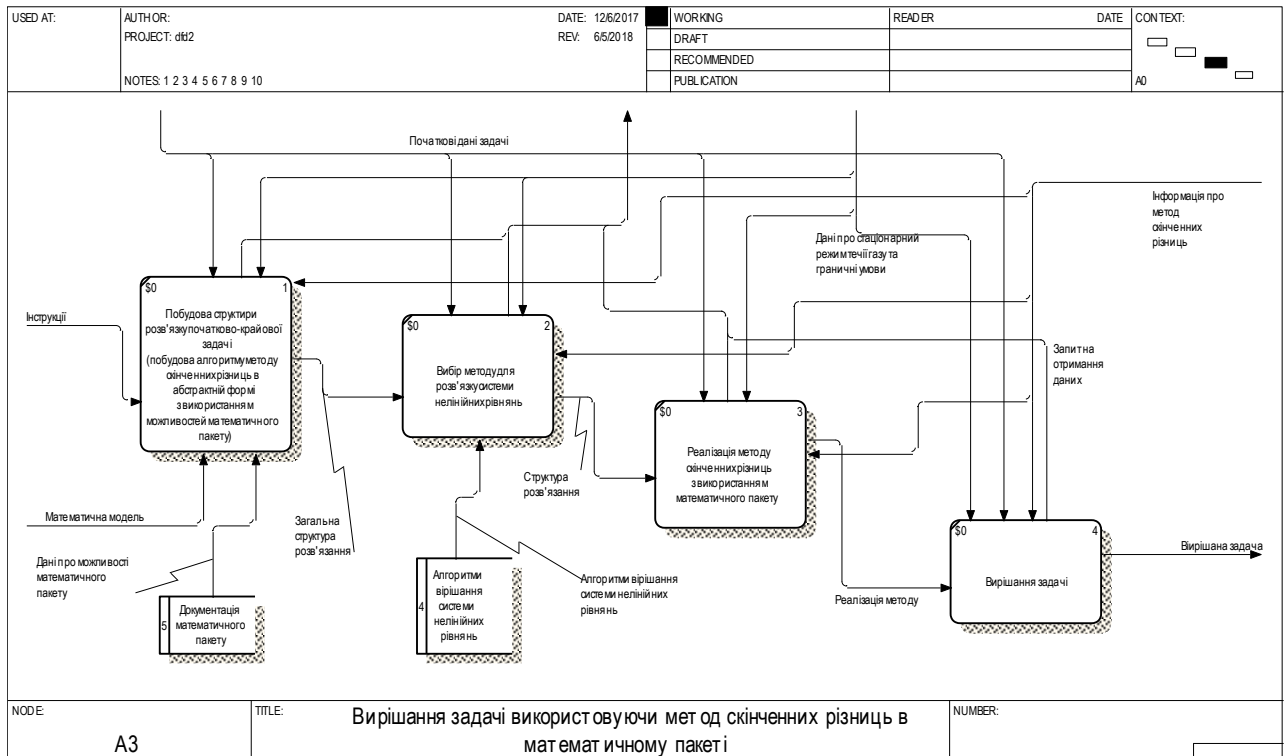


Рисунок 1.8 – Діаграма декомпозиції A3 у методології DFD

#### 1.4 Кваліметрична модель

Відомо, що для вирішення квазілінійної системи диференціальних рівнянь можна скористатися методом скінченних різниць. В процесі розв'язання цієї системи з'являється необхідність в вирішенні системи нелінійних рівнянь. Порівняємо деякі методи вирішення цієї системи, а саме метод Ньютона, модифікований метод Ньютона та метод Бroyдена, і виберемо один з них [5].

Для вибору методу скористались методом аналізу ієрархій [6]. Розробили ієрархічну модель властивостей якості системи.

Об'єкти:

- метод Ньютона (A1);
- модифікований метод Ньютона (A2);
- метод Бroyдена (A3).

Властивості:

- час обчислення (К1);
- ресурси ЕОМ (К2);
- швидкість збіжності (К3);
- складність операцій (К4).

Ієрархічна модель проблеми вибору у випадку багатокритеріальності має вигляд, зображений на рисунку 1.6.

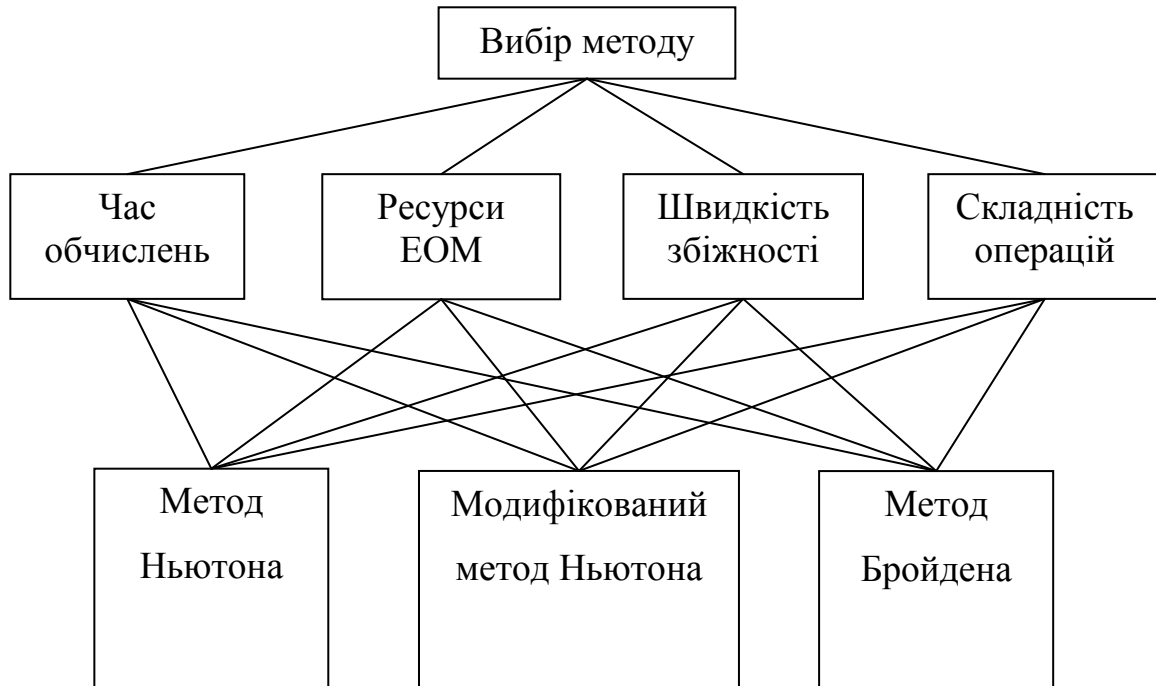


Рисунок 1.9 – Ієрархічна модель аналізу проблеми

Таблиця 1.1 – Матриця попарних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	К 1	К 2	К 3	К4	Оцінка компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
К 1	1	8	5	3	3,310	0,590	1,658
К 2	1/8	1	1/4	1/2	0,354	0,063	15,000
К 3	1/5	4	1	1/4	0,669	0,119	10,250
К4	1/3	2	4	1	1,278	0,228	4,750
Всього					5,610		4,228

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{4,228 - 4}{4 - 1} = 0,076.$$

Випадкова узгодженість 0,9.a

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,076}{0,9} = 0,084 = 8,4\%.$$

Для прийняття рішення щодо методу вирішення системи, необхідно провести порівняльний аналіз альтернатив [6]. Оцінивши їх відносно кожної з альтернатив, отримаємо данні, що представлені у таблицях 1.2–1.5. Випадкова узгодженість для матриць є рівною 0,58.

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	А 1	А 2	А 3	Вектор пріоритетів
А 1	1	1/5	1/7	0,075
А 2	5	1	1/2	0,333
А 3	7	2	1	0,592

Для таблиці 1.2 знайдемо:

$$\text{ІУ} = 0,007.$$

$$\text{ВУ} = 0,0122 = 1,22\%.$$

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	А 1	А 2	А 3	Вектор пріоритетів
А 1	1	1/7	1/6	0,067
А 2	7	1	3	0,641
А 3	6	1/3	1	0,293

Таблиця 1.4. – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	A 1	A 2	A 3	Вектор пріоритетів
A 1	1	9	9	0,814
A 2	1/9	1	2	0,114
A 3	1/9	1/2	1	0,072

Для таблиці 1.3:

$$IU = 0,050.$$

$$BU = 0,0861 = 8,61\%.$$

Для таблиці 1.4:

$$IU = 0,027.$$

$$BU = 0,0462 = 4,62\%.$$

Таблиця 1.5. – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 3	A 1	A 2	A 3	Вектор пріоритетів
A 1	1	1/6	1/8	0,060
A 2	6	1	1/4	0,249
A 3	8	4	1	0,691
Всього				

Для таблиці 1.5:

$$IU = 0,068.$$

$$BU = 0,117 = 11,70\%.$$

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві підрахунки, і зробити висновки.

Таблиця 1.6. – Кінцеві данні

Критерій /Альтернатива	К 1	К 2	К 3	К4	Узагальнені пріоритети
А 1	0,075	0,067	0,814	0,058	0,159
А 2	0,666	0,641	0,114	0,223	0,301
А 3	0,592	0,293	0,072	0,719	0,540

У таблиці 1.6 наведено результати, що дають нам змогу сказати, що найкращою для нас буде третя альтернатива, а саме метод Бройдена. Відносна узгодженість, при цьому, буде дорівнювати 6,34%.

### 1.5 Змістовна постановка задачі

Об'єкт дослідження – ННРТГ по ДТ.

Предмет дослідження – ММ ННРТГ по ДТ і чисельний метод для розрахунку таких режимів по ДТ.

Метою атестаційної роботи є порівняння ефективності методу Бройдена та методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь, яка з'являється в процесі розв'язання системи диференціальних рівнянь, яка описує нестационарний неізотермічний режим течії газу.

Проблемі моделювання режимів транспорту газу по системам газопостачання присвячується значна кількість досліджень. Це обумовлено постійним ускладненням і розвитком ГТС. Є необхідність створювати програмне забезпечення з аналізу ННРТГ при різкій зміні граничних умов в ГТС, в тому числі на ЛД, бо різкі зміни стану транспортування газу можуть бути викликані, наприклад, аварійними ситуаціями на ЛД, які призводять до того, що РТГ по ГТС стають неізотермічними і нестационарними.

Перш за все був проведений аналіз чисельних методів розв'язання систем гіперболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних, які описують

ННРТГ. Для чисельного розв'язання таких систем часто використовуються такі методи як метод скінченних різниць з використанням різних рівномірних і нерівномірних скінчено-різницевої сітки, метод кінцевого об'єму, метод скінченних різниць з використанням методу Лагранжевих частинок (модифікація методу характеристик при розв'язання гіперболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних), метод характеристик (Массо, модифікований Массо), інтегро-інтерполяційний метод та ін. Кожен з цих методів має як переваги, так і недоліки, в роботі обраний метод скінченних різниць з використанням рівномірної скінченно-різницевої сітки [7].

Так як система ГТС складна, то побудова ММ, вибір методу і алгоритму розв'язання систем рівнянь ММ є суттєвою частиною задачі моделювання та аналізу СНРТГ і ННРТГ по системі ГТС

ГТС транспортує газ в умовах постійної зміни стану навколишнього середовища, навантаження, внутрішнього стану об'єктів газопроводу, а також в аварійних ситуаціях. Для безперебійного процесу постачання газу споживачам із заданими якісними показниками виникає необхідність моделювання та управління ННРТГ з метою адаптації ГТС до постійно змінюваних умов. Ці специфічні властивості дуже важливі при розробці автоматизованих систем управління.

Найбільш нестаціонарні режими функціонування ЛД, прилеглих до споживачів та в місцях виникнення аварій. При цьому доцільно використовувати критерій міри нестаціонарності РТГ і класифікувати за даним критерієм режими функціонування на ЛД на нестаціонарні і квазістаціонарних.

