УДК 621.391

Ю. Н. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук,
А. К. КУРЫШКИН, В. С. СКЛЯРОВ, канд. техн. наук,
А. В. ТОВАРНИЦКИЙ, канд. техн. наук

ОБОБЩЕННОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ

Системы связи, в которых используются для передачи сообщений сигналы с большой базой, а также сами сигналы часто называют широкополосными. В дальнейшем понятие «широкополосность сигналов» будем связывать с особенностями их обработки техническими средствами. Единого мнения об определении понятия базы сигнала в литературе нет, хотя общая тенденция к расширению полосы частот при увеличении базы общепринята [1—4].

Любой сигнал $S_i(t)$ в соответствии с идеей обобщенного спектрального разложения можно рассматривать как совокупность „элементарных" колебаний $\eta_k(t)$, умноженных на коэффициенты $C_k^{(i)}$, которые определяют вес каждого из этих колебаний в совокупном сигнале, т. е. $S_i(t) = \sum^{\infty} C_k^{(i)} \eta_k(t)$ (1).

Коэффициенты $C_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, ...)$ в общем случае принимают всевозможные значения числовой оси либо принадлежат счетному множеству ее точек.

Система функций $\{\eta_k(t)\}$ называется базисной, а представление сигнала обобщенным рядом (1) — разложением сигнала по системе базисных функций, в качестве которых используются функции Матье, Лежандра, Бесселя, Уолша, тригонометрические и т. д.

Реальное физическое значение для построения систем связи имеет соотношение (1), где применяется конечное число базисных функций, поэтому рассмотрим в (1) сумму конечного числа членов. Согласно равенству (1) геометрическая модель для множества сигналов выражается многомерным векторным пространством, каждой точке которого соответствует определенный сигнал $S(t)$, а ее координаты равны коэффициентам C_k его разложения по заданной системе функций.

Количество линейно независимых базисных функций, по которым сигнал $S(t)$ можно однозначно представить спектром, т. е. совокупностью числовых величин C_k, являющихся проекциями $S(t)$ на оси координат, назовем базой этого сигнала.

Таким образом, база сигналов определяется системой выбранных базисных функций и, следовательно, в зависимости от этой системы для конкретной совокупности множества сигналов $\{S_i(t)\}$ различна, что ставит под сомнение данное определение. Однако практически это не так. Метод обработки сигналов и система базисных функций $\{\eta_k(t)\}$, используемая при реализации конкретного

метода; придают понятию базы сигнала практическое содержание. Необходимо учитывать, что сигналы воздействуют на некоторую последовательность технических устройств. В связи с этим введем понятие сечения системы как места сопряжения (стык) двух соседних элементов, решающих самостоятельную информационную задачу.

Построение оптимального приемного устройства заключается в реализации устройства, осуществляющего в наилучшей степени различение признаков, заложенных в принимаемых сигналах на фоне помех. В качестве признаков сигналов естественно использовать результаты разложения принимаемых сигналов по соответствующим системам базисных функций. Любое приемное устройство в явном или неявном виде осуществляет такое разложение

Сформулированным условием обеспечения максимальной помехоустойчивости, простоты реализации устройств разделения в наибольшей мере удовлетворяют ортогональные базисные функции. Задача формирования сигналов с необходимыми свойствами приобретает четкую физическую трактовку.

При решении задач оптимальной обработки сигналов в каждом из функционально важных сечений информационной системы полезно применять методы спектрального разложения. Понятия размерности сигнала, систем базисных функций $\{\eta_k(t)\}$ должны конкретизироваться в каждом из выделенных в информационной системе функциональных сечений. Тогда применительно к технике связи базу сигнала можно характеризовать как количество линейно независимых базисных функций, определяемое способом формирования и обработки сигнала. По ним данный сигнал (система сигналов $\{S_l(t)\}$) может быть однозначно представлен спектром.

Под базой системы сигналов $\{S_l(t)\}$ следует понимать количество независимых признаков, которые используются во время формирования или обработки этих сигналов в рассматриваемом сечении системы связи. Предполагается, что все признаки, заложенные в сигнал при формировании, применены в его обработке. В частности, при селекции непрерывных сигналов, передаваемых импульсной последовательностью выборочных значений этого сигнала в соответствии с теоремой Котельникова аналоговым стационарным фильтром, свойства которого в частотной области определены коэффициентом передачи $K(\omega, t)$. База сигнала — произведение эффективной ширины спектра сигнала ΔF, пропускаемого фильтром, на длительность сигнала. Согласно Котельникову, $2\Delta Ft$ — число отсчетов N, которым представляется сигнал в виде ряда (1) по функциям $\sin x/x$. Сигнал при обработке тем же фильтром без предварительной дискретизации должен рассматриваться как сигнал с базой $2\Delta FT$. В случае изучения его в виде отрезков непрерывных реализаций, подаваемых на согласованный с ними фильтр, исследуется как сигнал с базой, равной бесконечности, поскольку совокупностью признаков является его форма. Наконец, когда обрабатывается непрерывная реализация фильтром

с полосой пропускания ΔF, база равна единице, так как признак сигнала — энергия принимаемой реализации.

