

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

**М.А. Омаров**

**ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**  
**Частина 1**  
**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

РЕКОМЕНДОВАНО  
навчально-методичною  
радою університету.  
Протокол №30 від 27.03.2017

Харків 2017

УДК 531/534(075.8)

Омаров М.А. Основи теоретичної механіки. Ч. 1: навч. посібник. –Харків: ХНУРЕ, 2017. – 184 с.

ISBN 978-966-659-228-9

У даному навчальному посібнику розглядаються основні модулі навчальної дисципліни «Теоретична механіка». Складається посібник з трьох розділів – «Статика», «Кінематика», «Динаміка».

Для студентів вищих технічних навчальних закладів, що навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», а також може використовуватися інженерно-технічними працівниками, які займаються розробкою, впровадженням і експлуатацією виробів радіоелектронного приладобудування.

Іл.: 133. Табл.: 2. Бібліогр. наймен: 8.

Рецензенти:

І.В. Руженцев, д-р техн. наук, проф., зав. каф. метрології та технічної експертизи ХНУРЕ;

М.Д. Євстратов, канд. техн. наук, доц. каф. МСТ ХНУРЕ.

ISBN 978-966-659-228-9

© М.А. Омаров, 2017

## ЗМІСТ

<b>Вступ</b> .....	7
<b>1 Статика</b> .....	8
1.1 Основні поняття статyki .....	8
1.1.1 Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил .....	9
1.1.2 Розкладання сили на дві складові.....	10
1.1.3 В'язі і їхні реакції. Принцип звільнення.....	12
1.1.4 Розподілені навантаження.....	16
1.2 Плоска система сил, що збігаються .....	17
1.2.1 Геометричний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи сил, що збігаються.....	17
1.2.2 Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що збігаються.....	18
1.2.3 Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи сил, що збігаються.....	20
1.2.4 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що збігаються.....	21
1.3 Плоска система паралельних сил і момент сили .....	23
1.3.1 Основні властивості пари .....	23
1.3.2 Еквівалентні пари.....	25
1.3.3 Теорема про складання пар .....	27
1.3.4 Умова рівноваги плоскої системи пар .....	28
1.3.5 Опори і опорні реакції балок .....	28
1.4 Плоска система довільно розташованих сил.....	30
1.5 Тертя .....	33
1.5.1 Поняття про тертя .....	33
1.5.2 Тертя ковзання.....	34
1.5.3 Рівновага тіла на похилій поверхні .....	39
1.5.4 Тертя кочення .....	42
1.5.5 Стійкість проти перекидання.....	45
1.6 Просторова система сил .....	46
1.6.1 Просторова система сил, що збігаються.....	46
1.6.2 Проекція сили на вісь у просторі.....	46

1.6.3 Розкладання сили за трьома осями координат.....	47
1.6.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої просторової системи сил, що збігаються.....	48
1.6.5 Аналітичні умови рівноваги просторової системи сил, що збігаються.....	48
1.6.6 Момент сили відносно осі.....	50
1.6.7 Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил.....	51
1.6.8 Теорема про момент рівнодіючої відносно осі (теорема Варіньона).....	54
1.7 Центр тяжіння.....	55
1.7.1 Центр паралельних сил.....	55
1.7.2 Визначення положення центру тяжіння.....	58
1.7.3 Методи знаходження центру тяжіння.....	59
1.7.4 Положення центру тяжіння деяких фігур.....	61
<b>2 Кінематика.....</b>	<b>66</b>
2.1 Кінематика точки.....	66
2.1.1 Основні поняття кінематики.....	66
2.1.2 Основні визначення теорії механізмів і машин.....	66
2.1.3 Способи задання руху точки.....	67
2.1.4 Швидкість точки.....	70
2.1.5 Прискорення точки в прямолінійному русі.....	72
2.1.6 Прискорення точки в криволінійному русі.....	73
2.1.7 Поняття про кривину кривих ліній.....	74
2.1.8 Теорема про проекції прискорення на дотичну і нормаль.....	75
2.1.9 Види руху точки залежно від прискорення.....	78
2.1.10 Формули і графіки рівномірного руху точки.....	79
2.1.11 Формули і графіки рівнозмінного руху точки.....	81
2.1.12 Теорема про проекції швидкості на координатну вісь.....	84
2.1.13 Теорема про проекції прискорення на координатну вісь.....	86
2.2 Простіші рухи твердого тіла.....	87
2.2.1 Поступальний рух.....	87
2.2.2 Обертання навколо нерухомої осі.....	90
2.2.3 Різні види обертального руху.....	93
2.2.4 Порівняння формул кінематики для поступального та обертального рухів.....	97

2.2.5 Перетворення обертальних рухів .....	97
2.3 Складний рух точки .....	101
2.3.1 Поняття про складний рух точки.....	101
2.3.2 Теорема про складання швидкостей .....	103
2.4 Плоскопаралельний рух твердого тіла.....	105
2.4.1 Поняття про плоскопаралельний рух.....	105
2.4.2 Метод миттєвих центрів швидкостей .....	106
2.4.3 Властивості миттєвого центру швидкостей .....	107
2.4.4 Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний .....	110
<b>3 Динаміка</b> .....	124
3.1 Основи динаміки матеріальної точки .....	124
3.1.1 Аксиоми динаміки. Основне рівняння.....	124
3.1.2 Принцип незалежності дій сил. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки .....	126
3.1.3 Рух матеріальної точки, кинutoї під кутом до горизонту.....	131
3.2 Основи кінетостатики .....	134
3.2.1 Метод кінетостатики.....	134
3.2.2 Сили інерції під час криволінійного руху .....	136
3.3 Робота і потужність.....	142
3.3.1 Робота постійної сили на прямолінійній ділянці шляху.....	142
3.3.2 Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху .....	143
3.3.3 Теорема про роботу рівнодіючої .....	144
3.3.4 Теорема про роботу сили тяжіння.....	145
3.3.5 Робота постійної сили, яка прикладена до тіла, що обертається.....	147
3.3.6 Потужність.....	148
3.3.7 Коефіцієнт корисної дії .....	150
3.4 Загальні теореми динаміки матеріальної точки .....	151
3.4.1 Теорема про зміну кількості руху .....	151
3.4.2 Теорема про зміну кінетичної енергії .....	153
3.4.3 Закон збереження механічної енергії.....	157
3.5 Основи динаміки системи матеріальних точок.....	160
3.5.1 Рівняння поступального руху твердого тіла .....	160
3.5.2 Рівняння обертального руху твердого тіла.....	161
3.5.3 Кінетична енергія твердого тіла .....	166

3.5.4 Порівняння формул динаміки для поступального і обертального руху твердого тіла .....	168
3.5.5 Поняття про балансування тіл, що обертаються .....	172
3.5.6 Деякі відомості про механізми .....	174
<b>Запитання та завдання для самоперевірки.....</b>	<b>181</b>
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>182</b>

## ВСТУП

Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл. Вона є основою моделювання у різних природничих науках, на базис яких спираються прикладні науки, і це дозволяє стверджувати, що теоретична механіка – це фундаментальна наука, яка є теоретичною базою сучасної техніки.

Тому перед навчальними закладами стоїть задача формування спеціалістів широкого профілю, яка об'єднує фундаментальні знання і необхідну практичну підготовку для роботи в галузі теоретичної механіки. У зв'язку з цим, у навчальному процесі підготовки студентів за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» значну увагу надано таким розділам теоретичної механіки, як статика, кінематика, динаміка, які розглядаються у першій частині навчального посібника. У другій частині планується розглянути механіку твердого деформованого тіла.

Мета навчального посібника – систематизувати інформацію з розрізнених джерел у галузі теоретичної механіки і подати її у зручному для сприйняття студентів вигляді.

Стисло викладено такі розділи теоретичної механіки: статика, кінематика та динаміка.

Навчальний посібник призначено для студентів як довідковий під час вивчення навчальної дисципліни «Теоретична механіка» за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», може бути орієнтиром під час підготовки до іспитів зі спеціальних навчальних дисциплін, а також під час атестації з освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр. Крім того, він може бути корисним студентам, магістрантам і аспірантам інших суміжних спеціальностей, наприклад, «Мехатроніка», «Телекомунікації та радіотехніка» тощо.

# 1 СТАТИКА

## 1.1 Основні поняття статички

Статика є частиною теоретичної механіки, і вивчає умови, за яких тіло знаходиться в рівновазі. Рівновагою вважатимемо такий стан, коли тіло знаходиться у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно.

Тіло називають абсолютно твердим (або абсолютно жорстким), якщо відстань між будь-якими його точками не змінюється під час дії на нього інших тіл. Абсолютно твердих тіл у природі немає, але у багатьох випадках зміни форми і розмірів (деформації) тіл настільки незначні, що ними можна нехтувати. У теоретичній механіці вважають тіла абсолютно твердими і фізико-механічні властивості їх не враховують (за винятком питань, пов'язаних з тертям).

Матеріальною точкою називається точка, що має масу. Матеріальною точкою враховується не лише тіло, що має дуже малі розміри, але і будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даного завдання можна нехтувати. Одне і те саме реальне тіло залежно від постановки завдання може розглядатися або як матеріальна точка, або як тіло, розміри якого необхідно врахувати. Будь-яке тіло можна вважати взаємозв'язаною сукупністю (системою) матеріальних точок. Абсолютно тверде тіло є незмінною системою матеріальних точок.

Тіло називається вільним, якщо жодні інші тіла не перешкоджають його переміщенню в будь-якому напрямі, інакше тіло називається затверділим. Більшість тіл, що оточують нас, є затверділими тілами.

Тіла в природі по-різному взаємодіють між собою або з їх довкіллям. Механічна взаємодія тіл, тобто взаємодія, що впливає на їх стан спокою або руху (механічний стан), характеризується силами.

Сила є мірою механічної взаємодії тіл. Сила характеризується трьома параметрами: числовим значенням, напрямом і точкою дотику. Таким чином, сила – величина векторна. Числове значення сили називається модулем вектора сили. Напрямок сили є напрям того руху, який отримала б вільна матеріальна точка, що знаходиться в стані спокою, під дією цієї сили. Пряма лінія, по якій направлений вектор сили, називається лінією дії сили.

Міжнародну систему одиниць (СІ) як одиницю сили встановлює Ньютон (Н).

Ньютон є сила, що надає тілу, масою 1 кг, прискорення  $1 \text{ м/с}^2$  у напрямку дії сили.



Графічно силу зображують відрізком прямої із стрілкою; довжина відрізка в певному масштабі дорівнює модулю вектора сили (рис. 1.1). Масштаб сили показує, скільки одиниць модуля сили міститься в одиниці довжини її вектора. Одиниця масштабу сили, наприклад,  $\mu p = \text{Н/мм}$  або  $\text{Н/см}$ .

На рис. 1.1 зображена сила, прикладена в точці  $A$ , що діє по лінії  $mn$ . Вектор сили позначимо великою латинською жирною літерою  $F$ , а модуль сили – тією ж літерою, але світлою  $F^*$ . Для вектора сили  $F$ , точка  $A$  називатиметься початком, а точка  $B$  – кінцем вектора. Часто зручно змальовувати вектор сили так, щоб стрілка, яка стоїть в кінці вектора, упиралася в точку прикладання сили (рис. 1.1).

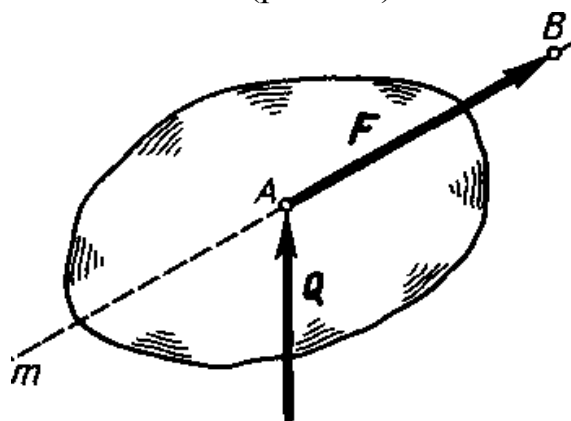


Рисунок 1.1

Сукупність тіл (у тому числі матеріальних точок), якимось чином зв'язаних між собою, назвемо системою тіл. Сили взаємодії між тілами, що входять в дану систему, називають внутрішніми, а сили, з якими діють на дану систему інші тіла, – зовнішніми. Якщо дану систему розкласти на частини і розглядати рівновагу кожної частини окремо, то внутрішні для всієї системи сили, що діють в перетинах, стануть зовнішніми силами для частин системи. Такий метод дозволяє визначити внутрішні сили, що діють в перетинах, і називається методом перетинів. У теоретичній механіці він широко застосовується. Слід зауважити, що ділення сил на зовнішні і внутрішні умовно і залежить від постановки завдання і навіть методу її розв'язання.

### ***1.1.1 Теорема про рівновагу плоскої системи трьох непаралельних сил***

**Теорема.** Для рівноваги плоскої системи трьох непаралельних сил необхідно, але недостатньо, щоб лінії дії цих сил перетиналися в одній точці.