Міра нестаціонарності режимів транспорту газу по ЛД визначається за такою формулою

$$M = \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{i,j} |P_{H_i} - P_{H_j}|, \\ \max_{i,j} |P_{K_i} - P_{K_j}|, \end{array} \right.$$

де  $P_{K_j}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) – заміри тиску в кінці ЛД в момент часу  $t_j$ , протягом аналізованого періоду  $[0, T]$ ;

$P_{H_i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) – замір тиску на початку ЛД протягом того ж періоду часу.

Якщо  $M \leq \varepsilon$ , то режим вважається квазістаціонарним, в іншому випадку – нестаціонарним, в інтервалі часу  $[0, T]$ .  $\varepsilon$ , зазвичай, приймається рівною одній атмосфері. Обов'язково необхідно враховувати два кінця ЛД.

В атестаційній роботі розглядається ділянка трубопроводу заданої довжини фіксованого діаметру з жорсткими стінками. Задано початковий розподіл газу. На границях ділянки відбувається різка зміна граничних умов, тому режими течії газу стають нестаціонарними і неізотермічними. Вважаємо, що на границях ділянки задані або тиск, або витрата газу як функції часу, крім того задана температура газу, що надходить на ділянку.

Поставлена мета атестаційної роботи зумовлює наступні етапи дослідження:

- вибір математичної моделі нестаціонарного неізотермічного режиму течії газу;
- розробка алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь у частинних похідних методом скінченних різниць з використанням методу Бroyдена при розв'язанні системи нелінійних рівнянь;
- створення програмного продукту, який розраховує параметри газового потоку при ННРТГ по ДТ з використанням методу Бroyдена та методу Ньютона;
- порівняння працездатності методів Бroyдена та Ньютона.

Результатом буде порівняння використання методів Бroyдена та Ньютона для даної задачі, і висновок, який метод краще використовувати.



## 2 ФОРМАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Система постачання газу з позиції опису режимів транспорту газу представляє собою лінійні ділянки (ЛД) та компресорні станції (КС).

В роботі досліджується ДТ довжини  $L$  (рис. 2.1).

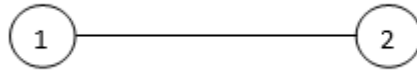


Рисунок 2.1 – Ділянка трубопроводу

На рисунку 2.1 у схематичному вигляді показується ДТ, де кружечки 1, 2 це вхід та вихід цієї ДТ.

Розглядається випадок, коли на вході та/або виході ДТ відбувається різка зміна граничних умов. Такий режим є нестационарними та неізотермічними.

Для описування режиму виділимо область  $\Lambda = \{(x, t), x \in [0, L], t \in [0, T_{\max}]\}$ , де  $T_{\max}$  – кінцевий час процесу. Характеристиками режиму виступають функції  $W(x, t)$ ;  $P(x, t)$ ;  $T(x, t)$ : питомої масової витрати, тиску і температури, заданих в області  $\Lambda$ .

У вузлах 1,2 задані ГУ 1-го або 2-го типу, тобто задані або тиск, або витрата газу, як функція часу, крім того задана температура газу, що надходить [8]. Початковий розподіл параметрів газового потоку має вид:

$$\begin{aligned} W(x, 0) &= W_0(x), \\ P(x, 0) &= P_0(x), \\ T(x, 0) &= T_0(x), \quad x \in (0, L), \end{aligned}$$

де  $W_0(x), T_0(x), P_0(x)$  – задані функції.

Граничні умови матимуть вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0,t) = P^0(t), \\ G(0,t) = G^0(t), \\ T(0,t) = T^0(t), \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} P(L,t) = P^1(t), \\ G(L,t) = G^1(t), \end{array} \right.$$

де  $G^0(t)$ ,  $T^0(t)$ ,  $P^0(t)$ ,  $G^1(t)$ ,  $P^1(t)$  – задані функції [8];

$G(x, t)$  – масова витрата.

Для початку передбачення поведінки газового потоку, необхідно задати початковий розподіл параметрів газового потоку: витрат, тиску і температури. Для реалістичності, ці параметри буде доцільно взяти з розподілу, отриманого за умови стаціонарного режиму течії газу.

## 2.1 Математична модель стаціонарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу газотранспортної системи

СРТГ має декілька варіацій опису, одною з моделей опису є випадок горизонтального газопроводу. Розглянемо його.

Скористаємося рівнянням енергії, рівнянням збереження кількості руху та рівнянням нерозривності (масова витрата газу по трубопроводу постійна).

Рівняння кількості руху має вигляд:

$$dP + 2\rho VdV + dh = 0, \quad (2.1)$$

де  $\rho$  – щільність газу;

$dh$  – питома енергія, витрачена на подолання тертя;

$V(x)$  – швидкість руху газу в трубопроводі;

$P(x)$  – тиск газу [9].

В ГТС має місце турбулентний режим течії з квадратичним законом опору

$$dh = \rho\lambda \frac{V^2}{2D} dx, \quad (2.2)$$

де  $D$  – діаметр труби;

$x$  – координата, що збігається з віссю труби і спрямована за течією газу;

$\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору.

В (2.1) другим членом для ГТС можна знехтувати.

Нехай масова витрата газу  $G = \rho VS$ , де  $S$  – площа поперечного перерізу труби, тоді підставляючи вираз (2.2) в рівняння (2.1), отримаємо

$$\rho dP + \lambda \frac{G^2}{2DS^2} dx = 0. \quad (2.3)$$

При  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ , вираз (2.3) прийме в такий вигляд:

$$\rho dP + 8\lambda \frac{G^2}{\pi^2 D^5} dx = 0. \quad (2.4)$$

Візьмемо рівняння стану у вигляді:

$$P = zgRT\rho, \quad (2.5)$$

де  $T$  – температура газу;

$R$  – питома газова стала;

$z$  – коефіцієнт стисливості газу.

За допомогою (2.5) виключаємо щільність  $\rho$  із рівняння (2.4), та отримаємо

$$PdP + 8zgRT\lambda \frac{G^2}{\pi^2 D^5} dx = 0. \quad (2.6)$$

Якщо взяти інтеграл від 0 до  $L$  в рівнянні (2.6), отримаємо

$$P_n^2 - P_k^2 = \frac{16}{\pi^2} z_{cp} gRT_{cp} \lambda \frac{L}{D^5} G^2, \quad (2.7)$$

де  $z_{cp}$ ,  $T_{cp}$  – середні значення коефіцієнта стисливості і температури;

$P_n$ ,  $P_k$  – тиск на початку і кінці труби;

$L$  – довжина розрахункової ділянки газопроводу.

Рівняння (2.7) після спрощення набуває вигляд:

$$P_n^2 - P_k^2 = cG^2, \quad (2.8)$$

$$\text{де } c = \frac{16}{\pi^2} z_{cp} gRT_{cp} \lambda \frac{L}{D^5}.$$

За формулою

$$T_{cp} = T_{cp} + (T_n - T_{cp}) \frac{1 - e^{-\theta L}}{\theta L}, \quad (2.9)$$

де  $\theta = \frac{\pi KD}{C_p G}$ , визначаємо середнє значення температури  $T_{cp}$  на ділянці газопро-

воду довжиною  $L$ .

В якості  $P_{cp}$  беремо середнє інтегральне значення тиску по ділянці

$$P_{cp} = \frac{2}{3} \left( P_n + \frac{P_{\kappa}^2}{P_n + P_{\kappa}} \right). \quad (2.10)$$

Значення  $z_{cp}$  можна знайти за формулами:

$$z_{cp} = 1 + 0,07 \frac{P_{cp}}{P_{\kappa}} \frac{T_{\kappa p}}{T_{cp}} \left( 1 - 6 \frac{T_{\kappa p}^2}{T_{cp}^2} \right), \quad (2.11)$$

$$P_{\kappa p} = (-2,4286 \cdot \sigma^2 + 2,19 \cdot \sigma + 46,776),$$

$$T_{\kappa p} = -20 \cdot \sigma^2 + 179,6 \cdot \sigma + 79,68,$$

де  $\sigma = 1,206 \cdot \Delta$ ;

$P_{\kappa p}$ ,  $T_{\kappa p}$  – критичні тиск і температура.

Енергетичне рівняння для горизонтальних газопроводів має вигляд:

$$\frac{dT}{dx} + \frac{4KS}{C_p DG} (T - T_{cp}) = 0, \quad (2.12)$$

де  $K$  – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;

$C_p$  – питома теплоємність газу при постійному тиску.

Розв'язуючи рівняння (2.12) методом розділення змінних

$$\frac{dT}{T - T_{cp}} = -\frac{4KS}{C_p DG} dx,$$

$$\ln(T_x - T_{cp}) - \ln(T_n - T_{cp}) = -\frac{4KS}{C_p DG} x,$$

отримаємо

$$T_x = T_{zp} + (T_n - T_{zp}) e^{-\frac{4KS}{C_p DG} x}.$$

Оскільки  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ , отримаємо

$$T_x = T_{zp} + (T_n - T_{zp}) e^{-\frac{\pi KD}{C_p G} x}.$$

Температура газу в будь-якій точці  $x$  ділянки газопроводу знаходиться за формулою В. Г. Шухова

$$T_x = T_{zp} + (T_n - T_{zp}) e^{-\theta x}, \quad (2.13)$$

де  $T_{zp}$  – середня температура ґрунту на глибині залягання газопроводу;

$T_n$  – температура газу на початку ділянки;

$x$  – відстань від початку ділянки до точки з координатою  $x$  [9].

Таким чином, ММ СРТГ описується системою (2.8), (2.13).

## 2.2 Математична модель нестационарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу газотранспортної системи

Вважаємо, що ДТ це циліндричної труба, яка має постійний діаметр. Для описання ММ нестационарного неізотермічного режиму течії газу в ній, скористаємося квазілінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, отриманої із загальних рівнянь Нав'є-Стокса газової динаміки для однови-

мірного випадку. З урахуванням відсутності масообміну з навколишнім середовищем, стаціонарності режимів теплообміну з навколишнім середовищем та нехтування теплофізичними властивостями середовища ММ буде мати вид:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [P + (1 + \beta)\rho V^2] = -\rho \left[ \frac{\lambda |V| V}{2D} + g \frac{dh}{dx} \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho V \left( E + \frac{P}{\rho} \right) \right) = \frac{4K}{D} (T_{ep} - T) - \rho V g \frac{dh}{dx}, \quad (2.16)$$

де  $\rho(x, t)$ ,  $V(x, t)$ ,  $T(x, t)$ ,  $P(x, t)$  – характеристики газу: щільність, швидкість, температура, тиск;

$\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору;

$t, x$  – часова і просторова координата;

$K$  – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;

$D$  – діаметр труби;

$h$  – глибина залягання труби;

$T_{ep}$  – температура ґрунту;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$\beta$  – поправка Коріоліса на нерівномірний розподіл швидкостей в перетині;

$E$  – повна енергія одиниці маси [8].

Для ННРТГ, не порушуючи загальності, можна ввести такі припущення:

а) в рівняннях (2.14) і (2.15) можна знехтувати зміною температури, вважаючи, що похідні від температури дуже малі,

б) поправкою Коріоліса можна знехтувати, так як можна вважати, що швидкості потоку газу розподілені рівномірно в перетині.