В случае применения для передачи сигналов длительности кодирующих последовательностей, совокупностью признаков которых есть множество возможных смен фазы импульсов на длине этой последовательности, база сигнала $B=T/\tau$. Если кроме смены фазы импульсов использовать и амплитудный признак, база такого сигнала уже будет равна $B_2=2\,B_1$. Понятие базы сигнала часто связывают с понятием избыточности, однако это делается не всегда корректно. Введение избыточности обусловлено стремлением повысить помехоустойчивость системы связи. Теория кодирования прямо указывает на то, что для введения избыточности в сообщение необходимо прежде всего увеличить мерность пространства сообщений путем расширения исходной системы базисных функций до тех пор, пока она не станет полной [5].

Применение обобщенной формы разложения сигнала $S(t)$ с помощью совокупности линейно независимых и более простых функций $\{\eta_k(t)\}$, $k=\overline{1,n}$ в виде (1) позволяет интерпретировать основные положения спектральной теории кодирования с единых позиций теории векторных пространств и все преобразования сигналов в функциональных элементах трактовать как преобразования соответствующих векторных пространств (подпространств). Другими словами, одну и ту же функцию времени $S(t)$, выполняющую роль материального носителя информации, можно рассматривать в различных системах базисных функций, что при их фиксации позволяет оперировать вместо функции $S(t)$ ее спектрами. В спектральной теории преобразования сигналов сводятся к преобразованиям их спектров. Математическое исследование свойств различных сигналов проведено на базе моделей функционального анализа в гильбертовом пространстве. Теория кодирования в основном опирается на комбинаторный анализ, современную алгебру и n-мерную геометрию в конечномерных пространствах. Затрагивая метрические аспекты, отметим, что в спектральной теории принято оценивать расстояние между двумя сигналами по энергии (или средней мощности) их взаимодействия, причем эта энергия может принимать любые численные значения. В теории кодирования расстояние d^x_{kL} между двумя сигналами $S_k(t)$ и $S_L(t)$ чаще всего оценивается в смысле Хемминга по суммарному числу несовпадающих весовых коэффициентов $\{C_i\}_L$ и $\{C_i\}_k$ в разложениях (1) сигналов $S_L(t)$ и $S_k(t)$ и является дискретной целочисленной величиной. Ее максимальное значение равно базе n кодового разложения (1) сигнала $S(t)$. Из разных способов оценки близости двух сигналов и вытекают различия в геометрической интерпретации разложения (1) одного и того же сигнала, имеющего дискретный спектр по данной системе базисных функций. Рассмотрим класс сигналов, построенных на основе дискретных кодов, представляющих собой результат воздействия через фиксированные интервалы времени длительностью τ на амплитуду, фазу

или частоту некоторого несущего колебания упорядоченными дискретными последовательностями — образами сообщений.

Запишем эти сигналы в виде

$$S_k(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} I_i(t)\exp\left[j(\omega_0+\omega_i)t+Q_i\right], & 0\leqslant t\leqslant n\tau;\\ 0 \text{ при других } t,\end{cases} \tag{2}$$

где $\{I_i(t)\}$ $i=\overline{1,n}$ — единичные стробирующие функции, образующие базисную систему для дискретно кодированных сигналов. Этот класс сигналов, как частный случай сигналов гильбертова пространства, исследуем в двух типах пространств: в n-мерном евклидовом пространстве и пространстве, в котором расстояние между двумя точками устанавливается по числу отрезков ломаной линии, соединяющей эти точки. Изучим детально в этих пространствах сигналы $S_k(t)$ при $\omega_i=0$ и $\theta_i=0$. Будем считать сигналы двоично-кодированными, т. е. $\{x_i\}=(-1), (1)\}$, и с равными энергиями

$$\int_0^{T=n\tau} S_k^2(t)\,dt=\int_0^{T=n\tau} S_L^2(t)\,dt=E. \tag{3}$$

Воспользовавшись представлением сигнала в виде (2), с учетом указанных ограничений выражение для энергии сигнала представим как

$$\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n} x_i I\left[t-(i-1)\tau\right]e^{j\omega_0 t}\right]^2 dt=\int_0^T\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\right] I\left[t-(i-1)\tau\right]e^{j2\omega_0 t}\,dt=E. \tag{4}$$