Нехай надані сили  $P$ ,  $Q$  і  $F$ , причому лінії дії сил  $P$  і  $Q$  перетинаються в точці  $A$  (рис. 1.2). На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо сили  $P$  і  $Q$  уздовж ліній їх дії в точку  $A$  і на підставі аксіоми паралелограма знайдемо

рівнодійну  $F\Sigma$  цих сил. У результаті отримуємо систему двох сил  $(F\Sigma, F)$ , еквівалентну даним трьом силам:

$$(P, Q, F) \equiv (F\Sigma, F). \quad (1.1)$$

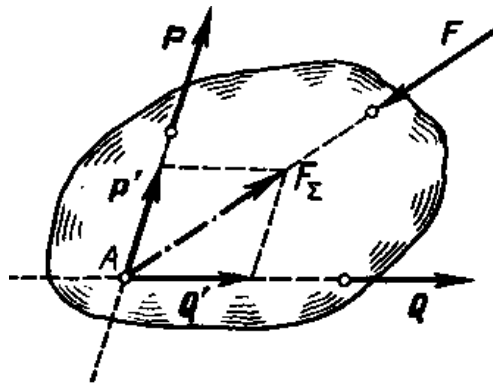


Рисунок 1.2

Але, згідно з аксіомою III, рівновага можлива, якщо сили  $F\Sigma$  і  $F$  лежать на одній прямій, отже, лінія дії сили  $F\Sigma$  також пройде через точку  $A$ .

Дана теорема дає лише необхідну умову рівноваги, але недостатньо, оскільки три сили можуть сходитися в одній точці, але не бути в рівновазі (сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називають такими, що збігаються).

### 1.1.2 Розкладання сили на дві складові

Розкласти силу на складові – це означає знайти систему сил, еквівалентну даній силі. У загальному випадку завдання розкладання сили на дві складові є завдання невизначене, таке, що має незліченну безліч розв’язань. Для того, щоб завдання мало певне розв’язання, необхідно задати дві умови, наприклад, напрями або модулі двох складових тощо. Можливі чотири варіанти розкладання сили  $F\Sigma$  на дві складові  $P$  і  $Q$ , прикладені в тій самій точці. У всіх випадках розв’язання зводиться до побудови паралелограма сил.

1. Надані напрями двох складових  $P$  і  $Q$ . Розв’язання показано на рис. 1.3.

2. Надані модуль і напрям однієї складової  $Q$ . Розв’язання показано на рис. 1.4.

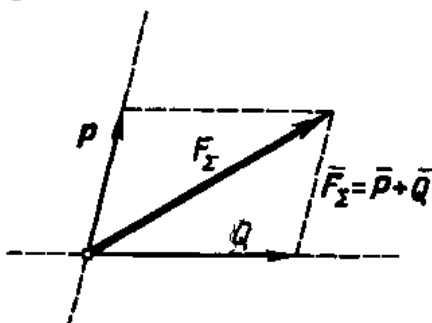


Рисунок 1.3

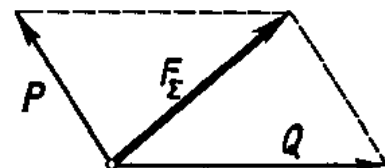
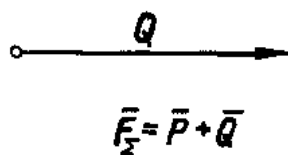


Рисунок 1.4

3. Надані модулі двох складових  $P$  і  $Q$ .

Завдання розв'язується методом зарубок (рис. 1.5).

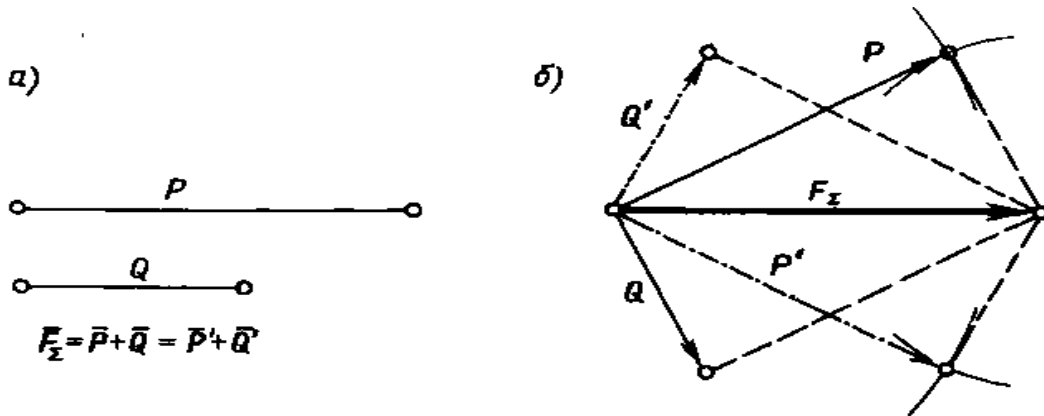


Рисунок 1.5

Завдання має два розв'язання, якщо  $P + Q > F_\Sigma$  і  $P - Q < F_\Sigma$ .

Завдання не має розв'язання, якщо  $P + Q < F_\Sigma$  і  $P - Q > F_\Sigma$ .

Завдання має одне розв'язання, якщо  $P + Q = F_\Sigma$  і  $P - Q = F_\Sigma$ .

4. Надані напрями складової  $Q$  і модуль другої складової  $P$ .

Завдання вирішується методом зарубок (рис. 1.6).

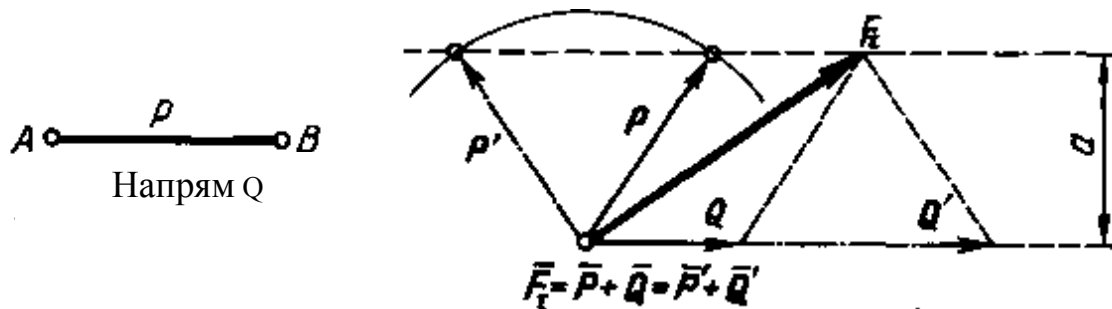


Рисунок 1.6

Завдання має одне розв'язання, якщо  $a = AB$  (в цьому випадку кут між векторами  $P$  і  $Q$  дорівнює  $90^\circ$ ).

Завдання має два розв'язання, якщо  $a < AB$ .

Завдання не має розв'язань, якщо  $a > AB$ .

З рис. 1.6 видно, що модуль складової залежить від напрямку другої складової.

**Приклад 1.1.** Сила тиску стружки за напрямом, перпендикулярному передній грані різця, дорівнює  $R$ . Кут різання різця (кут між передньою гранню і напрямом руху оброблюваного предмета) дорівнює  $\delta$ .

Визначити силу  $N$  опору різання, направлену по лінії  $AB$ , і перпендикулярну до неї силу  $S$ , що притискає різець до оброблюваної поверхні (рис. 1.7). Тертям нехтувати.

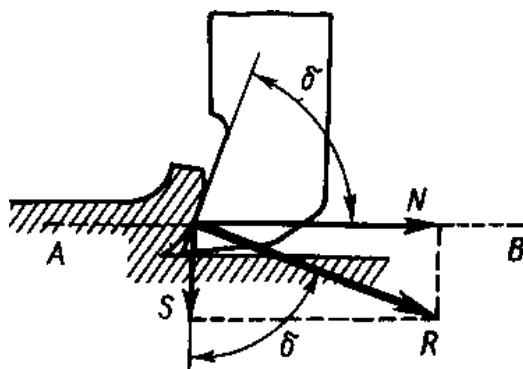


Рисунок 1.7

*Розв'язання.* Розкладемо задану силу  $R$  на дві складові  $N$  і  $S$  за заданими напрямками. З прямокутного трикутника отримаємо

$$N = R \sin \delta, \quad S = R \cos \delta.$$

### **1.1.3 В'язі та їхні реакції. Принцип звільнення**

В'язями називають обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла в просторі. Сила, з якою тіло діє на в'язь, називається силopotужним тиском; сила, з якою в'язь діє на тіло, називається силоміцькісною реакцією або просто реакцією. Згідно з аксіомою взаємодії, ці сили за модулем рівні і діють по одній прямій в протилежні сторони. Сили реакцій і тиску прикладені до різних тіл і тому не є системою сил.

Сили, що діють на тіло, можна поділити на активні та реактивні. Активні сили намагаються переміщати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні перешкоджають цьому переміщенню. Принципова відмінність активних сил від реактивних у тому, що значення реактивних сил, взагалі кажучи, залежить від значення активних сил, але не навпаки. Активні сили часто називають навантаженнями.

Під час розв'язання більшості завдань статички сковане тіло умовно зображують як вільне за допомогою так званого принципу звільнення, який формулюється так: будь-яке сковане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі, замінивши їх реакціями.

У результаті застосування цього принципу отримуємо тіло, що вільне від в'язей і знаходиться під дією деякої системи активних і реактивних сил.

Напрямок реакцій визначається тим, в якому напрямі дана в'язь перешкоджає переміщенню тіла. Правило для визначення напрямку реакцій можна сформулювати так: напрямок реакції в'язі протилежний до напрямку переміщення.

Розглянемо напрям реакцій основних видів в'язей, що зустрічаються в різних конструкціях.

1. Ідеально гладенька поверхня (рис. 1.8). У цьому випадку реакція  $R$  напрямлена перпендикулярно опорній поверхні у бік тіла, оскільки така в'язь не дає тілу переміщатися лише у бік опорної поверхні і перпендикулярно їй.

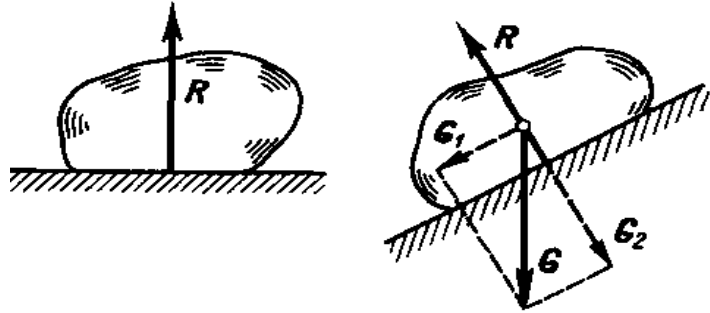


Рисунок 1.8

Якщо тіло знаходиться на похилій поверхні, то, розклавши силу тяжіння  $R$  на дві складові  $G_1$  і  $G_2$ , паралельну і перпендикулярну опорній поверхні, можна бачити, що складова  $G_1$  рухатиме тіло уздовж поверхні, а складова  $G_2$  притискуватиме тіло до поверхні і врівноважуватиметься реакцією  $R$ .

2. Ідеально гладенька поверхня (рис. 1.9). У цьому випадку реакція  $R$  напрямлена перпендикулярно дотичній поверхні  $t-t$ , тобто по нормалі до опорної поверхні у бік тіла, оскільки нормаль є єдиний напрям переміщення тіла, якого не допускає дана в'язь.

3. Закріплена точка або ребро кута (рис. 1.10, а, ребро  $B$ ). У цьому випадку реакція  $R_B$  напрямлена по нормалі до поверхні ідеально гладенького тіла у бік тіла, оскільки нормаль до поверхні тіла є єдиний напрям переміщення, який не допускає ці в'язі.

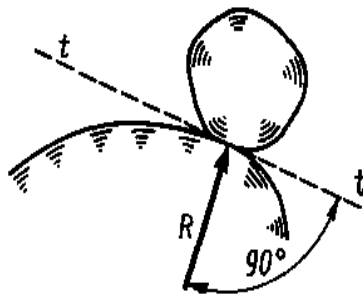


Рисунок 1.9

4. Гнучка в'язь (рис. 1.10, а). Реакція  $R$  гнучкої в'язі не дає тілу лише віддалятися від точки підвісу і тому напрямлена уздовж зв'язку від тіла до точки підвісу.