Доповнимо систему (2.14)–(2.16) рівнянням стану

$$\frac{P}{\rho} = zgRT. \quad (2.17)$$

Після відповідних перетворень, система прийме вигляд:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(1 - \alpha TS \frac{W^2}{P^2}\right) \frac{\partial P}{\partial x} + 2\alpha TS \frac{W}{P} \frac{\partial W}{\partial x} + \beta TS \frac{W|W|}{P} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P}{T} \frac{dh}{dx} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha TS \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha TS \frac{W}{P} \gamma \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha S \frac{T^2}{P} (\gamma - 1) \frac{\partial W}{\partial x} - \\ & - \frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T}{P} (T - T_{sp}) - g(\gamma - 1) \frac{TW}{P} \frac{dh}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

де  $\alpha = \frac{zgR}{S}$ ;

$$\beta = \frac{\lambda\alpha}{2D}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_p - zgR}$$

$W(x,t)$  – питома масова витрата;

$C_p$  – питома теплоємність газу;

$S$  – площа поперечного перерізу.

Систему рівнянь (2.18)–(2.20) напишемо в матричній формі

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + B(x,t,\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Phi(x,t,\phi), \quad (2.21)$$

де



$$B(x,t,\phi) = \begin{bmatrix} 2\alpha TS \frac{W}{p} & 1 - \alpha TS \frac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S \frac{T^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & \alpha TS \frac{W}{p} \gamma \end{bmatrix},$$

$$\Phi(x,t,\phi) = \begin{bmatrix} -\beta TS \frac{W|W|}{p} - \frac{g}{\alpha S} \frac{p}{T} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T}{p} (T - T_{cp}) - g(\gamma - 1) \frac{TW}{p} \frac{dh}{dx} \end{bmatrix},$$

матриці, елементи яких задані неперервні та неперервно-диференційовані функції.

Для визначання типу системи рівнянь (2.21) необхідно знайти розв'язок рівняння

$$\det(E - \theta B) = 0, \quad (2.22)$$

де  $\det$  – детермінант матриці;

$E$  – одинична матриця.

Отримуємо:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \theta 2\alpha TS \frac{W}{p} & -\theta(1 - \alpha TS \frac{W^2}{p^2}) & 0 \\ -\theta \alpha TS & 1 & 0 \\ -\theta \alpha S \frac{T^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & 1 - \theta \alpha TS \frac{W}{p} \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Значення  $\theta$  знайдемо з рівняння

$$\left(1 - \theta \alpha T S \frac{W}{P} \gamma\right) \left(1 - \theta 2 \alpha T S \frac{W}{P} + (-\theta + \alpha T S \frac{W^2}{P^2}) \theta \alpha T S\right) = 0, \quad (2.24)$$

$$\theta_1 = \frac{P}{\alpha^2 \gamma W}, \quad \theta_2 = \frac{1}{\alpha^2 \frac{W}{P} - \alpha}, \quad \theta_3 = \frac{1}{\alpha^2 \frac{W}{P} + \alpha}.$$

Таким чином, рівняння (2.24) в будь-якій точці  $(x, t, W, P, T)$  області  $\Omega: \{x > 0, t > 0, W \leq 0, P > 0, T > 0\}$  щодо  $\theta$  має три різних дійсних корені, це значить система (2.21) є гіперболічною в даній області.

Отже, ННРТГ описуються квазілінійною системою диференціальних рівнянь гіперболічного типу (2.21), з відповідними ГУ і ПУ.

ГУ в першому вузлі:

$$\begin{cases} P(t, 0) = P^0(t), \\ G(t, 0) = G^0(t), \\ T(t, 0) = T^0(t). \end{cases} \quad (2.25)$$

ГУ в другому вузлі:

$$\begin{cases} P(t, L) = P^1(t), \\ G(t, L) = G^1(t), \end{cases} \quad (2.26)$$

де  $G^0(t), T^0(t), P^0(t), G^1(t), P^1(t)$  – задані функції.

ПУ мають вигляд:

$$\begin{aligned} W(0, x) = W_0(x), P(0, x) = P_0(x), T(0, x) = T_0(x), \\ x \in (0, L), \end{aligned} \quad (2.27)$$

де  $W_0(x), T_0(x), P_0(x)$  – задані функції.

### 3 ВИБІР І ОБГРУНТУВАННЯ ВИКОРИСТОВУВАНОВОГО МЕТОДУ

#### 3.1 Чисельний метод і алгоритм розрахунку стаціонарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу

Для розрахунку СРТГ, який описується ММ виду (2.8) і (2.13), використовується метод ітерацій. Приведемо алгоритм розв'язку.

Для початку вводимо початкові дані і значення використовуваних величин.

Зовнішній діаметр ділянки газопроводу  $D_H = D + 2\delta$ .

Значення температури і тиску в кінці ділянки обчислюються за представленим алгоритмом:

а) переводимо в систему одиниць СІ:

$$T_{zp} = t_{zp} + 273,$$

$$T_n = t_n + 273;$$

б) використовуючи формулою (2.13), температура газу  $T_l$  в даній точці ділянки газопроводу знаходиться як:

$$T_l = T_{zp} + (T_n - T_{zp})e^{-\theta l},$$

$$t_l = T_l - 273,$$

$$z_{cp} = z_n;$$

$$в) \theta = \frac{62,6 \cdot k_T \cdot D_H}{C_p \cdot \Delta \cdot q \cdot 10^6};$$

$$г) C = \frac{\Delta \cdot l \cdot T_{cp} \cdot z_{cp}}{\alpha^2 \cdot \phi^2 \cdot (1,64 \cdot 10^{-6})^2 \cdot D^{5,2} \cdot E^2};$$

д) визначимо середню температуру газу:

$$T_{cp} = T_{cp} + (T_n - T_{cp}) \frac{1 - e^{-\theta l}}{\theta l};$$

е) значення тиску  $P_l$  знаходиться з формули

$$P_n^2 - P_l^2 = C \cdot |q| \cdot q;$$

ж) по формулі (2.10), знаходимо середнє значення тиску газу:

$$P_{cp} = \frac{2}{3} \left( P_n + \frac{P_l^2}{P_n + P_l} \right);$$

з) середній коефіцієнт стисливості газу по довжині ділянки:

$$z_{cp} = 1 - ((P_{cp} - 6) \cdot (0,345 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta - 0,446 \cdot 10^{-3}) + 0,015) \cdot (1,3 - 0,0144 \cdot (T_{cp} - 282,8));$$

и)  $S = P_l$ ;

$$і) C = \frac{\Delta \cdot l \cdot T_{cp} \cdot z_{cp}}{\alpha^2 \cdot \phi^2 \cdot (1,64 \cdot 10^{-6})^2 \cdot D^{5,2} \cdot E^2};$$

$$к) P_l = \sqrt{P_n^2 - C \cdot |q| \cdot q};$$

л) якщо  $|S - P_l| > \varepsilon$ , то  $P_l$  знайдено і потрібно перейти до пункту м), в іншому випадку потрібно повторити процес починаючи з пункту ж).

м) вивід  $t_l, P_l, T_{cp}, z_{cp}$ .

### 3.2 Методи і алгоритми розв'язання системи рівнянь математичної моделі ННРТГ по ДТ з використанням методу Бroyдена і Ньютона

Розв'язувати систему (2.21) будемо числено. Використаємо РСРС [10–13], при цьому початковими умовами виступають (2.27), а граничні умови мають вид (2.25)–(2.26). Для початку розрахунку, розділимо відрізок  $[0, L]$  на  $n$  відрізків довжиною  $\Delta x$ , отримаємо  $n + 1$  точку розбиття  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ .

На рисунку 3.1 шаблон для апроксимації похідних в  $i$ -й проміжній точці.

На рис. 3.2 зображений шаблон для апроксимації похідних в нульовій точці.

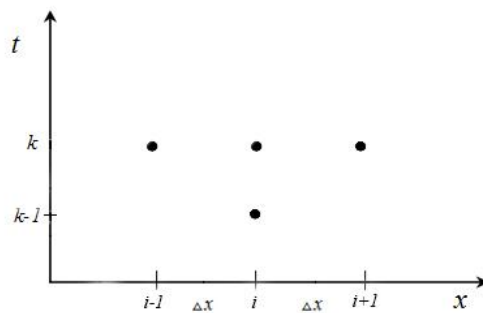


Рисунок 3.1 – Шаблон для апроксимації похідних в  $i$ -й точці

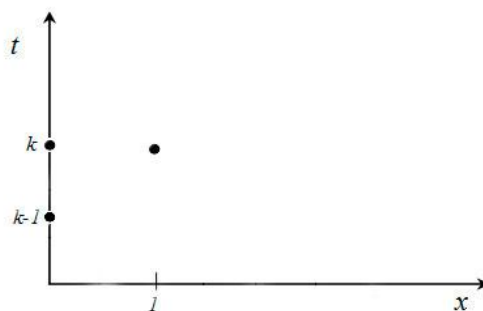


Рисунок 3.2 – Шаблон для апроксимації похідних на початку ділянки в нульовій точці

Похідні в (2.21) замінюються за формулами:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_i^k = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{\tau}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3.1)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i^k = \begin{cases} \frac{\phi_1^k - \phi_0^k}{\Delta}, & i = 0. \\ \frac{\phi_{i+1}^k - \phi_{i-1}^k}{2\Delta}, & i = \overline{1, n-1}. \\ \frac{\phi_n^k - \phi_{n-1}^k}{\Delta}, & i = n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Використовуючи формули (3.1) і (3.2) отримаємо наступну систему різницевих рівнянь для системи (2.21):

$$-\frac{1}{\Delta} B_0^k \phi_0^k + \frac{1}{\tau} \phi_0^k + \frac{1}{\Delta} B_0^k \phi_1^k = \Phi_0^k + \frac{1}{\Delta} \phi_0^{k-1}, \quad i = 0. \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{2\Delta} B_i^k \phi_{i-1}^k + \frac{1}{\tau} \phi_i^k + \frac{1}{2\Delta} B_i^k \phi_{i+1}^k = \Phi_i^k + \frac{1}{\tau} \phi_i^{k-1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3.4)$$

$$-\frac{1}{\Delta} B_n^k \phi_{n-1}^k + \frac{1}{\tau} \phi_n^k + \frac{1}{\Delta} B_n^k \phi_n^k = \Phi_n^k + \tau \phi_n^{k-1}, \quad i = n. \quad (3.5)$$

Розв'язок системи рівнянь (3.3)–(3.5) буде вектор

$$\phi^k = (\phi_0^k, \phi_1^k, \phi_2^k, \dots, \phi_i^k, \dots, \phi_n^k) = (W_0^k, P_0^k, T_0^k, W_1^k, P_1^k, T_1^k, \dots, W_n^k, P_n^k, T_n^k).$$

Для розв'язку нелінійної системи використаємо метод Бройдена [14–17] та метод Ньютона [17, 18]. На  $s$ -й ітерації  $k$ -го часового шару отримаємо систему лінійних рівнянь, яка описана в роботі [13], і яка в загальному вигляді буде мати вид:

$$A^{k,s} \delta \phi^{k,s+1} = \psi^{k,s},$$

де  $\delta\phi^{k,s+1}$  – вектор поправок до невідомих на  $s$ -й ітерації;

$\psi^{k,s}$  – вектор нев'язок;

Для методу Бройдена  $A^{k,s}$  має вигляд:

$$A^{k,0} = \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} \right]_{\phi^{k,0}},$$

$$A^{k,s+1} = A^{k,s} + \frac{(\psi^{k,s+1} - \psi^{k,s} + A^{k,s} \cdot \delta\phi^{k,s+1}) \cdot \delta\phi^{k,s+1}}{\|\delta\phi^{k,s+1}\|^2}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

де  $A^{k,s}$  – апроксимація матриці Якобі на кожній ітерації, крім нульової.

Для методу Ньютона  $A^{k,s}$  має вигляд:

$$A^{k,s} = \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} \right]_{\phi^{k,s}},$$

де  $A^{k,s}$  – матриця Якобі.

З лінійної системи отримуються компоненти векторів поправок до невідомих.