Расстояние между двумя сигналами в евклидовом пространстве определяется соотношением

$$d_{S_k S_L}=\sqrt{\int_0^T\left[S_k(t)-S_L(t)\right]dt}=\sqrt{2E\left[1-\rho_{kL}\right]}, \tag{5}$$

где ρ_{kL} — относительная взаимная энергия анализируемых сигналов, называемая коэффициентом различимости сигналов $S_k(t)$ и $S_L(t)$,

$$\rho_{kL}=\frac{1}{E}\int_0^T S_k(t)\,S_L(t)\,\mathrm{d}t.$$

Записываем данный коэффициент, применяя разложение (2):

$$\rho_{kL}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} x_i^{(L)}\int_0^T I_i(t)\,e^{j2\omega_0 t}\,\mathrm{d}t}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\right]^2\int_0^T I_1(t)\,e^{j2\omega_0 t}\,\mathrm{d}t}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} x_i^{(L)}}{\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\right]^2}. \tag{6}$$

Если $\sum_{i=1}^{n}[x_i]^2 = n$, имеем

$$\rho_{kL} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)} x_i^{(L)}. \tag{7}$$

Разобьем сумму (7) на две, введя символы равнозначности a_i и неравнозначности b_i, что позволит представить последнее выражение в виде

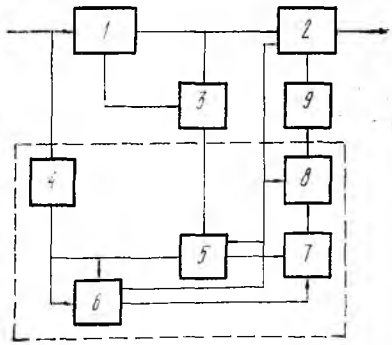
$$\rho_{kL} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{n}. \tag{8}$$

В теории кодирования $d_{kL}^{(x)} = \sum_{i=1}^{n} b_i$ (9), поэтому связь между коэффициентами взаимной корреляции двоично-кодированных сигналов и хемминговым расстоянием между ними определится соотношением

$$\rho_{kL} = 1 - \frac{2d_{kL}^{(x)}}{n}. \tag{10}$$

Оно позволяет установить связь между нормированной характеристикой взаимосвязи дискретно кодированных сигналов и геометрической характеристикой — расстоянием Хемминга, а также сделать ряд конструктивных выводов и вскрыть дополнительные возможности повышения помехоустойчивости при организации операций декодирования сигналов.

Традиционная обработка дискретных сигналов в системах связи, использующих помехоустойчивые коды, ведется с помощью двух решающих схем, которые осуществляют поэлементный прием и декодирование. Анализируя выражение (10), видим, что качество работы приемников с двумя решающими схемами можно существенно улучшить, добавив к ним третью решающую схему (рисунок). В состав этого приемного устройства входят следующие блоки: *1* — приемник для поэлементного приема передаваемых элементарных сигналов $S_i(t)$ (первая решающая схема);



2—декодер (вторая решающая схема); *3*—модулятор; *4*—устройство для задержки обрабатываемого сигнала $S_i(t)$ на один такт рабочей частоты дискретного канала; *5* — коррелятор для свертки сигналов на длительности кодового слова; *6* — нормирующий блок;

7 — сравнивающий блок; 8 — логический блок; 9 — управляющий блок.

Решение, принимаемое декодером 2, функционирующим по алгебро-геометрическим правилам кодового пространства с метрикой Хемминга, проверяется осуществлением третьей решающей схемой (на рисунке обведена пунктиром) дополнительной обработки сигнала на длине кодового слова. Для этого модулятором 3 на длине кодового слова $n\tau$ формируется гипотетический линейный сигнал $S^*(t)$ так же, как это было сделано на передающей стороне, а затем в блоке 5 производится свертка $S^*(t)$ с принятым из канала связи сигналом $Y(t)=S(t)+n(t)$, который содержит действительный образец переданного сигнала $S(t)$. Результат свертки необходимо сравнить с сигналом «норма»($\rho_{y,s^*}=1$), получаемым в блоке 6. Разностный сигнал на выходе блока 6 несет информацию о расстоянии по Хеммингу между гипотетической кодовой последовательностью, на основе которой сформирован сигнал $S^*(t)$ и действительно переданной кодовой последовательностью, содержащейся в $Y(t)$. Если известно при каких значениях веса векторов ошибок ω_e декодер выдает ошибочное решение в случае декодирования кодового блока ($\omega_e > d_{\text{мин}}-1$ в режиме обнаружения ошибок и $\omega_e > (d_{\text{мин}}-1)/2$ в режиме исправления ошибок), с помощью логического блока 8 проверяется решение декодера по значению разностного сигнала со схемы сравнения.