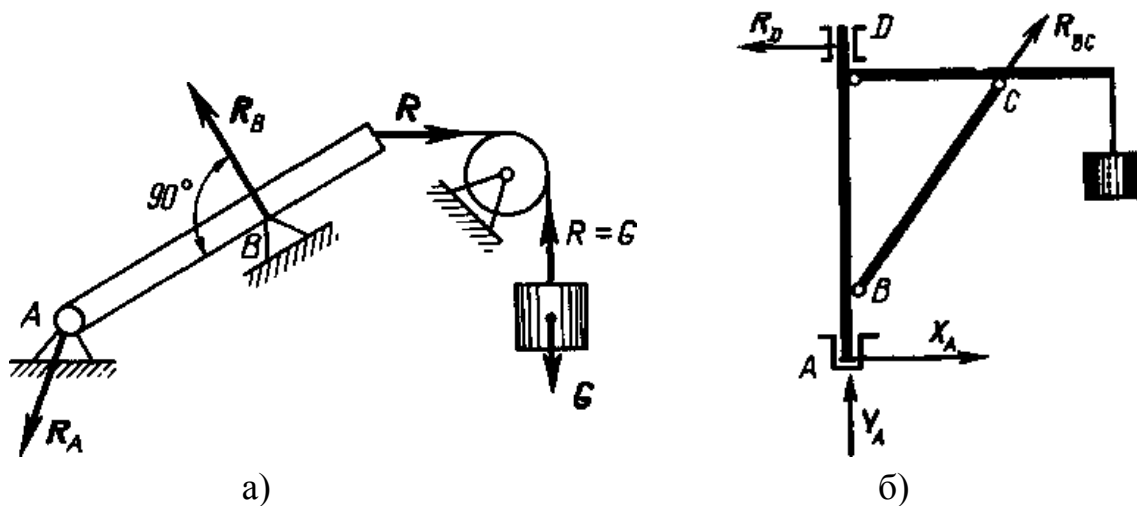


Рисунок 1.10

З рис. 1.10, а видно, що гнучка в'язь, перекинута через блок, змінює напрям зусилля (натягнення нитки), що передається.

У конструкціях широке поширення мають в'язі, які називають шарнірами.

Шарніром є рухоме з'єднання двох тіл, що обертаються навколо загальної осі (циліндричний шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

5. Ідеально гладенький циліндричний шарнір (рис. 1.10, а), шарнір А.

6. Ідеально гладенький кульовий шарнір.

У цьому випадку заздалегідь відомо лише, що реакція проходить через центр шарніра, оскільки тіло, закріплене в кульовому шарнірі, може повертатися в будь-якому напрямі, але не може здійснювати жодних лінійних переміщень в просторі.

7. Ідеально гладенький підп'ятник (рис. 1.10, б). Його можна розглядати як поєднання циліндричного шарніра і опорної поверхні.

Тому вважатимемо реакцію підп'ятника такою, що складається з двох складових:  $X_A$  і  $Y_A$ .

Повна реакція  $R_A$  підп'ятника дорівнює векторній сумі цих складових:

$$R_A = X_A + Y_A. \quad (1.2)$$

8. Стрижень, закріплений двома кінцями в ідеально гладеньких шарнірах і навантажений лише по кінцях (рис. 1.10, б).

У цьому випадку реакція стрижня, згідно з аксіомою (умова рівноваги двох сил), може бути напрямлена лише по лінії ВС, тобто по прямій, що з'єднує осі шарнірів.

**Приклад 1.2.** В'язь здійснюється у формі котків (шарнірів).

Визначити напрям реакції  $N$  котка.

*Розв'язання.* Реакція  $N$  котка напрямлена перпендикулярно до опорної площини котка (рис. 1.11).

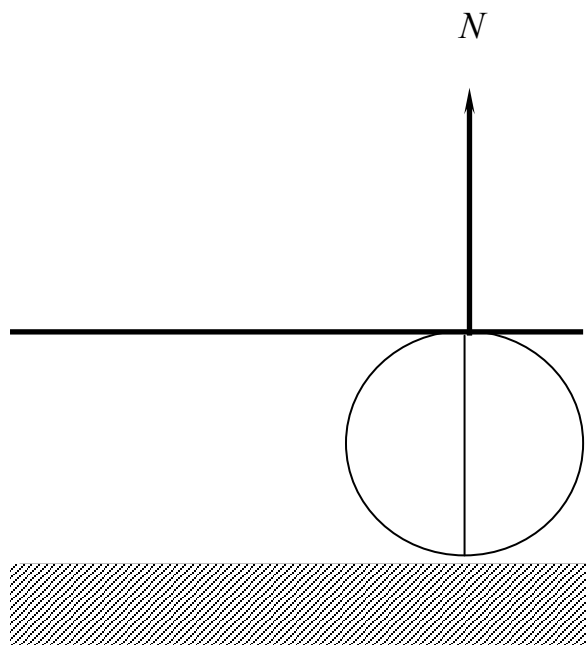


Рисунок 1.11

Надалі часто зустрічатимуться елементи різних конструкцій, які називаються балками. Балкою прийнято вважати тверде тіло, в якого довжина значно більше поперечних розмірів; геометричне місце центрів тяжіння всіх поперечних перетинів називається віссю балки. Балка з прямолінійною віссю, що покладено на опори і згинається прикладеними до нього навантаженнями, називають балкою.

**Приклад 1.3.** Визначити напрям реакцій опор балки  $AB$ , шарнірно закріпленої на нерухомій опорі  $A$  і опорі  $B$ , покладеної на катки; вказати напрям сили тиску балки на опору  $A$  (рис. 1.12). Силою тяжіння балки нехтувати.

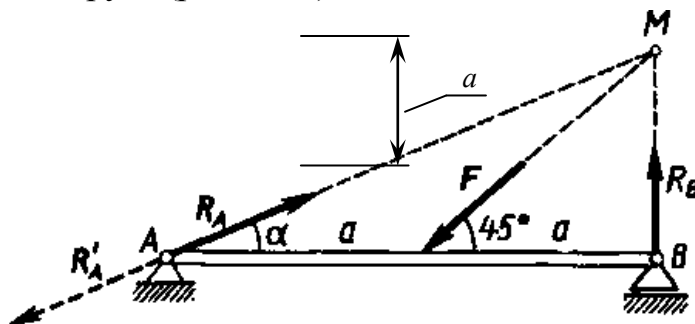


Рисунок 1.12

*Розв'язання.* Застосувавши принцип звільнення, відкинемо в'язі балки, тобто опори  $A$  і  $B$ , і замінимо їх реакціями  $R_A$  і  $R_B$ . Реакція  $R_B$  рухомого шарніра

перпендикулярна опорній поверхні, оскільки це єдиний напрям переміщення, що знищується даною в'яззю. Реакція  $R_A$  нерухомого шарніра проходить через вісь, і згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил, лінія дії цієї реакції має проходити через точку  $M$ . Реакція  $R_A$  буде напрямлена по лінії  $A_M$  праворуч і вгору, оскільки, якщо опору  $A$  у думках відкинути, то без реакції кінець  $F$  переміщатиметься вліво і вниз.

Згідно з третім законом Ньютона, сила тиску  $R'_A$  балки на опору також буде напрямлена по лінії  $A_M$ , але в протилежну сторону. Визначимо кут  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{a}{2a} = 0,5,$$

звідси

$$\alpha = 26^\circ 30' = 0,46 \text{ рад.}$$

#### 1.1.4 Розподілені навантаження

Раніше було розглянуто сили, які умовно вважалися прикладеними в точці (насправді вони прикладені до площини, розмірами якої нехтують); такі сили називають зосередженими. У практиці часто зустрічаються сили, прикладені за об'ємом до поверхні тіла, наприклад, сила тяжіння, тиск вітру або води тощо. Такі сили називають розподіленими.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю, що зазвичай позначається  $q$ . Інтенсивність є сила, що діє на одиницю довжини навантаженої ділянки. Інтенсивність у СІ виражається в Н/м.

Розподілене навантаження, що має постійну інтенсивність, називається рівномірно розподіленим (рис. 1.13).

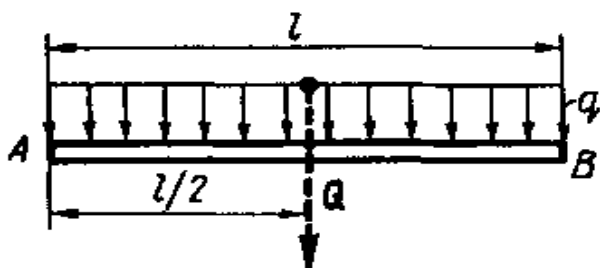


Рисунок 1.13

Під час розв'язання завдань статyki розподілене навантаження замінюють його рівнодійною. Модуль рівнодійного, рівномірно розподіленого навантаження дорівнює

$$Q = ql. \quad (1.3)$$

Прикладена рівнодійна  $Q$  у середині відрізка  $AB$ .



Розподілене навантаження, що має змінну інтенсивність, називається нерівномірно розподіленим. Прикладом такого навантаження може служити змінний по висоті тиск води на греблю.

Навантаження, розподілені по поверхні, характеризуються тиском, тобто натискання на одиницю площини. У СІ тиск виражається у Па або Н/м<sup>2</sup>.

## 1.2 Плоска система сил, що збігаються

### 1.2.1 Геометричний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що збігаються

Система сил, лінії дії яких лежать в одній площині і всі перетинаються в одній точці, називається плоскою системою сил, що збігаються.

**Теорема.** Плоска система сил, що збігаються, в загальному випадку еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійною проходить через точку перетину ліній дії складових.

Нехай дана плоска система трьох сил  $F_1, F_2$  і  $F_3$ , лінії дії яких збігаються в точці  $A$ . На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо ці сили уздовж ліній їх дії в точку  $A$ . Склавши перші дві сили  $F_1$  і  $F_2$  за правилом паралелограма, отримаємо їх рівнодійну  $R$  (рис. 1.14, а):

$$R = F_1 + F_2. \quad (1.4)$$

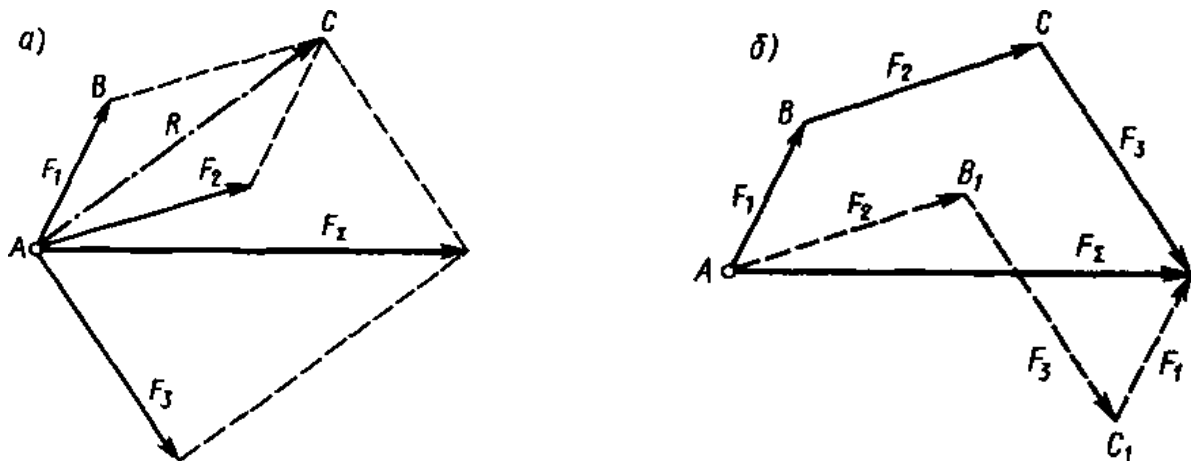


Рисунок 1.14

Користуючись тією ж аксіомою паралелограма, складемо рівнодійну  $R$  із силою  $F_3$ :

$$F_\Sigma = R + F_3 = F_1 + F_2 + F_3, \quad (1.5)$$

де  $F_\Sigma$  – рівнодійна даної системи трьох сил.

Аналогічні міркування можна провести для будь-якої кількості сил, внаслідок чого отримуємо

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n. \quad (1.6)$$

Скорочено це рівняння запишемо так:

$$F_{\Sigma} = \sum F_i, \quad (1.7)$$

де  $i$  – всі цілі числа від 1 до  $n$ , а  $\Sigma$  (сигма) означає суму.

Очевидно, що побудову, яка зображена на рис. 1.14, а можна замінити простішою (рис. 1.14, б). Багатокутник  $ABCD$  називається силовим багатокутником. Сторона  $AD$ , що поєднує початок першого з кінцем останнього вектора, називається замикаючою стороною.

Необхідно пам'ятати, що стрілки векторів складових сил утворюють певний напрям обходу по контуру силового багатокутника, а замикаюча сторона, що визначає модуль і напрям рівнодійною, має стрілку, направлену проти обходу (рис. 1.14, б).

Якщо визначити рівнодійну за допомогою геометрії і тригонометрії, то такий спосіб називатиметься *геометричним*.

Якщо зробити креслення силового багатокутника в певному масштабі, то рівнодійна визначиться простим виміром замикаючої сторони з подальшим множенням на масштаб. Такий спосіб знаходження рівнодійної називається *графічним*.

Порядок складання векторів у ході побудови силового багатокутника на величину рівнодійної не впливає, оскільки векторна сума від зміни місць додатків не змінюється (рис. 1.14, б, багатокутник  $AB_1C_1D$ ).

### ***1.2.2 Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що збігаються***

В ході побудови силового багатокутника можливий випадок, коли кінець останнього вектора збігається з початком першого. В цьому випадку замикаючої сторони не буде, і такий силовий багатокутник називається замкнутим.

Очевидно, що рівнодійна  $F_{\Sigma}$  системи сил, що збігаються, дає замкнутий силовий багатокутник, що дорівнює нулю і, отже, ця система еквівалентна нулю, тобто знаходиться в рівновазі. Звідси випливає умова, за якої плоска система сил, що збігаються, знаходитиметься в рівновазі. Ця умова виражається рівнянням

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = \sum F_i = 0 \quad (1.8)$$

і формулюється так: для рівноваги плоскої системи сил, що збігаються, необхідно і достатньо, щоб силовий багатокутник був замкнутим.