Вектори нев'язок в граничних точках 0 і  $n$  для  $k$ -го часового шару  $s$ -ої ітерації мають вигляд:

$$\psi_0^{k,s} = \left( \frac{1}{\tau} \phi_0^{k,s} - \frac{1}{\Delta} B_0^{k,s} \phi_0^{k,s} \right) + \frac{1}{\Delta} B_0^{k,s} \phi_1^{k,s} - \Phi_0^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_0^{k-1}; \quad (3.6)$$

$$\psi_n^{k,s} = \left( \frac{1}{\tau} \phi_n^{k,s} + \frac{1}{\Delta} B_n^{k,s} \phi_n^{k,s} \right) - \frac{1}{\Delta} B_n^{k,s} \phi_{n-1}^{k,s} - \Phi_n^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_n^{k-1}. \quad (3.7)$$

Для внутрішніх точок ділянки ( $i = 1, \dots, n-1$ ) вектори нев'язок обчислю-

ються за формулою:

$$\psi_i^{k,s} = -\frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} \phi_{i-1}^{k,s} + \frac{1}{\tau} \phi_i^{k,s} + \frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} \phi_{i+1}^{k,s} - \Phi_i^{k,s} - \frac{1}{\tau} \phi_i^{k-1}. \quad (3.8)$$

Враховуючи співвідношення (3.6)–(3.8), матриця Якобі  $\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} \right]_{\phi^{k,s}}$  буде

мати вигляд:

$$\left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi^k} \right]_{\phi^{k,s}} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_0^k} \right]_{\phi^{k,s}} & \frac{1}{\Delta} B_0^{k,s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\Delta} B_1^{k,s} & \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_1^k} \right]_{\phi^{k,s}} & \frac{1}{2\Delta} B_1^{k,s} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} & \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_i^k} \right]_{\phi^{k,s}} & \frac{1}{2\Delta} B_i^{k,s} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} B_{n-2}^{k,s} & \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_{n-2}^k} \right]_{\phi^{k,s}} & \frac{1}{2\Delta} B_{n-2}^{k,s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\Delta} B_{n-1}^{k,s} & \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_{n-1}^k} \right]_{\phi^{k,s}} & \frac{1}{2\Delta} B_{n-1}^{k,s} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Delta} B_n^{k,s} & \left[ \frac{\partial \psi^k}{\partial \phi_n^k} \right]_{\phi^{k,s}} \end{bmatrix}.$$

Згідно (3.6) з урахуванням системи (2.21) напишемо вирази для координат вектору нев'язок  $\psi_0^{k,s}$ :



$$\psi_{0,1} = \frac{1}{\tau}(W_0 - W_0^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha T_0 S W_0}{P_0} (W_1 - W_0) + \left( 1 - \alpha S \frac{T_0 W_0^2}{P_0^2} \right) (P_1 - P_0) \right] +$$

$$+ \beta S \frac{T_0 W_0 |W_0|}{P_0} + \frac{g}{\alpha S T_0} \frac{P_0}{dx} dh;$$

$$\psi_{0,2} = \frac{1}{\tau}(P_0 - P_0^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \alpha T_0 S (W_1 - W_0);$$

$$\psi_{0,3} = (T_0 - T_0^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \left[ (\gamma - 1) \alpha \frac{T_0^2}{P_0} S \cdot (W_1 - W_0) + \gamma \alpha T_0 S \frac{W_0}{P_0} (T_1 - T_0) \right] +$$

$$+ \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{T_0}{P_0} (T_0 - T_{cp}) + g (\gamma - 1) \frac{T_0 W_0}{P_0} \frac{dh}{dx}.$$

Елементи матриці Якобі  $\left[ \frac{\partial \psi_0^k}{\partial \phi_0^k} \right]_{\phi^{k,s}}$  записуються в такий спосіб:

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial W_0} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha T_0 S}{P_0} (W_1 - 2W_0) + (P_1 - P_0) \left( \frac{-2\alpha S T_0 W_0}{P_0^2} \right) \right] + \frac{2\beta S T_0 |W_0|}{P_0} =$$

$$= \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha T_0 S}{P_0 \Delta} \left[ (W_1 - 2W_0) - (P_1 - P_0) \frac{W_0}{P_0} \right] + \frac{2\beta S T_0 |W_0|}{P_0},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial P_0} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{-2\alpha T_0 S}{P_0^2} (W_1 - 2W_0) - \left( 1 + \frac{\alpha S T_0 W_0^2 (P_0 - 2P_1)}{P_0^3} \right) \right] -$$

$$- \frac{\beta S T_0 W_0 |W_0|}{P_0^2} + \frac{g}{\alpha S T_0} \frac{1}{dx} dh,$$

$$\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial T_0} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha W_0 S}{P_0} (W_1 - W_0) + (P_1 - P_0) \left( \frac{-\alpha S W_0^2}{P_0^2} \right) \right] + \frac{\beta S}{P_0} W_0 |W_0| =$$

$$= \frac{\alpha W_0 S}{\Delta P_0} \left[ 2(W_1 - W_0) - \frac{(P_1 - P_0)}{P_0} W_0 \right] + \frac{\beta S W_0 |W_0|}{P_0} + \frac{g}{\alpha S T_0^2} \frac{P_0}{dx} dh;$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial W_0} = -\frac{\alpha T_0 S}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial P_0} = \frac{1}{\tau},$$

$$\frac{\partial \psi_{0,2}}{\partial T_0} = \frac{\alpha S (W_1 - W_0)}{\Delta};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial W_0} &= \frac{1}{\Delta} \left[ (1-\gamma) \frac{\alpha T_0^2 S}{P_0} + \gamma \alpha T_0 S \frac{(T_1 - T_0)}{P_0} \right] + g(\gamma-1) \frac{T_0}{P_0} \frac{dh}{dx} = \\ &= \frac{\alpha T_0 S}{\Delta P_0} [(1-2\gamma)T_0 + \gamma T_1] + g(\gamma-1) \frac{T_0}{P_0} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial P_0} &= \frac{-1}{\Delta P_0^2} \left[ (\gamma-1) \alpha T_0^2 S (W_1 - W_0) + \gamma \alpha T_0 S W_0 (T_1 - T_0) \right] - \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_0}{P_0^2} (T_0 - T_{zp}) - \\ &- g(\gamma-1) \frac{T_0 W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx} = \frac{-\alpha S T_0}{\Delta P_0^2} [(\gamma-1)T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - T_0)] - \\ &- \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_0}{P_0^2} (T_0 - T_{zp}) - g(\gamma-1) \frac{T_0 W_0}{P_0^2} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{0,3}}{\partial T_0} &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2(\gamma-1) \alpha T_0 S}{P_0} (W_1 - W_0) + \gamma \alpha S \frac{W_0}{P_0} (T_1 - 2T_0) \right] + \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{(2T_0 - T_{zp})}{P_0} + \\ &+ g(\gamma-1) \frac{W_0}{P_0} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha S}{\Delta P_0} [2(\gamma-1)T_0 (W_1 - W_0) + \gamma W_0 (T_1 - 2T_0)] + \\ &+ \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{(2T_0 - T_{zp})}{P_0} + g(\gamma-1) \frac{W_0}{P_0} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

З урахуванням (3.7), вирази для визначення координат векторів нев'язок  $\psi_i^{k,s}$  в будь-якій внутрішній точці мають вигляд ( $i = 1, \dots, n-1$ ):

$$\begin{aligned} \psi_{i,1} &= \frac{1}{\tau} (W_i - W_i^{k-1}) + \frac{1}{2\Delta} \left[ 2\alpha T_i S \frac{W_i}{P_i} (W_{i+1} - W_{i-1}) + \left( 1 - \frac{\alpha T_i S}{P_i^2} W_i^2 \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (P_{i+1} - P_{i-1}) \right] + \beta T_i S \frac{W_i |W_i|}{P_i} + g \frac{P_i}{\alpha T_i S} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\psi_{i,2} = \frac{1}{\tau} (W_i - W_i^{k-1}) + \frac{1}{2\Delta} \left[ 2\alpha T_i S \frac{W_i}{P_i} (W_{i+1} - W_{i-1}) \right],$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,3} = & \frac{1}{\tau}(T_i - T_i^{k-1}) + \frac{1}{2\Delta} \left[ (\gamma - 1)\alpha S \frac{T_i^2}{P_i} (W_{i+1} - W_{i-1}) + \gamma\alpha S T_i \frac{W_i}{P_i} \cdot \right. \\ & \left. \cdot (T_{i+1} - T_{i-1}) \right] + \frac{4k}{D}(\gamma - 1) \cdot \frac{T_i}{P_i} (T_i - T_{cp}) \cdot g(\gamma - 1) \cdot \frac{T_i W_i}{P_i} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Для внутрішніх точок ( $i=1, \dots, n-1$ ) елементи матриці Якобі  $\left[ \frac{\partial \psi_i^k}{\partial \phi_i^k} \right]_{\phi^{k,s}}$

мають вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial W_i} = & \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\Delta} \left[ 2\alpha T_i S \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{P_i} - (P_{i+1} - P_{i-1}) \frac{2\alpha T_i S W_i}{P_i^2} \right] + \\ & + 2|W_i| \frac{T_i S}{P_i} = \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha T_i S}{\Delta P_i} \left[ W_{i+1} - W_{i-1} - \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{P_i} W_i \right] + 2 \frac{T_i S}{P_i} |W_n|, \\ \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial P_i} = & \frac{\alpha T_i S W_i}{P_i^2} \left[ (W_{i-1} - W_{i+1}) + (P_{i+1} - P_{i-1}) \frac{W_i}{P_i} \left( -\frac{2\alpha T_i S W_i}{P_i^2} \right) \right] - \\ & - \frac{\beta T_i S}{P_i^2} W_i |W_i| + \frac{g}{\alpha S T_i} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial T_i} = & \frac{1}{2\Delta} \left[ \frac{2\alpha S}{P_i} W_i (W_{i+1} - W_{i-1}) + (P_{i+1} - P_{i-1}) \left( -\frac{\alpha S W_i^2}{P_i^2} \right) \right] + \frac{\beta S W_i |W_i|}{P_i} - \frac{g P_i}{S \alpha T_i^2} \frac{dh}{dx} = \\ = & \frac{\alpha S W_i}{2\Delta P_i} \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha T_i S}{\Delta P_i} \left[ 2(W_{i+1} - W_{i-1}) - (P_{i+1} - P_{i-1}) \frac{W_i}{P_i} \right] + \frac{\beta S W_i |W_i|}{P_i} - \frac{g P_i}{S \alpha T_i^2} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{i,2}}{\partial W_i} = & 0, \\ \frac{\partial \psi_{i,2}}{\partial P_i} = & \frac{1}{\tau}, \\ \frac{\partial \psi_{i,2}}{\partial T_i} = & \frac{\alpha S}{2\Delta} (W_{n+1} - W_{n-1}), \\ \frac{\partial \psi_{i,3}}{\partial W_i} = & \frac{\gamma \alpha S}{2\Delta} \frac{T_i}{P_i} (T_{i+1} - T_{i-1}) + g(\gamma - 1) \frac{T_i}{P_i} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{i,3}}{\partial P_i} &= \frac{-1}{2\Delta P_i^2} \left[ (\gamma-1)\alpha S T_i^2 (W_{i+1} - W_{i-1}) + \gamma\alpha S T_i W_i (T_{i+1} - T_{i-1}) \right] - \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_i}{P_i^2} \cdot \\ &\cdot (T_i - T_{zp}) - g(\gamma-1) \frac{T_i W_i}{P_i^2} \frac{dh}{dx} = \frac{-\alpha S T_i}{2\Delta P_i^2} \left[ (\gamma-1) T_i (W_{i+1} - W_{i-1}) + \gamma W_i (T_{i+1} - T_{i-1}) \right] - \\ &\quad - \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_i}{P_i^2} (T_i - T_{zp}) - g(\gamma-1) \frac{T_i W_i}{P_i^2} \frac{dh}{dx}, \\ \frac{\partial \psi_{i,3}}{\partial T_i} &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2\Delta} \left[ 2(\gamma-1)\alpha S \frac{T_i}{P_i} (W_{i+1} - W_{i-1}) + \gamma\alpha S \frac{W_i}{P_i} (T_{i+1} - T_{i-1}) \right] + \frac{4k}{D} (\gamma-1) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(2T_i - T_{zp})}{P_i} + g(\gamma-1) \frac{W_i}{P_i^2} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