Третья решающая схема обрабатывает линейный сигнал «в целом» на длине кодового слова и учитывает все корреляционные связи между элементами. Благодаря этому приемник обладает более высокой помехоустойчивостью по сравнению с известными приемниками, построенными на базе двух решающих схем, хотя и несколько уступает приемникам с обработкой сигналов «в целом» на длине $n\tau$ кодового блока решающей схемой, содержащей 2^{nR} корреляторов (R — относительная скорость передачи информации при применении данного кода), выигрывая в 2^{nR} раз у них в простоте реализации.

Таким образом, обобщенный спектральный подход позволяет не ограничиваться рассмотрением только широкополосных сигналов как сигналов с большой базой. В зависимости от конкретных физических ограничений, характерных для каждого из функциональных сечений системы связи, можно ставить задачу выбора оптимального способа спектрального разложения $S(t)$, сохраняя значение базы сигнала неизменным или варьируя его в пределах, удовлетворяющих критерию качества обработки $S(t)$. Все положения теории помехоустойчивого кодирования полностью переносятся и на пространства сложных сигналов, следовательно, принципы повышения достоверности при различении этих сигналов полностью адекватны принципам повышения достоверности, используемым в теории кодирования.

Список литературы: 1. *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. М., 1973. 370 с. 2. *Окунев Ю. Б., Яковлев Л. А.* Широкополосные системы связи с составными сигналами. М., 1968. 167 с. 3. *Лезин Ю. С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. М., 1986. 447 с. 4. *Хьюлеман Л. П.* Активные фильтры. М., 1972. 527 с. 5. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., 1972. 351 с.

Поступила в редколлегию 10.11.86

УДК 621.391

Ю. П. ЖУРАКОВСКИЙ, д-р техн. наук, *А. М. КУПРИЕНКО*

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗЫ НА ШИРИНУ СПЕКТРА СИГНАЛОВ ФМ

При определении эффективности систем передачи данных по каналам связи, разработке новых систем и других случаях возникает проблема вычисления ширины спектра сигналов. Наибольшее распространение получил способ передачи данных сигналами в виде отрезков целого числа периодов гармонических функций. Цель работы — исследование влияния начальной фазы на ширину спектра $\Delta\Omega$ таких сигналов при дискретной фазовой модуляции (ФМ), которую определяют как интервал частот, содержащий заданную часть энергии сигнала [1—3]. Для анализа частотного распределения энергии получим выражение функции спектральной плотности сигнала с начальной фазой φ, числом периодов N при допущении, что амплитуда и круговая частота Ω_0 сигнала равны единице:

$$S(j\omega)=\int_{-\pi N}^{\pi N}\sin(t+\varphi)\,e^{-i\omega t}dt=2(-1)^N\sin\omega\pi N\times$$
$$\times(\omega\sin\varphi-j\cos\varphi)/(\omega^2-1). \qquad (1)$$

Запишем выражение для вычисления относительной энергии сигнала в интервале частот $[0, x]$, используя равенство Парсеваля и свойство четности модуля функции спектральной плотности

$E_p(x, N)=\int_0^x|S(j\omega)|^2\,d\omega/\pi E_0$ (2), где $E_0=\pi N/2$ — полная энергия сигнала.

Вычислив интеграл

$$E_p(x, N)=\int_0^x\frac{4\sin^2\omega\pi N}{\pi^2N(\omega^2-1)}(\omega^2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\,d\omega, \qquad (3)$$

получим $E_p(x, N)=[A(x, N)-\cos 2\varphi\cdot B(x, N)]/\pi$ (4). Здесь

$$A(x, N)=\mathrm{Si}\,[2\pi N(x-1)]+\mathrm{Si}\,[2\pi N(x+1)]-\frac{2x\sin^2\pi Nx}{\pi N(x^2-1)};$$

$$B(x, N)=\{S_1[2\pi N(x-1)]-S_1[2\pi N(x+1)]\}/2\pi N,$$