Умови рівноваги, записані у вигляді рівнянь, що містять невідомі величини, називаються рівняннями рівноваги.

Розв'язання більшості завдань статки проводять в три етапи:

- а) вибирають тіло, рівновага якого розглядатиметься;
- б) відкидають зв'язки, замінюючи їх реакціями, і встановлюють, яка система сил діє на тіло;
- в) користуючись умовами рівноваги, знаходять невідомі величини.

Під час розв'язання завдань теоретичної механіки необхідно суворо дотримуватись правила: розмірність і одиниці величин всіх додатків і обох частин рівності мають бути однаковими.

Користуючись цим правилом, доцільно в сумнівних випадках перевіряти правильність ходу розв'язання завдань, для чого слід поставити в складових рівності одиниці всіх вхідних в нього величин, що перевіряються, і, зробивши можливі скорочення, порівняти отримані одиниці правої і лівої частин.

Перевіримо в такий спосіб наведену в пункті 1.1.5 формулу  $Q = ql$ :

$$[Q] = [q] \cdot [l], \quad \text{H} = (\text{H}/\text{м}) \cdot \text{м} = \text{H}. \quad (1.9)$$

Одиниці правої і лівої частин рівняння однакові, отже, формула за розмірністю правильна.

Слід зауважити, що така перевірка нічого не говорить про правильність значень фізичних величин, що входять у формули.

**Приклад 1.4.** До вертикальної гладкої стіни на мотузку, що складає зі стіною кут  $\alpha$ , підвішена однорідна куля (рис. 1.15). Визначити натягнення  $F$  мотузки і силу тиску  $P$  кулі на стіну, якщо сила тяжіння кулі  $G$ .

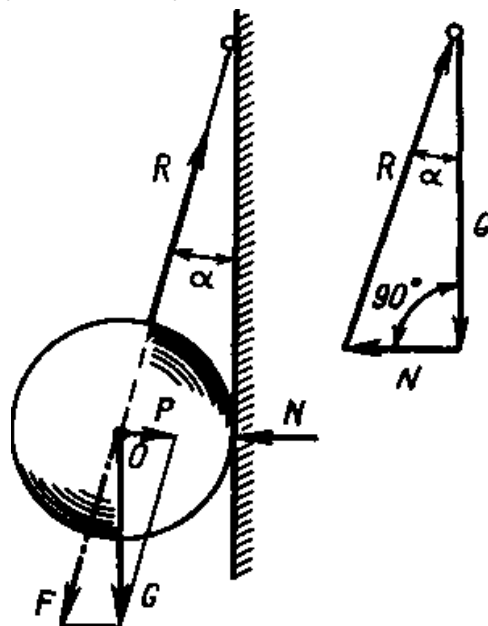


Рисунок 1.15

*Розв'язання.* Розглянемо рівновагу кулі. Застосувавши принцип звільненості, відкинемо зв'язки і замінимо їх реакціями. Реакція  $N$  гладкої стіни перпендикулярна стіні і проходить через центр кулі. Оскільки куля однорідна, то сила тяжіння  $G$  прикладена в його геометричному центрі. Реакція  $R$  напрямлена уздовж мотузки і, згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил, її лінія дії також має проходити через центр кулі.

До системи трьох сил, що збігаються, прикладених до кулі, застосуємо геометричну умову рівноваги:  $\sum F_i = 0$ ;  $G + N + R = 0$ .

Будуємо замкнутий силовий багатокутник, починаючи із зображення в довільному масштабі вектора відомої сили  $G$ .

Напрямок обходу трикутника (тобто напрям стрілок) визначається цією силою. Вирішуючи трикутник, отримаємо

$$N = G \operatorname{tg} \alpha, \quad R = G / \cos \alpha.$$

Шукана сила тиску  $P$  кулі на стіну, згідно з аксіомою взаємодії, за модулем дорівнює реакції  $N$  стіни, але напрямлена в протилежну сторону:

$$P = N = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Натягнення  $F$  мотузки за модулем дорівнює її реакції  $R$ :

$$F = R = G / \cos \alpha.$$

Це ж завдання можна вирішити, розклавши силу тяжіння  $G$  по реальних напрямках (напрямках реакцій) на складові  $P$  (сила тиску кулі на стіну) і  $F$  (натягнення мотузки), причому, згідно з аксіомою взаємодії  $F=R$ ,  $P=N$ .

З побудованого паралелограма (рис. 1.15) легко визначаємо шукані величини. Такий метод розв'язання задачі називають методом розкладання.

### **1.2.3 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи сил, що збігаються**

Нехай дана плоска система  $n$  сил, що збігаються

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n. \quad (1.10)$$

Рівнодійна цієї системи

$$F_{\Sigma} = \sum F_i. \quad (1.11)$$

У площині дії даної системи виберемо вісь координат і спроектуємо дані сили і їх рівнодійну на цю вісь.

З математики відома властивість проєкції векторної суми, на підставі якого можна стверджувати, що проєкція рівнодійною на вісь дорівнює алгебраїчної сумі проєкцій складових сил на ту ж вісь, тобто

$$F_{\Sigma x} = \sum F_{ix}. \quad (1.12)$$

Праву частину цієї рівності записуємо спрощено, а саме:

$$F_{\Sigma x} = \sum X. \quad (1.13)$$

Для того, щоб визначити рівнодійну будь-якої плоскої системи сил, що збігаються, спроектуємо їх на осі координат  $x$  і  $y$ , алгебраїчно складемо проекції всіх сил і знайдемо, таким чином, проекції рівнодійної:

$$F_{\Sigma x} = \sum X, \quad F_{\Sigma y} = \sum Y. \quad (1.14)$$

Знаючи проекції, на підставі формул, отриманих у пункті 1.1.2, визначимо модуль і напрям рівнодійної:

– модуль рівнодійної

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}; \quad (1.15)$$

– направляючий тангенс кута між вектором  $F_{\Sigma}$  і віссю  $x$

$$\operatorname{tg}(F_{\Sigma}, x) = F_{\Sigma y} / F_{\Sigma x}. \quad (1.16)$$

Лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

#### **1.2.4 Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що збігаються**

Якщо дана плоска система сил, що збігаються, знаходиться в рівновазі, то рівнодійна такої системи, а отже, і проекції рівнодійної на осі координат дорівнюють нулю:

$$F_{\Sigma} = 0, \quad F_{\Sigma x} = 0, \quad F_{\Sigma y} = 0. \quad (1.17)$$

Враховуючи, що

$$F_{\Sigma x} = \sum X, \quad F_{\Sigma y} = \sum Y, \quad (1.18)$$

отримуємо рівність, що виражає аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил, що збігаються:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0. \quad (1.19)$$

Формулюються ці умови так: для рівноваги плоскої системи сил, що збігаються, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій цих сил на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю.

За допомогою рівнянь рівноваги можна визначити два невідомі елементи даної системи сил, наприклад, модуль і напрям однієї сили або модулі двох сил, напрями яких відомі тощо.

Виведені умови рівноваги справедливі для будь-яких осей координат, але для спрощення розв'язання завдань рекомендується осі координат вибирати по можливості перпендикулярними невідомим силам, щоб кожне рівняння рівноваги містило одне невідоме.

Коли напрям шуканої сили невідомий, її можна розкласти на дві складові по заданих напрямках, зазвичай по напрямках координатних осей; по знайдених двох взаємно перпендикулярних складових легко визначається невідома сила.

Якщо під час розв'язання завдань аналітичним способом шукана реакція вийде від'ємною, то це означає, що дійсний її напрям протилежний до напрямку, прийнятого на рисунку.

**Приклад 1.5.** Сила тяжіння однорідної прямокутної пластинки  $G=5\text{Н}$ . Вона підвішена так, що може вільно обертатися довкола горизонтальної осі, що проходить уздовж однієї з її сторін. Вітер, що рівномірно дує, утримує її в похилому положенні під кутом  $\alpha=18^\circ$  до вертикальної площини. Визначити рівнодійну  $P$  тиску, що створюється вітром на пластинку перпендикулярно її площині (рис. 1.26, а).

*Розв'язання.* Розглянемо рівновагу пластинки. Відкинемо шарнір  $O$ . Оскільки пластинка однорідна і прямокутної форми, то рівнодійна  $P$  тиску вітру і сила тяжіння  $G$  перетинаються в геометричному центрі  $C$  пластинки; лінія дії реакції  $R_0$  шарніра на підставі теореми про рівновагу трьох непаралельних сил також пройде через точку  $C$ .

Для системи трьох сил, що збігаються, які діють на пластинку, застосуємо аналітичну умову рівноваги  $\sum F_i = 0$ , направивши вісь  $y$  перпендикулярно пластинці (щоб реакція  $R_0$ , яку не потрібно визначати, не увійшла до рівняння рівноваги).

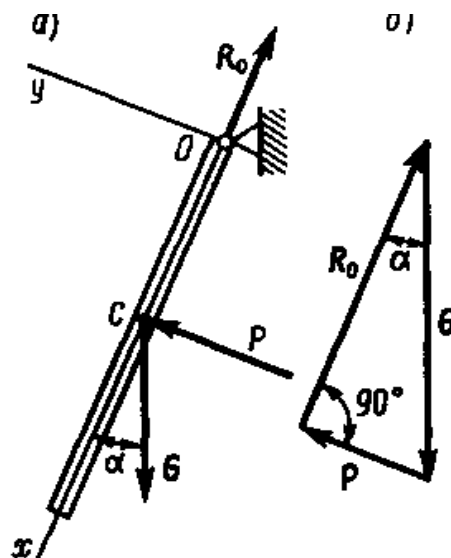


Рисунок 1.26

Складемо рівняння рівноваги

$$\sum Y = 0; \quad P - G \sin \alpha = 0,$$

звідки

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \cdot 0,309 \approx 1,55 \text{ Н.}$$

Проведемо перевірку розв'язання задачі за допомогою геометричної умови рівноваги:

$$\sum F_i = 0; \quad G + P + R_0 = 0.$$

Побудуємо замкнутий силовий трикутник (рис. 1.20, б). Вирішуючи його, отримаємо

$$P = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н.}$$

### 1.3 Плоска система паралельних сил і момент сили

#### 1.3.1 Основні властивості пари

Основні властивості пари характеризуються такими трьома теоремами.

**Теорема I.** Пара сил не має рівнодійної.

Дана пара  $(F_1, F_2)$  з плечем  $h$  (рис. 1.17).

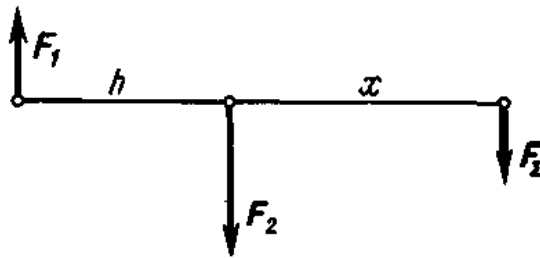


Рисунок 1.17

Передбачимо, що  $F_2 > F_1$ . Тоді рівнодійна цих сил  $F_\Sigma = F_2 - F_1$ , а точка її застосування визначається з пропорції

$$F_\Sigma / F_1 = h / x, \text{ звідки } x = F_1 h / F_\Sigma. \quad (1.20)$$

Нехай тепер сила  $F_2$  зменшується і наближається за модулем до сили  $F_1$ , тоді в межі при  $F_1 = F_2$

$$F_\Sigma = F_2 - F_1 = 0. \quad (1.21)$$

Це означає, що при  $F_1 = F_2$  рівнодійна не існує.

З цієї теореми випливає, що пара сил не може бути урівноважена однією силою; пара сил може бути урівноважена лише парою.

**Теорема II.** Алгебраїчна сума моментів сил, що складають пару, відносно будь-якої точки площини дії пари є величина постійна, рівна моменту пари.

Дана пара  $(F_1, F_2)$  з плечем  $h$  (рис. 1.18) і моментом  $m = F_1 h = F_2 h$ .

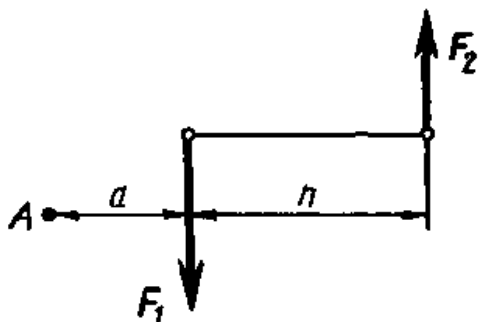


Рисунок 1.18

Виберемо в площині дії пари довільну точку  $A$  і приймемо її за центр моментів:

$$\left. \begin{aligned} M_A(F_1) &= -F_1 a, \\ M_A(F_2) &= F_2(a+h). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Складемо праві та ліві частини цієї рівності:

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = -F_1 a + F_2(a+h),$$

або

$$M_A(F_1) + M_A(F_2) = m;$$

теорема доведена.

З цієї теореми випливає, що при будь-якому центрі моментів пара сил увійде до рівняння моментів з одним і тим самим знаком і однією і тією самою величиною.