З урахуванням (3.8), вирази для визначення координат вектору нев'язок  $\psi_n^{k,s}$  в точці  $n$  приймають вид:

$$\begin{aligned} \psi_{n,1} &= \frac{1}{\tau} (W_n - W_n^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha T_n S W_n}{P_n} \cdot (W_n - W_{n-1}) + \left( 1 - \alpha S \frac{T_n W_n^2}{P_n^2} \right) \cdot (P_n - P_{n-1}) \right] + \\ &\quad + \beta S \frac{T_n W_n |W_n|}{P_n} + \frac{g}{\alpha S} \frac{P_n}{T_n} \frac{dh}{dx}, \\ \psi_{n,2} &= \frac{1}{\tau} (P_n - P_n^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \alpha T_n S (W_n - W_{n-1}), \frac{x - \mu}{\sigma} \\ \psi_{n,3} &= \frac{1}{\tau} (T_n - T_n^{k-1}) + \frac{1}{\Delta} \left[ (\gamma-1) \cdot \alpha \frac{T_n^2}{P_n} S (W_n - W_{n-1}) + \gamma\alpha T_n S \frac{W_n}{P_n} (T_n - T_{n-1}) \right] + \\ &\quad + \frac{4k}{D} (\gamma-1) \frac{T_n}{P_n} (T_n - T_{zp}) + g(\gamma-1) \frac{T_n W_n}{P_n} \frac{dh}{dx}. \end{aligned}$$

Елементи матриці Якобі  $\left[ \frac{\partial \psi_n^k}{\partial \phi_n^k} \right]_{\phi_n^k}$  в точці  $n$  приймають вигляд:

$$\frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial W_n} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha T_n S}{P_n} (2W_n - W_{n-1}) + (P_n - P_{n-1}) \left( \frac{-2\alpha S T_n W_n}{P_n^2} \right) \right] + \frac{2\beta S T_n |W_n|}{P_n} =$$

$$= \frac{1}{\tau} + \frac{2\alpha T_n S}{P_n \Delta} \left[ (2W_n - W_{n-1}) - (P_{n-1} - P_n) \frac{W_n}{P_n} \right] + \frac{2\beta S T_n |W_n|}{P_n},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial P_n} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{-2\alpha T_n S W_n (W_n - W_{n-1})}{P_n^2} + \left( 1 - \frac{\alpha S T_n W_n^2 (2P_n - P_{n-1})}{P_n^3} \right) \right] - \frac{\beta S T_n W_n |W_n|}{P_n^2} + \frac{g}{\alpha S T_n} \frac{1}{dx} dh,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n,1}}{\partial T_n} &= \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2\alpha W_n S}{P_n} (W_n - W_{n-1}) + (P_n - P_{n-1}) \left( \frac{-\alpha S W_n^2}{P_n^2} \right) \right] + \frac{\beta S}{P_n} W_n |W_n| = \\ &= \frac{\alpha W_n S}{\Delta P_n} \left[ 2(W_n - W_{n-1}) - \frac{(P_n - P_{n-1})}{P_n} W_n \right] + \frac{\beta S W_n |W_n|}{P_n} + \frac{g}{\alpha S T_n^2} \frac{P_n}{dx} dh, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial W_n} = \frac{\alpha T_n S}{\Delta},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial P_n} = \frac{1}{\tau},$$

$$\frac{\partial \psi_{n,2}}{\partial T_n} = \frac{\alpha S (W_n - W_{n-1})}{\Delta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial W_n} &= \frac{1}{\Delta} \left[ (1 - \gamma) \frac{\alpha T_n^2 S}{P_n} + \gamma \alpha T_n S \frac{(T_n - T_{n-1})}{P_n} \right] + g(\gamma - 1) \frac{T_n}{P_n} \frac{dh}{dx} = \\ &= \frac{\alpha T_n S}{\Delta P_n} \left[ \gamma(2T_n - T_{n-1}) - T_n \right] + g(\gamma - 1) \frac{T_n}{P_n} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial P_n} &= \frac{-\alpha S T_n}{\Delta P_n^2} \left[ (\gamma - 1) T_n (W_n - W_{n-1}) + \gamma W_n (T_n - T_{n-1}) \right] - \\ &\quad - \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{T_n}{P_n^2} (T_n - T_{sp}) - g(\gamma - 1) \frac{T_n W_n}{P_n^2} \frac{dh}{dx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{n,3}}{\partial T_n} &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2(\gamma - 1)\alpha T_n S}{P_n} (W_n - W_{n-2}) + \gamma \alpha S \frac{W_n}{P_n} (2T_n - T_{n-1}) \right] + \\ &\quad + \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{(2T_n - T_{sp})}{P_n} + g(\gamma - 1) \frac{W_n}{P_n} \frac{dh}{dx} = \frac{1}{\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha S}{\Delta P_n} \left[ 2(\gamma - 1) T_n (W_n - W_{n-1}) + \gamma W_n (2T_n - T_{n-1}) \right] + \\
& + \frac{4k}{D} (\gamma - 1) \frac{(2T_n - T_{sp})}{P_n} + g (\gamma - 1) \frac{W_n}{P_n} \frac{dh}{dx}.
\end{aligned}$$

Варто зазначити, що у формулах вище, для визначення координат векторів нев'язок та елементів матриці Якобі на 0 кроці, для зручності, були опущені індекси  $k, s$  часового шару та ітерації.

Наведемо алгоритм розрахунку РТГ по ДТ для  $k$ -го часового шару:

- а)  $s = 0$ , задання  $\phi^{k,0}$  (вектору початкових значень параметрів);
- б) обчислення нев'язок  $\psi^{k,s}$ ;
- в) розрахунок матриці Якобі або її апроксимації  $A^{k,s}$  (цей крок розраховується в залежності від методу);
- г) розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь для отримання векторів поправок;
- д) обчислення нових значень невідомих параметрів газового потоку на  $s$ -й ітерації:

$$\phi_i^{k,s+1} = \phi_i^{k,s} - \delta \phi_i^{k,s+1}, i = \overline{0, n};$$

- е) перевірка збіжності  $\|\psi^{k,s}\| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – задана точність. Якщо задана точність не досягнута, то  $s = s + 1$  і переходимо до п. б, в іншому випадку до п. ж.
- ж) кінець розрахунку часового шару.

## 4 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

### 4.1 Опис програмного продукту

Інструментом, за допомогою якого проводиться експеримент, є Wolfram Mathematica. Цей математичний пакет вже існує більше 30 років, за цей час розробники імплементували багато великих і маленьких функцій; нові версії виходять регулярно розширюючи і без того широкий функціонал. Можливості цієї системи використовуються дослідниками в усіх сферах технічних обчислень.

Для практичної реалізації моделювання ННРТГ був створений ПП за допомогою математичного пакету Mathematica версії 12.0. В результаті був отриманий два електронних документа: один для ННРТГ з використанням методу Бройдена, та один з використанням методу Ньютона. Вхідними даними є фізичні властивості труби і газу, кількість точок розбиття ДТ. Необхідними параметрами також є граничні умови на початку та кінці ділянки. В результаті розрахунку програми отримуються параметри газового потоку в точках розбиття ДТ, та час роботи алгоритму, написаного в 3.2.

### 4.2 Результати дослідження

Був створений ПП для чисельного моделювання ННРТГ по ДТ. ПП складається з двох електронних документів: один вирішує поставлену задачу методом скінчених різниць з рівномірною скінчено-різницевою сіткою, з використанням методу Бройдена (текст програми наведено в додатку А), а інший файл в використанням методу Ньютона (додаток Б). Тестування ПП проводилося на ЕОМ зі специфікацією: тип процесору Mobile DualCore Intel Core i5-4200U, 2300 MHz, 8076 МБ (DDR3 SDRAM) з операційною системою Windows 10 64-

bit. Фізичні характеристики для моделювання ННРТГ: ДТ діаметром  $D=1400$  мм, і довжиною  $L = 112$  км, товщиною стінок  $\delta = 10$  мм, еквівалентною шорсткістю труб  $K = 0,03$  мм, коефіцієнтом ефективності ділянки  $E = 0,95$ , при питомій теплоємності  $C_p = 0,655952$ , коефіцієнті теплопередачі від газу до ґрунту  $k_T = 1,4$  з коефіцієнтом стисливості газу  $z_H = 0,8834$ , відносною щільністю газу по повітрю  $\Delta = 0,604707$ , температурі ґрунту на глибині закладення газопроводу  $t_{zp} = 10^\circ C$ . Крок розбиття по часовій змінній  $\Delta t = 300$  секунд. Точність розрахунку  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Початкові умови мають вид:

$$P_H = 84,6364456 \text{ атм};$$

$$t_H = 40^\circ C;$$

$$q = 102,266 \text{ млн.м}^3 / \text{доб}.$$

Розрахуємо параметри СРТГ для ДТ. Код програми та її вивід наведено в додатку А та Б.

В атестаційній роботі наведені розрахунки для завдання підключення великих споживачів.

Експеримент проведено з 5, 10 та 20 точками розбиття ДТ.

Граничні умови мають вигляд:

$$\begin{cases} P(0,t) = 84,6364 \text{ атм}, \\ T(0,t) = 40^\circ C, \end{cases} \quad G(L,t) = \begin{cases} 102,266 \text{ млн.м}^3 / \text{доб}, t < 200 \text{ хв}, \\ 112,266 \text{ млн.м}^3 / \text{доб}, t \geq 200 \text{ хв}. \end{cases}$$

Розв'язуючи задачу з використанням ПП, запускаючи файли окремо при однакових початкових умов, були отримані параметри газового потоку на кожному часовому шарі: з 1-го по 144-й. В табл. 4.1–4.8 наведені результати роботи ПП на деяких шарах використовуючи обидва методи при 5 точках розбиття ДТ. На рис. 4.1–4.9 візуалізовано зміни кожного параметру газу за часом в 0-й, 2-й та 5-й точці розбиття ДТ, для методу Бройдена та на рис. 4.10–4.18 – для мето-



ду Ньютона. Для 20-ти точок розбиття зміна витрати, температури та тиску газу за часом наведені на рис. 4.19–4.21.