**Теорема III.** Алгебраїчна сума проекцій сил пари на вісь завжди дорівнює нулю.

Дано пару  $(F_1, F_2)$  і вісь  $z$ , що лежить в площині дії пари (рис. 1.19).

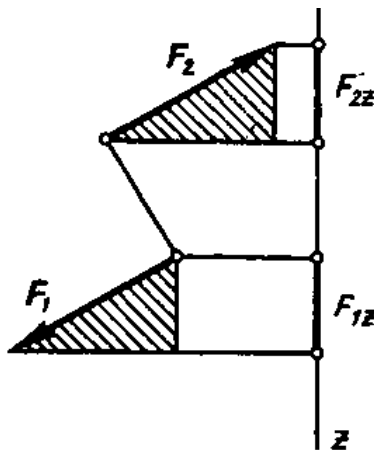


Рисунок 1.19



З рівності заштрихованих трикутників видно, що  $F_1z - F_2z$ . Проекція  $F_1z$  – додатна, проекція  $F_2z$  – від’ємна, отже, їх алгебраїчна сума завжди дорівнює нулю.

З цієї теореми виходить, що пара сил не входить ні в рівняння сил, ні в рівняння проекцій сил.

### 1.3.2 Еквівалентні пари

Дві пари називаються еквівалентними, якщо одну з них можна замінити іншою, не порушуючи механічного стану вільного твердого тіла.

Теорема про еквівалентні пари формулюється так: якщо моменти двох пар алгебраїчно рівні, то ці пари еквівалентні.

Дано дві пари  $(F, F_1)$  і  $(Q, Q_1)$ , моменти яких алгебраїчно рівні (рис. 1.20), тобто

$$M(F, F_1) = M(Q, Q_1) \quad \text{або} \quad Fa = Qb. \quad (1.23)$$

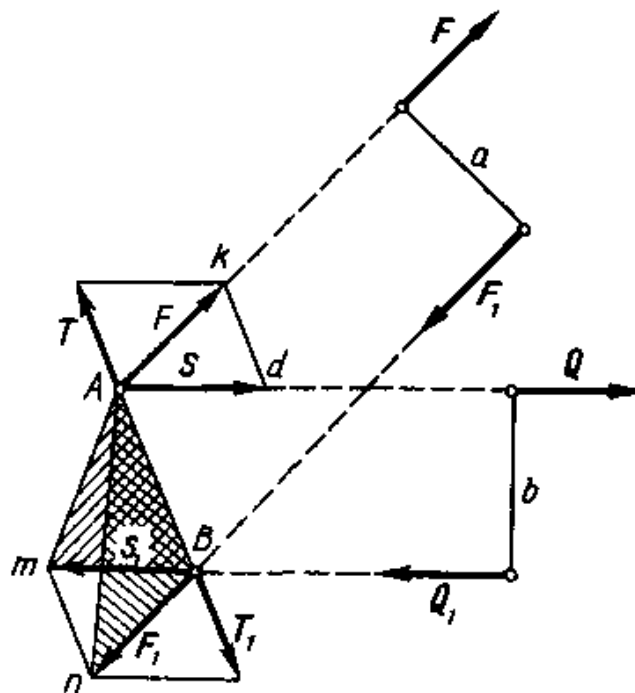


Рисунок 1.20

Продовжимо лінії дії сил пари до їх взаємного перетину в точках  $A$  і  $B$ . На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо сили  $F$  і  $F_1$  уздовж ліній їх дії в точки  $A$  і  $B$ . З’єднаємо ці точки прямою лінією і розкладемо сили  $F$  і  $F_1$  за напрямом  $AB$  і уздовж ліній дії сил  $Q$  і  $Q_1$ . З рівності трикутників  $AkD$  і  $Bmn$  випливає, що  $T = T_1$  і  $S = S_1$ .

Сили  $T$  і  $T_1$  є урівноваженою системою, оскільки вони рівні за модулем і діють по одній прямій в протилежні сторони. На підставі аксіоми IV таку систему можна відкинути.

Сили  $S$  і  $S_1$  є парою сил з плечем  $b$ . Отже, пара  $(F, F_1) \equiv$  парі  $(S, S_1)$ .

Розглянемо трикутник  $AmB$  і  $AnB$ . Вони мають загальну основу  $AB$ , а висоти їх рівні, отже,

$$S\Delta AmB = S\Delta AnB.$$

Але подвоєна площа  $\Delta AnB$  чисельно дорівнює моменту пари  $(F, F_1)$ , а подвоєна площа  $\Delta AmB$  чисельно дорівнює моменту пари  $(S, S_1)$ , отже,

$$M(F, F_1) = M(S, S_1)$$

або

$$Fa = Sb.$$

За умовами теореми,  $Fa = Qb$ , звідси  $S=Q$ ,  $S_1=Q_1$ .

Сили  $S$  і  $Q$  рівні за модулем, діють по одній прямій в один бік, отже, вони еквівалентні одна одній; на цій підставі еквівалентні одна одній сили  $S_1$  і  $Q_1$ . Отже, пара  $(Q, Q_1) \equiv$  парі  $(S, S_1)$ .

Але вище доведено, що пара  $(F, F_1) \equiv$  парі  $(S, S_1)$ .

Оскільки дві пари порізно еквівалентні одній і тій самій третій парі, то ці пари еквівалентні між собою, тобто

$$\text{пара } (F, F_1) \equiv \text{парі } (Q, Q_1),$$

що і потрібно було довести.

З доведеної теореми про еквівалентні пари випливає чотири висновки:

- не змінюючи механічного стану тіла, пари можна переміщати як завгодно в площині її дії;
- не змінюючи механічного стану тіла, можна міняти сили і плече пари, але так, щоб її момент залишався незмінним;
- щоб задати пару, достатньо задати її момент, тому інколи слово «пара» замінюють словом «момент» і умовно змальовують його так, як показано на рис. 1.21;

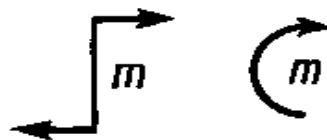


Рисунок 1.21

- умови рівноваги плоскої системи паралельних сил будуть справедливими, якщо разом з такою системою діють і пари сил, оскільки їх можна обернути в площині дії і поставити сили пари паралельно іншим силам системи.

### 1.3.3 Теорема про складання пар

**Теорема.** Будь-яка плоска система пар еквівалентна одній результуючій парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів даних пар.

Нехай дано три пари з моментами  $m_1, m_2, m_3$ , що діють в одній площині (рис. 1.22, а).

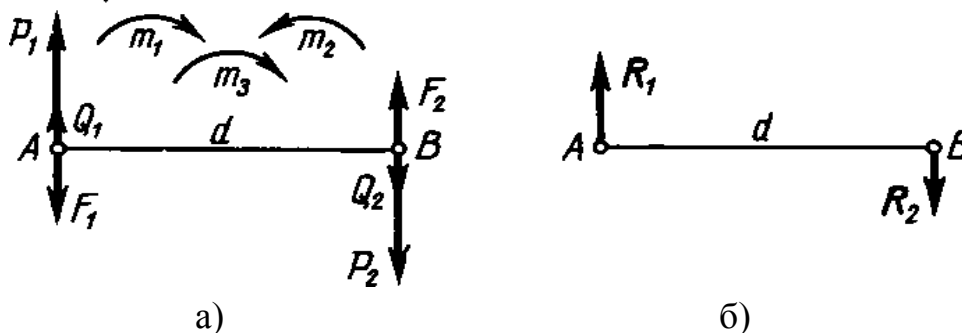


Рисунок 1.22

На підставі висновку з теореми про еквівалентні пари перетворимо ці пари так, щоб їх плечі стали рівними  $d$ , і перенесемо до довільно взятого на площині відрізка  $AB$  завдовжки  $d$ .

Тоді замість заданої системи пар отримаємо нову систему, еквівалентну даній, причому моменти даних і нових пар будуть рівними, тобто

$$m_1 = -P_1d, \quad m_2 = F_1d, \quad m_3 = -Q_1d. \quad (1.24)$$

Склавши три сили в точці  $A$ , отримаємо рівнодійну  $R_1$  (рис. 1.22, б), модуль якої

$$R_1 = P_1 + Q_1 - F_1. \quad (1.25)$$

Склавши три сили в точці  $B$ , отримаємо рівнодійну  $R_2$ , модуль якої

$$R_2 = P_2 + Q_2 - F_2, \quad (1.26)$$

причому очевидно, що сили  $R_1$  і  $R_2$  рівні за модулем, паралельні і протилежно направлені.

Отже, система  $(R_1, R_2)$  є парою з плечем  $d$ , еквівалентна даній системі пар. Момент цієї результуючої пари

$$m = -R_1d = -(P_1 + Q_1 - F_1)d = -P_1d - Q_1d + F_1d, \quad (1.27)$$

або

$$m = m_1 + m_2 + m_3. \quad (1.28)$$

Аналогічний доказ можна навести для будь-якої плоскої системи пар, тобто в загальному вигляді можна записати

$$m = \sum m_i, \quad (1.29)$$

що і потрібно було довести.

### 1.3.4 Умова рівноваги плоскої системи пар

Застосовуючи доведену в попередньому розділі теорему до плоскої системи пар, що знаходиться в рівновазі, запишемо

$$m = \sum m_i = 0. \quad (1.30)$$

Тому умова рівноваги плоскої системи пар у загальному вигляді виглядатиме так:

$$\sum m_i = 0, \quad (1.31)$$

а формулюється так: для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів даних пар дорівнювала нулю.

### 1.3.5 Опори і опорні реакції балок

Опори балок можуть бути розділені на такі три основних типи (рис. 1.23):

- шарнірно-рухома (опора *A*);
- шарнірно-нерухома (опора *B*);
- жорстке затискання (опора *C*).

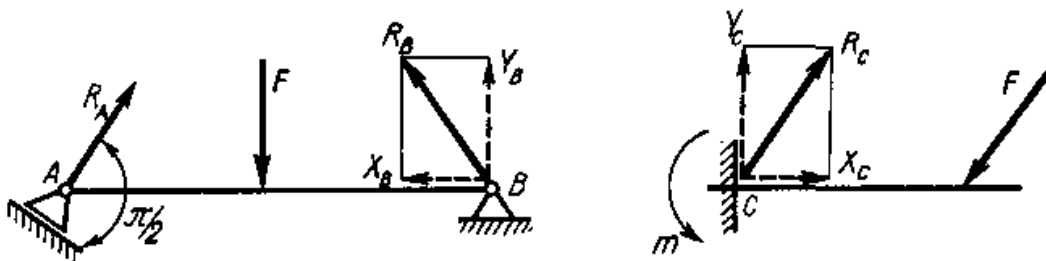


Рисунок 1.23

Застосуємо правило для визначення напрямку реакцій зв'язків.

Шарнірно-рухома опора допускає поворот довкола осі шарніра і лінійне переміщення паралельно опорній площині. Якщо нехтувати тертям на опорі і в шарнірі, то реакція такого зв'язку буде напрямлена перпендикулярно опорній площі поверхні і невідома лише за модулем (одне невідоме).

Шарнірно-нерухома опора допускає лише поворот довкола осі шарніра і не допускає жодних лінійних переміщень. Реакція такої опори буде напрямлена перпендикулярно осі шарніра; модуль і напрям її заздалегідь невідомі (два невідомих). Зазвичай під час розв'язання завдань таку реакцію розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові, невідомі за модулем, але відомі за напрямом.

Жорстке затискання не допускає ні лінійних переміщень, ні поворотів затисненого кінця балки. Жорстке затискання замінюють реактивною силою,

невідомою за модулем і напрямом, і реактивним моментом (три невідомих). Реактивну силу, невідому за напрямом, розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові.

Якщо під час розв'язання задачі реактивна сила або реактивний момент вийдуть від'ємним, то їх дійсний напрям протилежний до прийнятого на рисунку.

Окрім перерахованих вище трьох основних типів опор балок у конструкціях нерідко балка вільно спирається на поверхню (поверхню) або на ребро призми.

**Приклад 1.6.** Горизонтальна балка завдовжки  $l=4$  м закріплена на опорах (рис. 1.24) і навантажена парою сил з моментом  $m=420$  Н·м. Не враховуючи силу тяжіння балки, визначити реакції опор  $A$  і  $B$ .

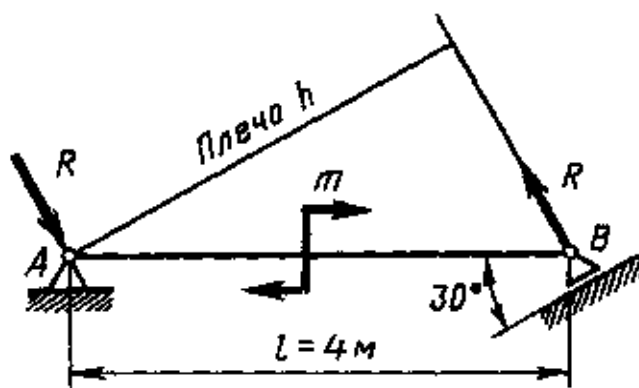


Рисунок 1.24

*Розв'язання.* Відкинемо опори, замінивши їх реакціями, і розглянемо рівновагу балки. Оскільки пару сил можна зрівноважити лише парою, то реакції  $R$  опор  $A$  і  $B$  мають утворювати пару сил, причому реакція шарнірно-рухомої опори  $B$  перпендикулярна опорній площині.