Таблиця 4.1 – Розподіл параметрів газового потоку на 1-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
104,3937	84,63645	40	104,3937	84,63645	40
103,7105	80,43307	38,0302	103,7105	80,43307	38,0302
103,9487	75,96555	36,15605	103,9487	75,96555	36,15605
103,7454	71,263	34,42035	103,7454	71,263	34,42035
103,8099	66,28497	32,84574	103,8099	66,28497	32,84574
102,266	60,89648	31,40707	102,266	60,89648	31,40707

Таблиця 4.2 – Розподіл параметрів газового потоку на 20-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
102,6686	84,63645	40	102,6686	84,63645	40
102,5832	80,5791	38,08827	102,5832	80,5791	38,08827
102,6058	76,17861	36,25572	102,6058	76,17861	36,25572
102,4751	71,68084	34,67499	102,4751	71,68084	34,67499
102,4088	66,79342	33,02305	102,4088	66,79342	33,02305
102,266	61,6747	31,64792	102,266	61,6747	31,64792

Таблиця 4.3 – Розподіл параметрів газового потоку на 39-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
102,3373	84,63645	40	102,3373	84,63645	40
102,3254	80,60506	38,09954	102,3254	80,60506	38,09954
102,3263	76,22324	36,18708	102,3263	76,22324	36,18708
102,3067	71,76207	34,55222	102,3067	71,76207	34,55222
102,293	66,88291	32,94722	102,293	66,88291	32,94722
102,266	61,79412	31,53761	102,266	61,79412	31,53761

Таблиця 4.4 – Розподіл параметрів газового потоку на 40-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
102,4973	84,63645	40	102,4973	84,63645	40
102,6783	80,59155	38,09474	102,6783	80,59155	38,09474
102,774	76,16049	36,14731	102,774	76,16049	36,14731
103,9716	71,65952	34,49119	103,9716	71,65952	34,49119
104,8992	66,48505	32,66326	104,8992	66,48505	32,66326
112,266	61,09127	30,98629	112,266	61,09127	30,98629

Таблиця 4.5 – Розподіл параметрів газового потоку на 41-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
102,8428	84,63645	40	102,8428	84,63645	40
103,2253	80,56324	38,08534	103,2253	80,56324	38,08534
103,4227	76,06522	36,09183	103,4227	76,06522	36,09183
105,1896	71,50596	34,40716	105,1896	71,50596	34,40716
106,606	66,14584	32,46031	106,606	66,14584	32,46031
112,266	60,55192	30,61778	112,266	60,55192	30,61778

Таблиця 4.6 – Розподіл параметрів газового потоку на 80-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
111,8214	84,63645	40	111,8214	84,63645	40
111,8726	79,8224	38,17005	111,8726	79,8224	38,17005
111,8851	74,47728	36,50202	111,8851	74,47728	36,50202
111,9994	68,98877	34,88846	111,9994	68,98877	34,88846
112,0893	62,81718	33,22712	112,0893	62,81718	33,22712
112,266	56,22897	31,62796	112,266	56,22897	31,62796

Таблиця 4.7 – Розподіл параметрів газового потоку на 120-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
112,24567	84,63645	40.	112,24567	84,63645	40.
112,24702	79,78597	38,22323	112,24702	79,78597	38,22323
112,24855	74,40301	36,5149	112,24855	74,40301	36,5149
112,25271	68,87081	34,95798	112,25271	68,87081	34,95798
112,25742	62,66773	33,41094	112,25742	62,66773	33,41094
112,266	56,03483	32,03558	112,266	56,03483	32,03558

Таблиця 4.8 – Розподіл параметрів газового потоку на 144-му часовому шарі

Метод Бройдена			Метод Ньютона		
Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)	Витрати газу (млн.м <sup>3</sup> / доб)	Тиск (атм)	Температура (°C)
112,2625	84,63645	40	112,2625	84,63645	40
112,2626	79,78452	38,23776	112,2626	79,78452	38,23776
112,2629	74,39951	36,51151	112,2629	74,39951	36,51151
112,2638	68,86618	34,95715	112,2638	68,86618	34,95715
112,2648	62,66116	33,42968	112,2648	62,66116	33,42968
112,266	56,02641	32,068	112,266	56,02641	32,068

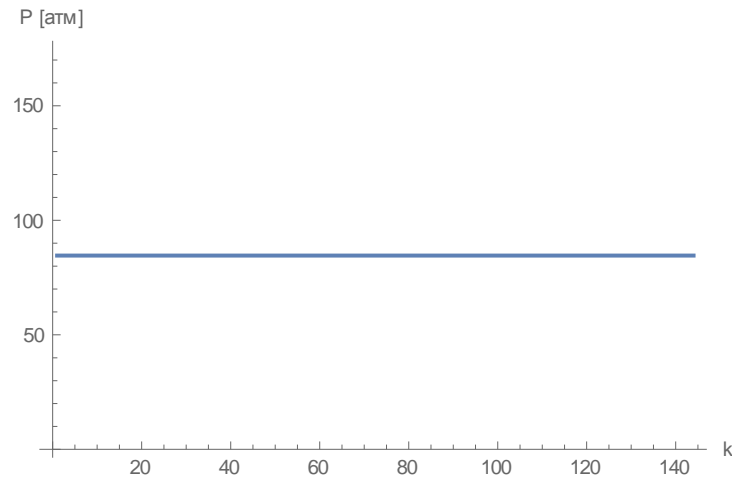


Рисунок 4.1 – Тиск газу (*атм*) в 0-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

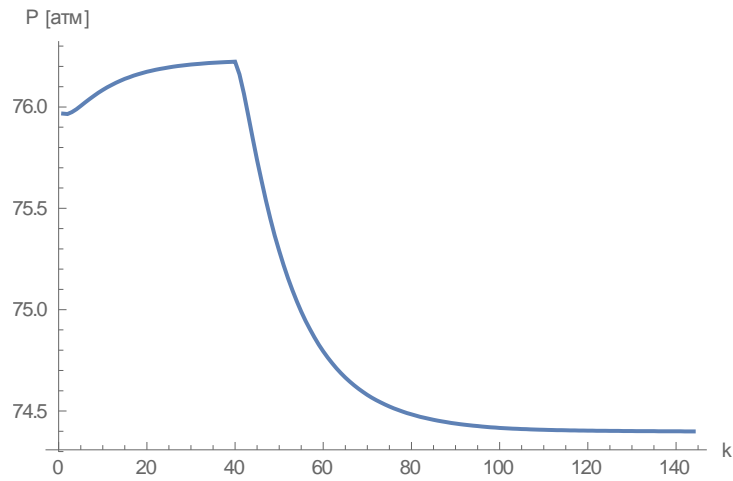


Рисунок 4.2 – Тиск газу (*атм*) в 2-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

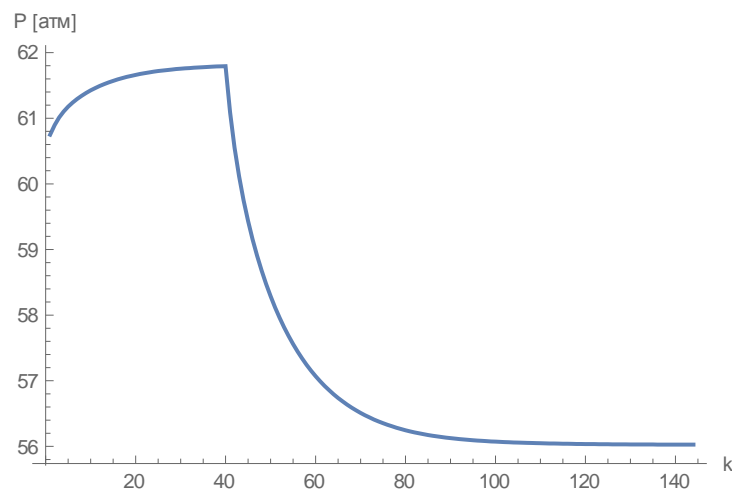


Рисунок 4.3 – Тиск газу (*атм*) в 5-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

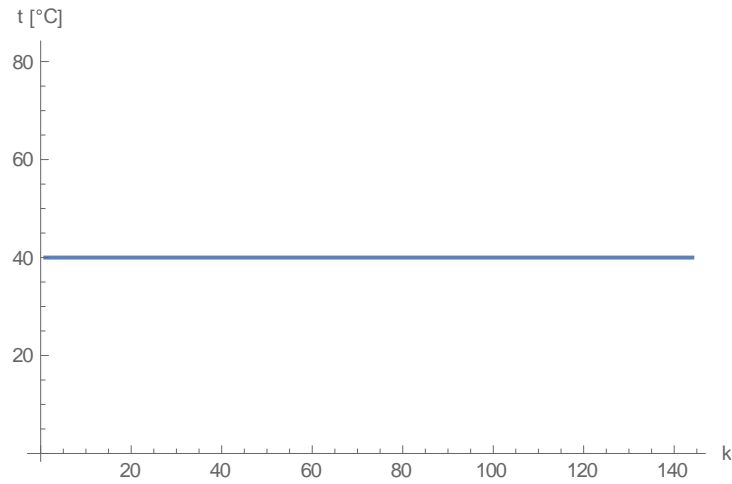


Рисунок 4.4 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 0-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

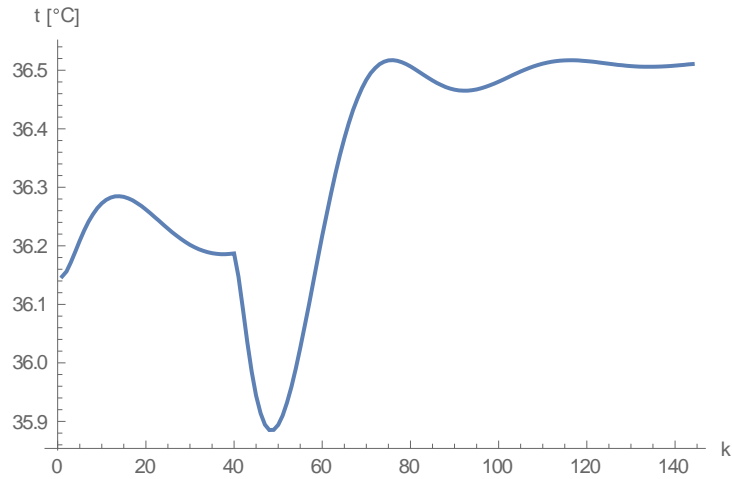


Рисунок 4.5 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 2-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

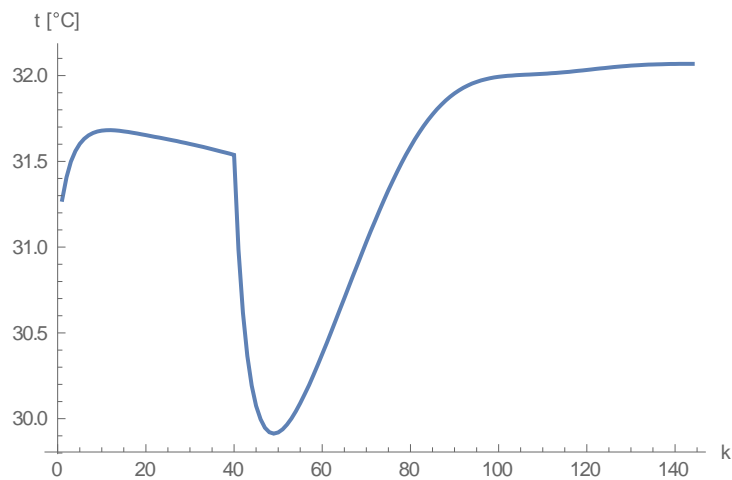


Рисунок 4.6 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 5-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

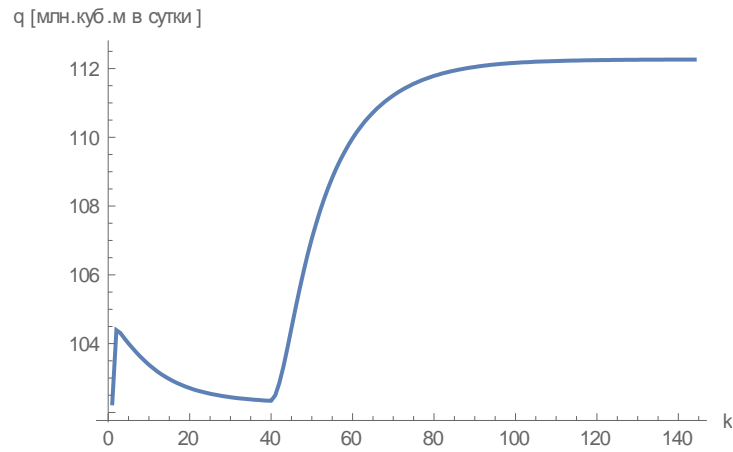


Рисунок 4.7 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 0-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

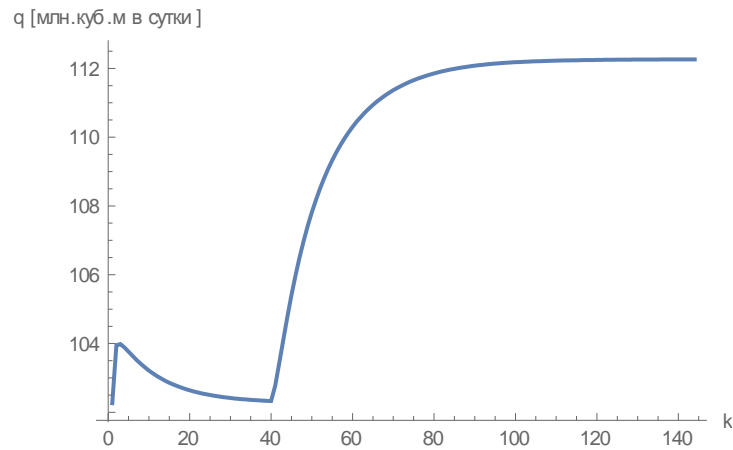


Рисунок 4.8 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 2-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

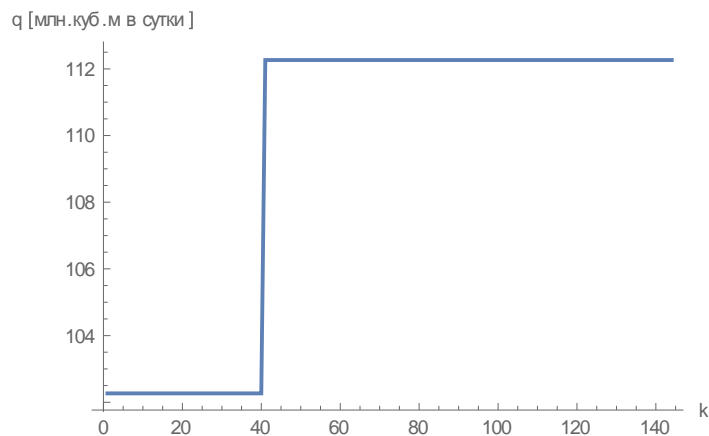


Рисунок 4.9 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 5-й точці розбиття ДТ, метод Бройдена

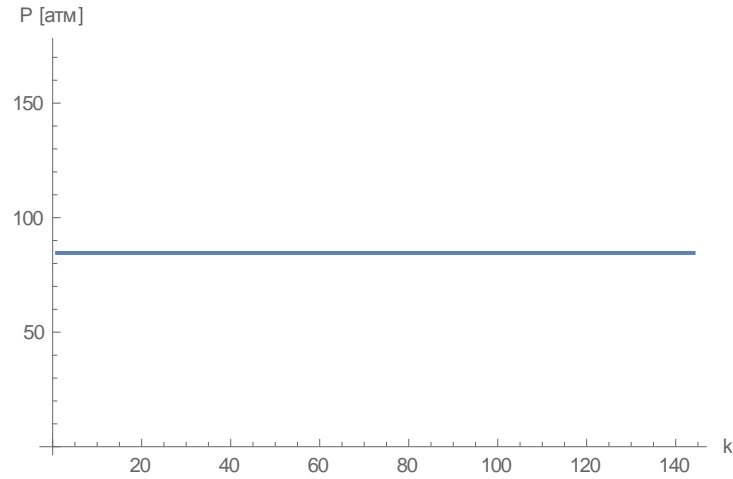


Рисунок 4.10 – Тиск газу (*атм*) в 0-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона

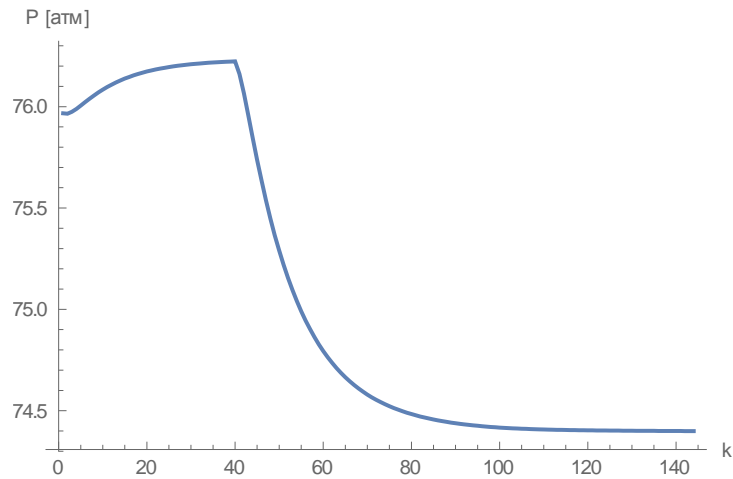


Рисунок 4.11 – Тиск газу (*атм*) в 2-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона

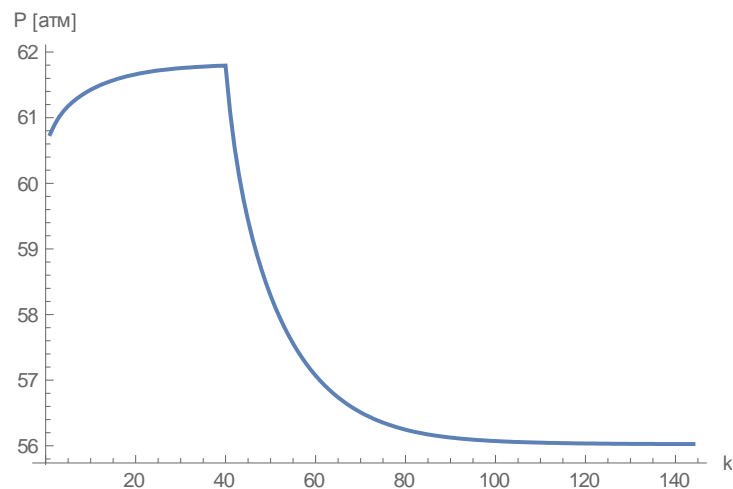


Рисунок 4.12 – Тиск газу (*атм*) в 5-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона



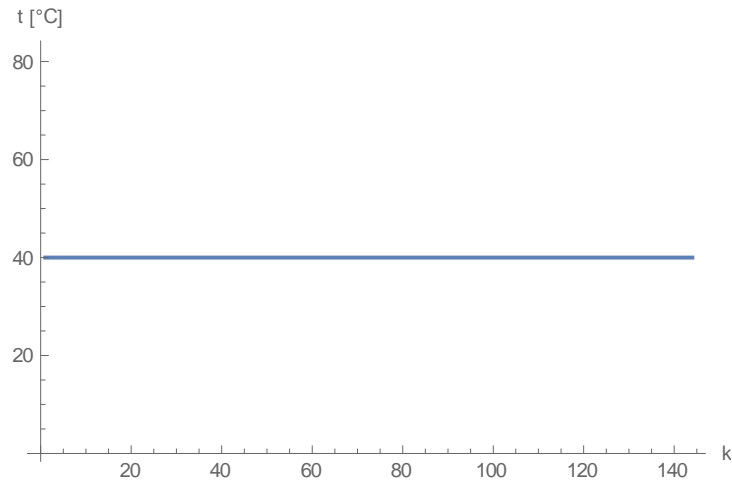


Рисунок 4.13 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 0-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона

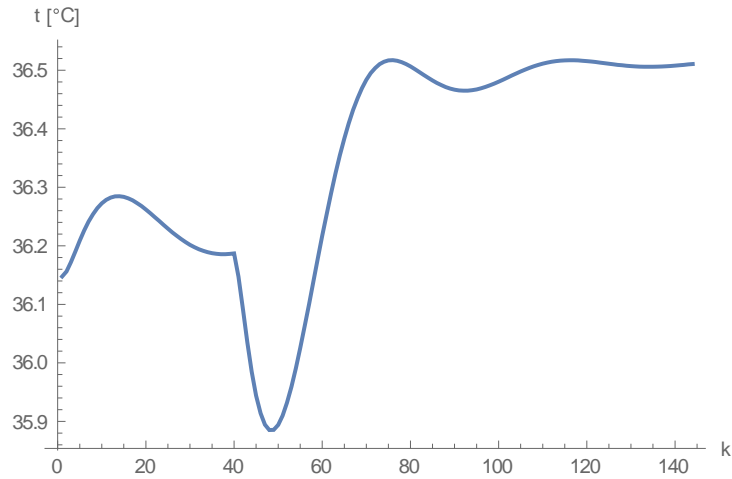


Рисунок 4.14 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 2-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона

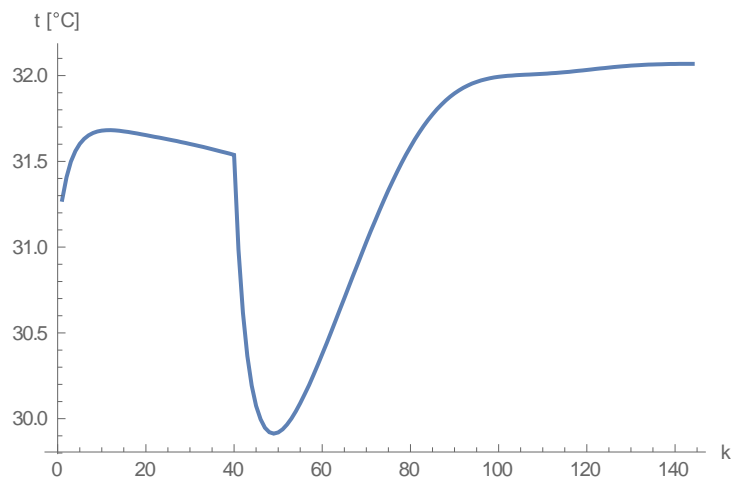


Рисунок 4.15 – Температура газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) в 5-й точці розбиття ДТ, метод Ньютона

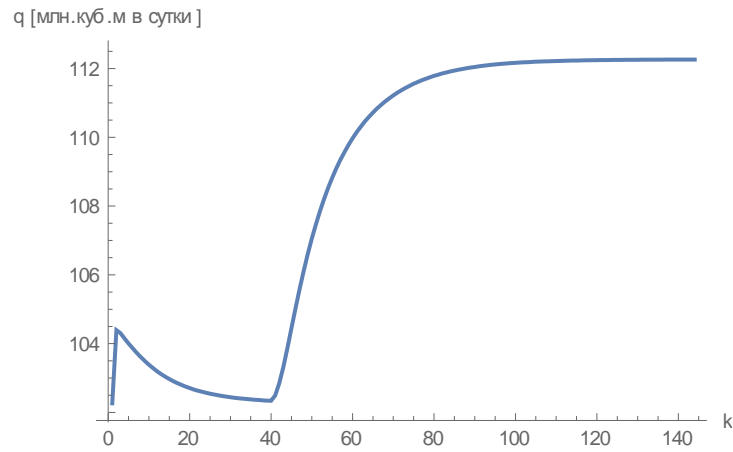


Рисунок 4.16 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 0-й точці розбиття ДТ,  
метод Ньютона

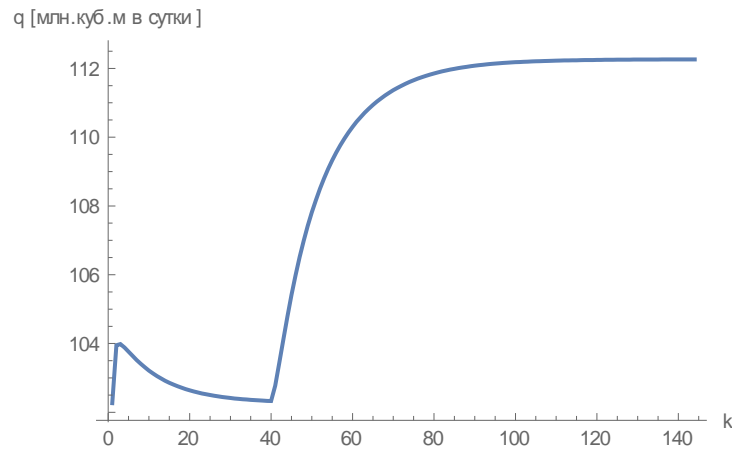


Рисунок 4.17 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 2-й точці розбиття ДТ,  
метод Ньютона