Застосуємо умову рівноваги плоскої системи пар і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0,$$

де  $\sum m_i = 0; \quad -m + Rh = 0.$

Звідси

$$R = \frac{m}{h} = \frac{m}{l \cos 30^\circ} = \frac{420}{4 \cdot 0,866} \approx 120 \text{ Н.}$$

**Приклад 1.7.** Консольна балка (рис. 1.25) завдовжки  $l=2$  м навантажена на кінці силою  $F=3000$  Н. Не враховуючи сили тяжіння балки, визначити реакції затискання.

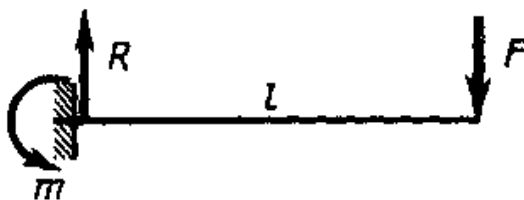


Рисунок 1.25

*Розв'язання.* Відкинемо затискання, замінивши його реакціями, і розглянемо рівновагу балки. Реакції затискання є реактивною силою  $R$  і реактивним моментом  $m$ . Оскільки реактивний момент  $m$  може бути урівноважений лише парою сил, то навантаження  $F$  і реакція  $R$  мають утворювати пару, отже,  $R=F=3000$  Н.

Далі застосуємо умову рівноваги плоскої системи пар і складемо рівняння рівноваги:  $\sum m_i = 0$ ;  $m - Fl = 0$ , звідки  $m = Fl = 3000 \cdot 2 = 6000$  Н·м.

#### 1.4 Плоска система довільно розташованих сил

*Аналітичні умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил*

Плоска система довільно розташованих сил знаходиться в рівновазі, коли і головний вектор, і головний момент дорівнюють нулю:

$$F_{zl} = 0, M_{zl} = 0. \quad (1.32)$$

Але  $F_{zl} = \sum F_i$  і рівність  $F_{zl} = 0$  означає, що силовий багатокутник, побудований на силах даної системи, має бути замкнутий, отже, алгебраїчна сума проекцій сил на кожну з двох осей координат  $x$  і  $y$  має дорівнювати нулю, тобто

$$\sum X = 0, \sum Y = 0. \quad (1.33)$$

Головний момент  $\sum M(F_i) = 0$  і рівність  $M_{zl} = 0$  означають, що алгебраїчна сума моментів сил даної системи відносно будь-якого центру приведення дорівнює нулю, отже,

$$\sum M(F_i) = 0. \quad (1.34)$$

Таким чином, для рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат  $x$  і  $y$  дорівнювали нулю, і щоб алгебраїчна сума моментів цих сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.

Умови рівноваги спрощено запишемо у вигляді рівності

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M = 0. \quad (1.35)$$

Зазначимо, що виведені раніше умови рівноваги системи сил, що збігаються, системи паралельних сил і системи пар є окремими випадками умов рівноваги, отриманих у цьому розділі.

Під час розв'язання деяких завдань буває доцільно замість одного або двох рівнянь проекцій скласти рівняння моментів.

Якщо замінити одне рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил виглядатимуть так:

$$\sum X = 0, \sum M_A = 0, \sum M_B = 0. \quad (1.36)$$

Проте, слід пам'ятати, що ці умови стають недостатніми для рівноваги, коли центри моментів  $A$  і  $B$  лежать на одному перпендикулярі до осі  $x$ ; у цьому випадку навіть в ході виконання вказаних умов система сил може мати рівнодійну, таку, що проходить через ці точки, і, отже, не бути в рівновазі.

Якщо замінити два рівняння проекцій, то умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил виглядатимуть так:

$$\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0. \quad (1.37)$$

Проте ці умови стають недостатніми для рівноваги, коли центри моментів  $A$ ,  $B$  і  $C$  лежать на одній прямій; в цьому випадку навіть в ході виконання вказаних умов система сил може мати рівнодійну, таку, що проходить через ці точки, і, отже, не бути в рівновазі.

Умови рівноваги плоскої системи паралельних сил є окремим випадком умов рівноваги, виведених у цьому пункті. Якщо вісь  $u$  розташувати паралельно лініям дії системи паралельних сил, то рівняння рівноваги  $\sum X = 0$  обернеться в тотожність, а  $\sum Y = \sum F_i$  алгебраїчна сума проекцій сил системи на вісь  $u$  дорівнюватиме алгебраїчній сумі цих сил. Тоді умови рівноваги плоскої системи паралельних сил запишуться так:

$$\sum F_1 = 0, \sum M = 0 \quad (1.38)$$

і формулюються так: *для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума всіх сил дорівнювала нулю, і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно будь-якої точки площини також дорівнювала нулю.*

Під час розв'язання завдань статики аналітичним способом доцільно скласти рівняння рівноваги так, щоб у кожному з них була лише одна невідома величина. У багатьох випадках цього можна досягти, якщо раціонально вибрати осі координат і центри моментів.

**Приклад 1.8.** Горизонтальна балка, що підтримує балкон, піддається дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $q=2$  кН/м (рис. 1.27). На балку у вільного кінця  $C$  передається навантаження від колони  $P=2$  кН. Відстань від осі колони до стіни  $l=1,5$  м. Визначити реакції закладення  $A$ .

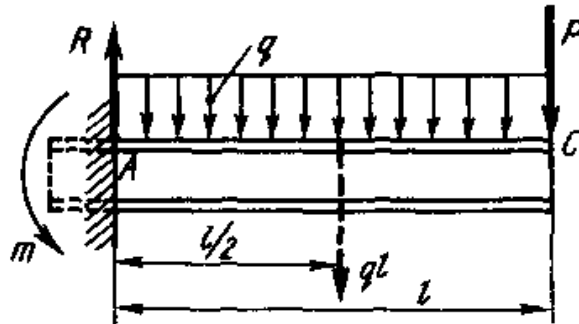


Рисунок 1.27

*Розв'язання.* Відкинемо затискання, замінимо його реакціями і розглянемо рівновагу балки. Реакції стіни є реактивною силою  $R$  і реактивний момент  $m$ . Реактивна сила вертикальна, оскільки активні сили, що діють на балку, горизонтальних складових не мають. Розподілене навантаження замінимо її рівнодійною  $ql$ .

Застосуємо умови рівноваги плоскої системи паралельних сил і складемо два рівняння рівноваги:  $\sum F_i = 0; R - ql - P = 0$ , звідки

$$R = ql + p = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}, \quad \sum M_A = 0; +m - \frac{ql^2}{2} - Pl = 0, \quad \text{звідки}$$

$$m = Pl + \frac{ql^2}{2} = 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{2,25}{2} = 5,25 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Перевіримо розв'язання, склавши контрольне рівняння моментів відносно точки  $C$ :  $\sum M_C = 0; m - Rl + \frac{ql^2}{2} = 0$ .

Підставивши значення, отримаємо

$$5,25 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{2,25}{2} = 0.$$

Отримана тотожність  $0=0$  свідчить, що розв'язання правильне.

**Приклад 1.9.** На рисунку 1.28 схематично змальований підйомний кран. У точці  $D$  на відстані 5 м від осі  $A_B$  крану підвішений вантаж  $P=50$  кН. Сила тяжіння крану  $G=30$  кН. Визначити реакції підп'ятника  $A$  і підшипника  $B$ .



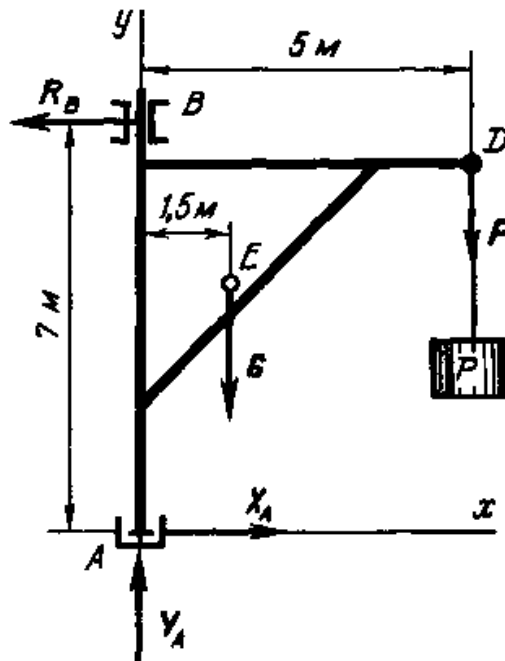


Рисунок 1.28

*Розв'язання.* Розглянемо рівновагу крана. Реакція  $R_B$  підшипника  $B$  напрямлена перпендикулярно його осі, реакцію підп'ятника  $A$  розкладемо на дві складові:  $X_A$  і  $Y_A$ . Таким чином, до крана прикладена плоска система п'яти довільно розташованих сил, з яких три невідомі. Застосуємо до цієї системи аналітичні умови рівноваги і складемо три рівняння:

$$\sum M_A = 0; +R_B \cdot 7\text{ м} - G \cdot 1,5 - P \cdot 5 = 0,$$

$$\sum X = 0; -R_B + X_A = 0,$$

$$\sum Y = 0; Y_A - P - G = 0.$$

Розв'язуючи перше рівняння, отримаємо

$$R_B = \frac{G \cdot 1,5 + P \cdot 5}{7} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 50 \cdot 10^3 \cdot 5}{7} = 42,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 42,1 \text{ кН}.$$

З другого рівняння отримаємо

$$X_A = R_B = 42,1 \text{ кН}.$$

З третього рівняння знаходимо

$$Y_A = P + G = 50 + 30 = 80 \text{ кН}.$$

## 1.5 Тертя

### 1.5.1 Поняття про тертя

Абсолютно гладких і абсолютно твердих тіл у природі не існує, і тому під час переміщення одного тіла по поверхні іншого виникає опір, який

називається тертям. Тертя – явище опору відносному переміщенню, що виникає між двома тілами в зонах зіткнення поверхонь по дотичній до них.

Тертя – явище, надзвичайно поширене в природі і таке, що має велике значення. На терті заснована робота ремінних і фрикційних передач, гальмівних пристроїв, прокатних станів, похилих транспортерів, фрикційних муфт тощо. Тертя забезпечує зчеплення із землею і, отже, роботу автомобілів, тракторів й інших транспортних машин, робототехнічних систем, радіотехнічних пристроїв. За відсутності тертя людина не могла б ходити. Поряд з цим тертя у багатьох випадках є шкідливим опором, на подолання якого витрачається нерідко дуже велика кількість енергії. Ці витрати енергії даремні і їх прагнуть зменшити.

Наводимо схему класифікації тертя за наявністю і характером руху (рис. 1.29).

Тертям спокою називається тертя двох тіл при попередньому зсуві, тобто при малому відносному переміщенні тіл до переходу від спокою до відносного руху.

Тертям руху називається тертя двох тіл, що знаходяться у відносному русі. Далі розглянемо види тертя залежно від наявності і характеру відносного руху.

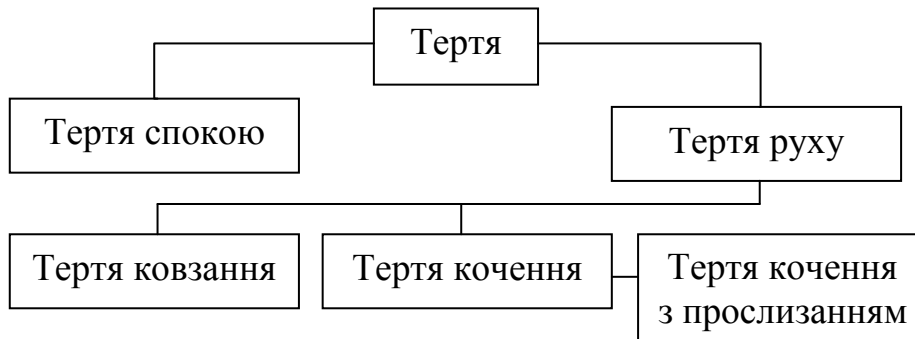


Рисунок 1.29

### ***1.5.2 Тертя ковзання***

Тертям ковзання називається тертя руху, при якому швидкості дотичних тіл у точках торкання різні. Тертя ковзання, як і тертя спокою, обумовлене перш за все шорсткістю і деформацією поверхонь, а також наявністю молекулярного зчеплення в притиснутих один до одного тіл. Тертя ковзання супроводжується зношуванням, тобто відділенням або залишковою деформацією матеріалу, а також нагріванням поверхонь тіл, що труться (залишковою називається деформація, не зникаюча після припинення дії зовнішніх сил). Тертя характеризується силою тертя.

Сила тертя є сила опору відносному переміщенню двох тіл при терті.

Візьмемо тіло, яке лежить на горизонтальній шорсткій поверхні (рис. 1.30). Сила тяжіння  $G$  урівноважується нормальною реакцією  $N$ . Якщо до тіла прикласти невелику рушійну силу  $P$ , то воно не прийде в рух, оскільки ця сила урівноважуватиметься силою тертя  $F_{\text{тр}}$ , яка є, таким чином, реакцією опорної площини, направленої упродовж площини.