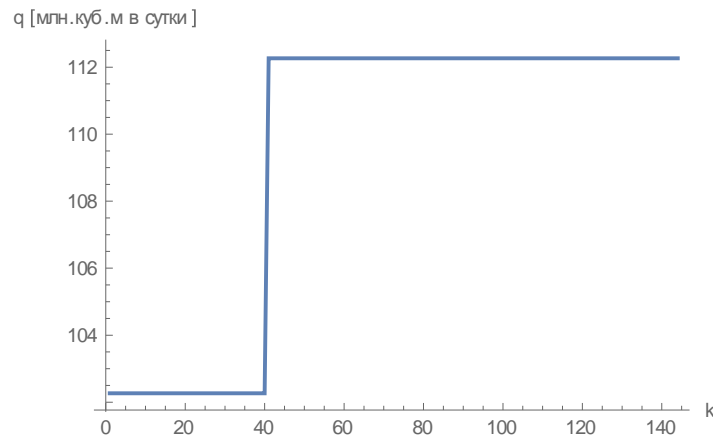


Рисунок 4.18 – Витрата газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) в 5-й точці розбиття ДТ,  
метод Ньютона

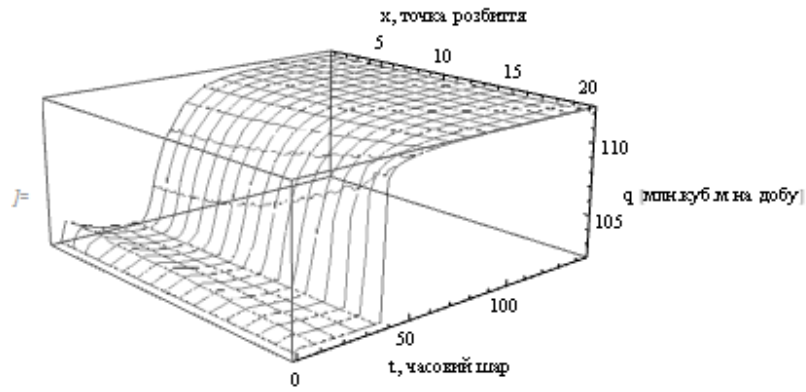


Рисунок 4.18 – Зміна витрати газу ( $\text{млн м}^3 / \text{доб.}$ ) за часом по ДТ з 20-ма точками розбиття

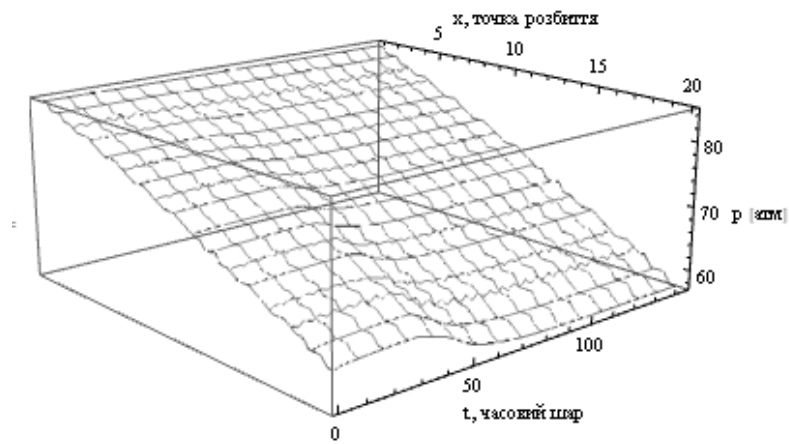


Рисунок 4.19 – Зміна тиску газу (атм) за часом по ДТ з 20-ма точками розбиття

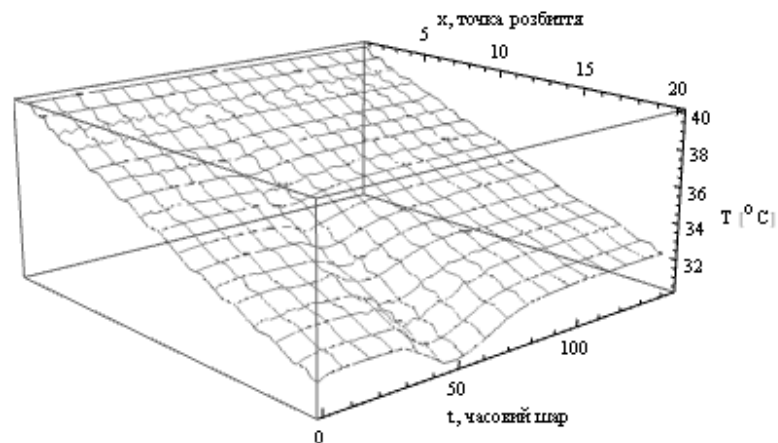


Рисунок 4.20 – Зміна температури газу ( $^{\circ}\text{C}$ ) за часом по ДТ з 20-ма точками розбиття

Таблиці 4.1–4.8 показують, що різниці в параметрах газового потоку між використанням різних методів в межах похибки, як і очікувалось, немає [17]. Для порівняння ефективності методів Бroyдена та Ньютона, в таблицях 4.9 та 4.10 приведено кількість ітерацій та час роботи програми для моделі ННРТГ з 5-ю точками розбиття ДТ. Як видно з таблиць, різниця по часу роботи незначна, але метод Ньютона працює дещо швидше, маючи квадратичну швидкість збіжності, кількість ітерацій при використанні метода Ньютона також менше, але якщо розглядати процес розрахунку з позиції витраченого часу на розрахунок одної ітерації, метод Бroyдена дещо краще.

Таблиця 4.9 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи, метод Бroyдена, 5 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-6	3	42-74	3
7-39	2	75-125	2
40, 41	4	126-144	1
Час роботи програми	10,66 сек.	Загальна кількість ітерацій	312
Середній час розрахунку ітерації	0,03413 сек./ітер.		

При 10 та 20 точках розбиття, результати тестування яких наведено в табл. 4.11–4.14, тенденція залишається: метод Бroyдена потребує трохи менше часу на розрахунок ітерацій, але програє методу Ньютона по загальному часу із-за меншої кількості ітерацій.

Таблиця 4.10 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи,  
метод Ньютона, 5 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1	3	100, 102, 104, 106, 108, 110	1
2-39	2	101, 103, 105, 107, 109, 111	2
40-51	3	112-144	1
52-99	2		
Час роботи програми	9,98 сек.	Загальна кількість ітерацій	262
Середній час розрахунку ітерації	0,03809 сек./ітер.		

Таблиця 4.11 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи,  
метод Бройдена, 10 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-5	3	43-71	3
6-39	2	72-113	2
40, 41, 42	4	114-144	1
Час роботи програми	22,74 сек.	Загальна кількість ітерацій	305
Середній час розрахунку ітерації	0,07456 сек./ітер.		

Таблиця 4.12 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи,  
метод Ньютона, 10 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1, 2	3	106	1
3-39	2	107	2
40-51	3	108-144	1
52-105	2		
Час роботи програми	20,7 сек.	Загальна кількість ітерацій	264
Середній час розрахунку ітерації	0,07841 сек./ітер.		

Таблиця 4.13 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи,  
метод Бройдена, 20 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-4	3	47-75	3
5-39	2	76-121	2
40, 41	5	122-144	1
42-46	4		
Час роботи програми	62,34 сек.	Загальна кількість ітерацій	314
Середній час розрахунку ітерації	0,19854 сек./ітер.		

Таблиця 4.14 – Кількість ітерацій на часових шарах та час роботи,  
метод Ньютона, 20 точок розбиття

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1, 2	3	105, 107, 109	1
3-39	2	106, 108, 110	2
40-58	3	111-144	1
59-104	2		
Час роботи програми	54,33 сек.	Загальна кількість ітерацій	272
Середній час розрахунку ітерації	0,19974 сек./ітер.		

Отже, при збільшенні кількості точок розбиття, ПП розраховує ННРТГ довше, але це поліпшує точність розрахунку. Чим більше точок розбиття ДТ, тим більше видно різницю між електронними документами, в яких використовується метод Бroyдена та Ньютона. Метод Ньютона має кращу швидкість збіжності, і тому потребує менше ітерацій для досягнення поставленої точності ніж метод Бroyдена, при цьому різниця в швидкості розрахунку кожної ітерації не дозволяє обійти загальний час розв'язання ННРТГ.

## ВИСНОВКИ

В атестаційній роботі наведений аналіз проблеми моделювання та аналізу нестационарного режиму течії газу з використанням рівномірної скінченорізницевої сітки з позиції системного аналітика, проблема була структурована як декілька етапів, і всі етапи були пройдені. Для вирішення проблеми була створена ММ ННРТГ по ДТ, яка представляє з себе квазілінійну систему у частинних похідних гіперболічного типу.

Системи рівнянь ММ розв'язані методом скінчених різниць з використанням РСРС, а для розв'язку систем нелінійних рівнянь окремо, для порівняння ефективності, використовувалися метод Бroyдена та метод Ньютона. Побудований алгоритм розглянутого методу з використанням методу Бroyдена та Ньютона. Перевірка ефективності методів на одній і тій самій тестовій задачі підключення крупного споживача використовувалося за допомогою виробленого ПП, який розраховує ННРТГ.

В результаті дослідження і чисельних експериментів, порівнянні методи Бroyдена та Ньютона, в контексті даної ММ. Після проведення чисельних експериментів отримані час роботи програми та кількість ітерацій на кожному часовому шарі з різною кількістю точок розбиття ДТ, час затрачений на кожну ітерацію. Можна зробити висновок, що метод Ньютона працює швидше, ніж метод Бroyдена, тому при моделюванні ННРТГ по ДТ рекомендується використовувати метод Ньютона.

Результати даного дослідження будуть корисні, зокрема, для повної автоматизації процесу постачання газу, і, як наслідок, зменшення числа аварій і аварій з людськими жертвами.



## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Integration definition for function modeling (IDEF0). Draft Federal Information Processing Standards Publication 183. 1993. 108 p.
2. Azzolini John. Introduction to Systems Engineering Practices. URL : <https://www.slideserve.com/arleen/introduction-to-systems-engineering-practices-session-i-requirements-john-azzolini>. (accessed: 18.11.2019).
3. Калашян А.Н., Калянов Г.Н. Структурные модели бизнеса: DFD-технологии. Москва : Финансы и статистика, 2003. 256 с.
4. Fiodorov I.G. Overcoming expressiveness deficit of business process modeling languages // Business Informatics. 2016. № 3 (37). P. 62–71,
5. Зайцев В.В., Трещев В.М. Численные методы для физиков. Нелинейные уравнения и оптимизация: Учебное пособие. Самара : Самарский университет, 2005. 86 с.
6. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації. Львів : Новий Світ-2000, 2003. 424 с.
7. Гусарова И. Г., Коротенко А. Н. Результаты численного моделирования режимов течения газа по участку трубопровода методом характеристик // Системи обробки інформації. 2017. № 2(148). С. 24–28.
8. Гусарова И.Г. Классы задач моделирования и численного анализа нестационарных режимов работы газотранспортной системы / И.Г. Гусарова, Ю.В. Боярская // Восточно-Европейский журнал. 2010. 3/6(45). С. 26–32,
9. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях. Харьков : Вища школа, 1980, 144 с.
10. Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Основы численного моделирования магистральных газопроводов / под ред. В.Е. Селезнева. Москва : КомКнига, 2005. 496 с.
11. Chen Z. Finite Elements Methods and Their Applications. Leipzig : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 410 p.