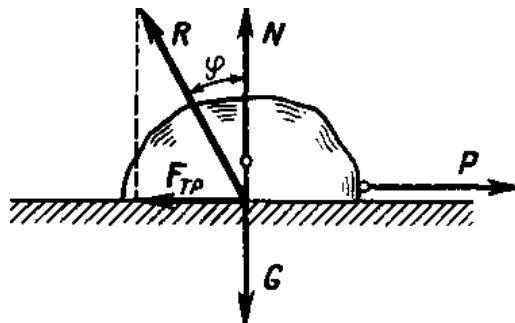


Рисунок 1.30

Якщо поступово збільшувати рушійну силу  $P$ , то до певного її значення тіло залишатиметься в спокої; при подальшому збільшенні сили  $P$  тіло прийде в рух. Звідси видно, що сила тертя в стані спокою залежно від міри попереднього зсуву може змінюватися від нуля до якогось максимального значення  $F_{\text{термах}}$ , причому за модулем сила тертя  $F_{\text{тер}}$  завжди дорівнює рушійній силі  $P$  (якщо  $P$  не більше  $F_{\text{термах}}$ ).

Сила тертя до початку відносного руху називається неповною силою тертя.

Максимальне значення сила тертя спокою має у момент початку відносного руху і називається найбільшою силою тертя спокою або просто силою тертя спокою.

Сила тертя спокою завжди направлена убік, протилежний до напрямку відносного руху тіла.

Французькі вчені Амонтон, а потім Кулон провели серйозні дослідження в області тертя і на основі їх сформулювали три основні закони тертя ковзання, зазвичай званих законами Кулона:

1. Сила тертя не залежить від величини площі поверхонь, що труться.
2. Максимальна сила тертя прямо пропорційна нормальній складовій зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла.
3. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, стану поверхонь, що труться, наявності та роду мастила.

Перший закон можна підтвердити наступними міркуваннями. Якщо площа поверхонь, що труться, збільшиться, то збільшиться і кількість нерівностей, що зчіплюються, але зменшиться тиск (на одиницю площі) і опір відносному переміщенню залишиться тим самим.

Другий закон говорить про те, що якщо збільшиться нормальна складова зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла (інакше кажучи, збільшиться сила нормального тиску або реакції), то в стільки ж раз зросте максимальна сила тертя.

Відношення сили тертя  $F_{\text{тер}}$  до нормальної складової  $N$  зовнішніх сил, що діють на поверхні тіла, називається коефіцієнтом тертя ковзання, що позначається  $f$ .

Таким чином,

$$f = F_{\text{тер}} / N \quad \text{або} \quad F_{\text{тер}} = fN. \quad (1.39)$$

У результаті другий закон тертя ковзання можна сформулювати так: сила тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, помноженому на силу нормального тиску або реакції.

Очевидно, що коефіцієнт тертя ковзання – величина безрозмірна.

Нормальна реакція  $N$  опорної поверхні і сила тертя  $F_{\text{тер}}$  дають рівнодійну  $R$ , яка називається повною реакцією опорної поверхні (рис. 1.30):

$$R = N + F_{\text{тер}}. \quad (1.40)$$

Повна реакція  $R$  складає з нормаллю до опорної поверхні якийсь кут. Максимальне значення цього кута (що буде у момент початку руху) називається кутом тертя і позначається  $\varphi$ . З рисунка 1.30 випливає формула

$$R = N + F_{\text{тер}}. \quad (1.41)$$

Порівнюючи рівності (1.39) і (1.41), отримаємо

$$f = \text{tg} \varphi, \quad (1.42)$$

тобто коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя.

Якщо коефіцієнт тертя ковзання однаковий для всіх напрямів руху, то множина (геометричне місце) повних реакцій утворює круговий конус, який називається конусом тертя (рис. 1.31).

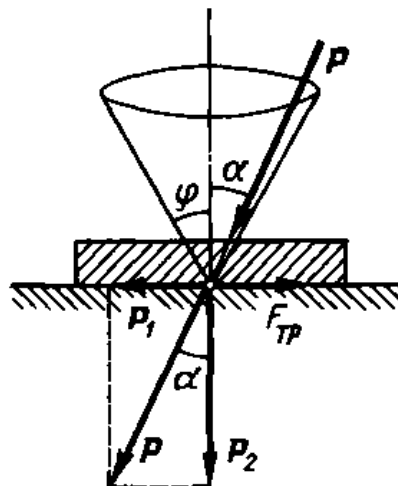


Рисунок 1.31

Якщо для різних напрямів руху коефіцієнт тертя неоднаковий (наприклад, при ковзанні по дереву вздовж і поперек волокон), то конус тертя буде некруглим.

Властивість конуса тертя полягає в тому, що для рівноваги тіла, що лежить на шорсткій поверхні, рівнодійна прикладених до нього активних сил має проходити всередині конуса тертя.

Дійсно, якщо рівнодійну  $P$  активних сил, прикладених до тіла, розкласти на складові  $P_1$  (рушійна сила) і  $P_2$  (сила нормального тиску), то

$$P_1 = P_2 \operatorname{tg} \alpha . \quad (1.43)$$

За другим законом тертя ковзання

$$F_{mp} = fP_2 = P_2 \operatorname{tg} \phi . \quad (1.44)$$

Отже, при  $\alpha < \phi$  буде

$$P_1 < F_{mp} \quad (1.45)$$

і рух виявиться неможливим.

Згідно з третім законом, коефіцієнт тертя ковзання залежить від матеріалів тіл, що труться, якості обробки поверхонь, роду і температури мастила.

Залежно від наявності між поверхнями, що труться, шару мастила тертя підрозділяється на такі види: тертя без змащувального матеріалу і тертя в умовах мастила.

Коефіцієнт тертя ковзання визначають дослідним шляхом: значення його для різних умов наведені в довідниках.

Наведемо орієнтовні значення коефіцієнтів  $f$  тертя ковзання (при спокої):

Метал по металу без мастила.....	0,15...0,3
Те ж, з мастилом.....	0,1...0,18
Дерево по дереву без мастила.....	0,4...0,6
Сталь по льоду.....	0,02

Коефіцієнт тертя ковзання при русі зазвичай менше, ніж при спокої, і в першому наближенні не залежить від швидкості відносного переміщення тіл.

Методи розв'язання завдань статички за наявності тертя залишаються такими ж, як і за відсутності його, причому в рівняння рівноваги зазвичай вводять максимальні значення сил тертя.

**Приклад 1.10.** Діаметр шайби гальма колодки  $D=500$  мм, діаметр барабана  $d=100$  мм, сила  $P=200$  Н, вантаж  $G=1500$  Н, коефіцієнт тертя  $f=0,4$  (рис. 1.32). Визначити відношення розмірів  $a/b$ , за якого припиниться рух. Кут  $ASO$  прямий.

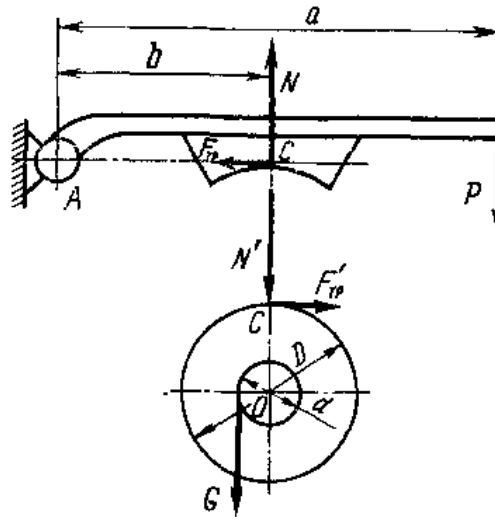


Рисунок 1.32

*Розв'язання.* У момент часу, коли рух припиниться, подумки розділимо дану систему тіл на дві частини і розглянемо спочатку рівновагу барабана з шайбою, а потім рівновагу важеля з колодкою (рис. 1.33). Згідно з аксіомою взаємодії, нормальна реакція  $N=N'$ , а сила тертя  $F_{\text{тер}}=F'_{\text{тер}}$ . На підставі другого закону тертя ковзання, рівнодійне силі тертя колодки об шайбу, дорівнює  $F_{\text{мп}} = fN$ .

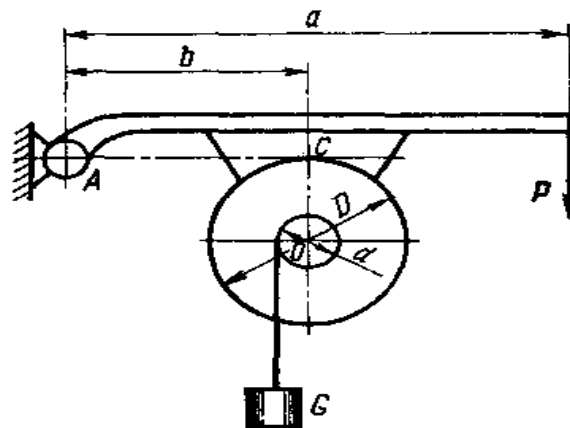


Рисунок 1.33

До обох частин системи застосуємо умову рівноваги і складемо два рівняння рівноваги:

– для шайби

$$\sum M_O = 0, \frac{-F'_{\text{мп}} D}{2} + \frac{Gd}{2} = 0;$$

– для важеля

$$\sum M_A = 0, -Pa + Nb = 0.$$

Розв'яжемо отриману систему трьох рівнянь. З перших двох рівнянь знайдемо  $N$ :  $F'_{mp} = Gd/D = fN$ , звідки

$$N = Gd/fD.$$

Отриманий вираз підставимо в третє рівняння:

$$Pa = Nb = \frac{Gd}{fD} b.$$

Звідси визначимо відношення

$$\frac{a}{b} = \frac{Gd}{fDP} = \frac{1500 \cdot 0,1}{0,4 \cdot 0,5 \cdot 200} = 3,75.$$

Отриманий результат мінімальний. Очевидно, що руху не буде при  $a/b \geq 3,75$ .

### 1.5.3 Рівновага тіла на похилій площині

Розглянемо тіло, яке знаходиться на шорсткій похилій поверхні, що складає кут  $\alpha$  з горизонтальною площиною (рис. 1.34). Розкладемо силу  $G$  на складові  $G_1$  і  $G_2$ , паралельну і перпендикулярну похилій площині. Модулі цих складових визначимо за такими формулами:

$$G_1 = G \sin \alpha, \quad G_2 = G \cos \alpha. \quad (1.46)$$

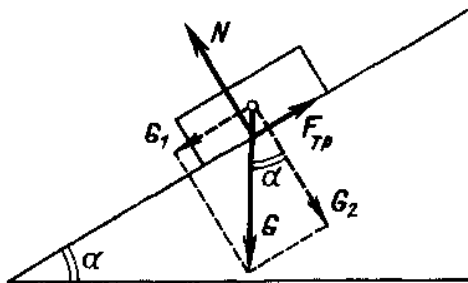


Рисунок 1.34

Складова  $G_2$  врівноважується реакцією  $N$  похилої поверхні. Таким чином

$$G_2 = N = G \cos \alpha. \quad (1.47)$$

Складова  $G_1$  прагне зрушити тіло уздовж похилої поверхні. Повністю або частково ця складова врівноважується силою тертя; згідно з другим законом тертя ковзання, її максимальне значення дорівнює

$$F_{mp} = fN = fG \cos \alpha, \quad (1.48)$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання тіла по похилій поверхні.

Для того, щоб тіло, яке розташоване на похилій поверхні, знаходилося в рівновазі, рушійна сила  $G_1$  має за модулем дорівнювати силі тертя  $F_{тер}$ , тобто

$$G \sin \alpha = fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.49)$$

звідки  $\alpha = \varphi$ .

Якщо кут, який похила поверхня складає з горизонтом, дорівнює куту тертя, то тіло, яке знаходиться на похилій поверхні, буде під дією власної сили тяжіння або рівномірно ковзати вниз, або знаходитися у спокої.

Для того, щоб тіло, яке знаходиться на похилій поверхні, свідомо не ковзало вниз під дією власної сили тяжіння, має бути дотримана умова  $\alpha < \varphi$ .

Похилою поверхнею із змінним кутом нахилу до горизонту користуються для експериментального визначення кута тертя  $\varphi$  і коефіцієнта тертя  $f$  (рис. 1.35).

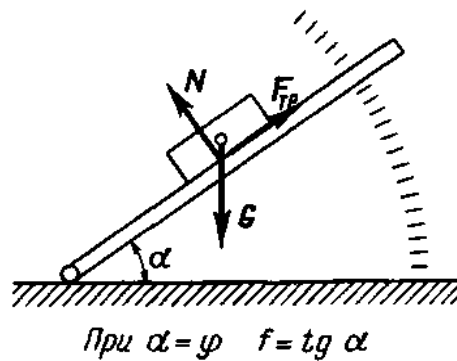


Рисунок 1.35

Визначимо модуль сили  $P$ , паралельній похилій площині, в разі рівномірного переміщення тіла вгору по шорсткій похилій поверхні (рис. 1.36).

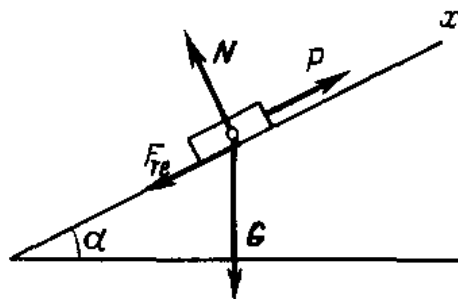


Рисунок 1.36

Спроекуємо сили, що діють на тіло, на вісь  $x$ . Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \quad P - G \sin \alpha - F_{mp} = 0. \quad (50)$$

Оскільки

$$F_{mp} = fG \cos \alpha, \quad (51)$$

то

$$P = G \sin \alpha + fG \cos \alpha. \quad (52)$$



Визначимо модуль горизонтальної сили  $P$ , яку треба прикласти до тіла для рівномірного переміщення його вгору по шорсткій похилій поверхні (рис. 1.37).

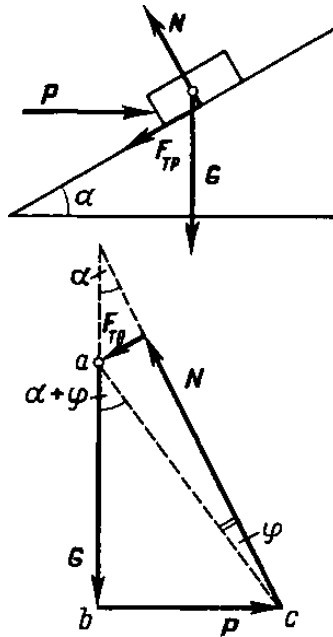


Рисунок 1.37

Застосуємо геометричну умову рівноваги плоскої системи сил (розмірами тіла нехтуємо), що сходяться, і побудуємо замкнутий силовий багатокутник, що відповідає рівнянню рівноваги

$$G + P + N + F_{mp} = 0. \quad (1.53)$$

З трикутника  $abc$  маємо

$$P = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (1.54)$$

Цей випадок руху має місце при взаємному переміщенні гвинта і гайки з прямокутною різью, оскільки різь гвинта можна розглядати як похилу поверхню, кут нахилу якої дорівнює куту підйому гвинтової лінії.

Тертя в різі, що має трикутний або трапецеїдальний профіль, подібно до тертя в клинчастому повзуні. Тому розглянемо клинчастий повзун з кутом загострення  $2\beta$ , навантажений вертикальною силою  $Q$  (рис. 1.38). Визначимо силу  $P$ , необхідну для рівномірного переміщення повзуна уздовж горизонтальних направляючих, якщо коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

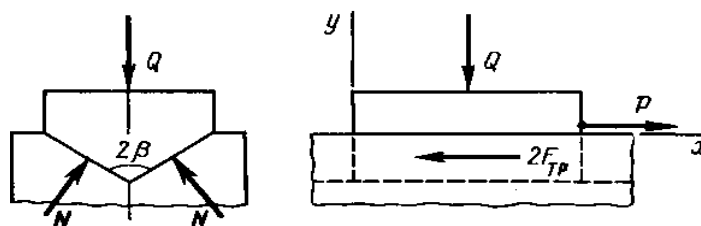


Рисунок 1.38

Складемо два рівняння рівноваги повзуна:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; & P - 2F_{mp}; \\ \sum Y &= 0; & 2N \sin \beta - Q = 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

де  $F_{\text{тер}}$  – сила тертя на кожній грані повзуна;  $N$  – нормальна реакція направляючої.

Розв'язуючи цю систему рівнянь і враховуючи, що  $F_{\text{тер}} = fN$ , отримаємо

$$P = \frac{f}{\sin \beta} Q = f' Q, \quad (1.56)$$

де  $f' = \frac{f}{\sin \beta}$  – зведений коефіцієнт тертя.

Відповідний цьому зведеному коефіцієнту кут тертя позначимо  $\varphi'$  і назвемо зведеним кутом тертя, тоді

$$f' = \text{tg} \varphi'. \quad (1.57)$$

Очевидно, що  $f' > f$ , отже, за інших рівних умов тертя в клинчастому повзуні більше тертя на площині.

Поняття зведеного коефіцієнта тертя умовне, оскільки він змінюється залежно від кута загострення клинчастого повзуна.

За аналогією з рухом тіла вгору по похилій площині під дією горизонтальної сили для рівномірного переміщення клинчастого повзуна по направляючих, нахилених до горизонту під кутом  $\alpha$ , потрібно прикласти горизонтальну силу, що дорівнює

$$P = Q \text{tg} (\alpha + \varphi'). \quad (1.58)$$

Тертя в метричній різі подібно до тертя клинчастого повзуна з кутом загострення  $2\beta = 120^\circ$ , для трапецеїдальної різі кут  $2\beta = 150^\circ$ .

#### **1.5.4 Тертя кочення**

Якщо рух двох дотичних тіл відбувається при одночасному коченні і ковзанні, то в цьому випадку виникає тертя кочення з прослизанням.

Розглянемо кочення без ковзання циліндра вагою  $G$  і радіусом  $r$  по горизонтальній опорній поверхні (рис. 1.39).

Під дією сили  $G$  відбудеться деформація циліндра і опорної поверхні в місці їх зіткнення. Якщо сила  $P$  не діє, то сила  $G$  врівноважуватиметься реакцією  $R$  опорної поверхні і циліндр знаходитиметься у спокої (реакція  $R$  буде вертикальна).

Якщо до циліндра прикласти невелику силу  $P$ , то він як і раніше знаходитиметься у спокої. При цьому відбудеться перерозподіл тиску на

опорну поверхню і повна реакція  $R$  пройде через точку  $A$  і через точку  $O$  (згідно з теоремою про рівновагу трьох непаралельних сил).

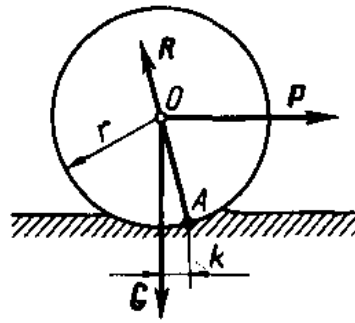


Рисунок 1.39

За будь-якого критичного значення сили  $P$  циліндр почне рухатися і рівномірно перекочуватиметься по опорній поверхні, а точка  $A$  займе крайнє праве положення. Звідси видно, що тертя кочення в стані спокою може змінюватися від нуля до якогось максимального значення, причому максимальним воно буде у момент початку руху.

Нехай  $k$  – максимальне значення плеча сили  $G$  відносно точки  $A$ . Тоді в разі рівномірного перекочування циліндра (тобто рівноваги)

$$\sum M_A = 0 \tag{1.59}$$

або

$$-Pr + Gk = 0, \tag{1.60}$$

причому плече сили  $P$  унаслідок незначності деформацій тіл вважаємо рівним радіусу  $r$  циліндра (сила  $P$  – горизонтальна). З останнього рівняння визначимо силу, необхідну для рівномірного кочення циліндра:

$$P = \frac{kG}{r}. \tag{1.61}$$

Максимальне значення плеча  $k$  називається коефіцієнтом тертя кочення; він має розмірність довжини і виражається в сантиметрах або міліметрах.

З отриманої формули видно, що сила, необхідна для перекочування котка, прямо пропорційна його вазі і обернено пропорційна до радіуса котка.

Коефіцієнт тертя кочення визначається дослідним шляхом, його значення для різних умов наводяться в довідниках.

Наведемо орієнтовні значення коефіцієнтів  $k$  тертя кочення для котка по площині (см):

М'яка сталь по м'якій сталі..... 0,005.

Загартована сталь по загартованій сталі..... 0,001.

Коефіцієнт тертя кочення практично не залежить від швидкості руху тіла.

У ряді випадків в ході вивчення тертя кочення активні і реактивні сили, що діють на коток, зручно уявляти собі в іншому вигляді (рис. 1.40, а, б).

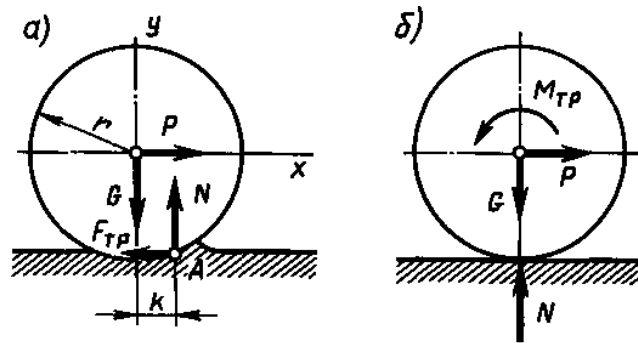


Рисунок 1.40

Розкладемо повну реакцію  $R$  опорної поверхні на складові  $N$  і  $F_{\text{тер}}$ , тоді

$$R = N + F_{\text{тр}}, \quad (1.62)$$

де  $F_{\text{тер}}$  – сила тертя кочення;  $N$  – реакція, нормальна до недеформованої опорної площини.

Складемо три рівняння рівноваги котка:

$$\sum X = 0; \quad P - F_{\text{тр}} = 0, \quad (1.63)$$

$$\sum Y = 0; \quad N - G = 0, \quad (1.64)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -Pr + Gk = 0. \quad (1.65)$$

З цих рівнянь маємо

$$P = F_{\text{тр}}, \quad N = G, \quad Pr = Gk. \quad (1.66)$$

Введемо позначення  $Pr = M$ ,  $Gk = M_{\text{тер}}$  і назовемо  $M$  – момент кочення,  $M_{\text{тер}}$  – момент тертя.

Можливі такі окремі випадки руху котка:

- а)  $M \geq M_{\text{тер}}$ , але  $P < F_{\text{тер}}$  – лише кочення;
- б)  $M < M_{\text{тер}}$ , але  $P > F_{\text{тер}}$  – лише ковзання;
- в)  $M > M_{\text{тер}}$ , але  $P > F_{\text{тер}}$  – кочення з прослизанням;
- г)  $M < M_{\text{тер}}$ , але  $P < F_{\text{тер}}$  – стан спокою.

Тертя кочення в більшості випадків менше тертя ковзання, тому замість підшипників ковзання широко застосовують кулькові і роликові підшипники кочення.

На практиці нерідкі випадки поєднання тертя ковзання з тертям кочення, наприклад, у зубчастих передачах.

### 1.5.5 Стійкість проти перекидання

Розглянемо тверде тіло вагою  $G$ , що спирається на поверхню і здатне перевертатися довкола якогось ребра під дією горизонтальної сили  $P$  (рис. 1.41). Допустимо, що сили  $P$  і  $G$  лежать в одній площині, що перетинається з ребром у точці  $A$ . У момент початку перекидання на тіло діятимуть також нормальна реакція  $N_A$  і сила тертя  $F_{\text{тер}}$ , прикладені в точці  $A$ , причому в разі рівноваги системи всіх чотирьох сил можна записати два рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; \quad N_A - G = 0, \text{ звідки } N_A = G; \quad (1.67)$$

$$\sum X = 0; \quad F_{\text{тер}} - P = 0, \text{ звідки } P = F_{\text{тер}}. \quad (1.68)$$

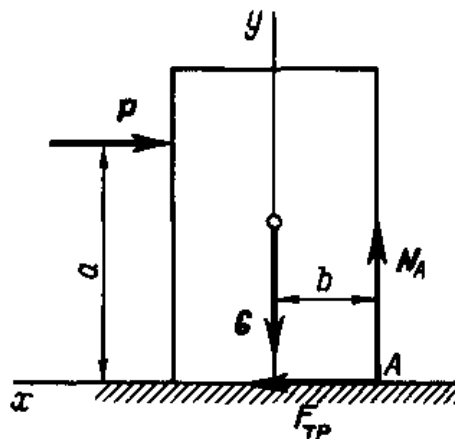


Рисунок 1.41

Таким чином, у момент початку перекидання на дане тіло діють пара сил  $(P, F_{\text{тер}})$ , що прагне перевернути тіло, і пара сил  $(G, F_{\text{тер}})$ , протидіюча опорі.

Очевидно, що перекидання не відбудеться, якщо

$$M(G, N_A) > M(P, F_{\text{тер}}) \text{ або } Gb > Pa. \quad (1.69)$$

Добуток  $Gb$  дорівнює моменту сили  $G$  відносно точки  $A$  і називається моментом стійкості. Момент сили  $P$  відносно тієї ж точки, рівний добутку  $Pa$ , називається перекидальним моментом.

Умова стійкості проти перекидання запишеться у вигляді нерівності

$$M_{\text{ст}} > M_{\text{пер}} \quad (1.70)$$

і формулюється так: для стійкості твердого тіла проти перекидання необхідно і достатньо, щоб момент стійкості був більше перекидального моменту.

Якщо на тіло діють декілька сил, що прагнуть його перевернути, то перекидальний момент дорівнює сумі моментів цих сил відносно точки, довкола якої може відбутися перекидання. Те саме стосується і моменту стійкості.

Відношення моменту стійкості до перекидального моменту називається коефіцієнтом стійкості:

$$\frac{M_{ycm}}{M_{opr}} = k_{ycm} . \quad (1.71)$$

Очевидно, що в конструкціях має бути  $k_{cm} > 1$ .

## 1.6 Просторова система сил

### 1.6.1 Просторова система сил, що збігаються

Система сил, лінії дії яких розташовані в різній площині, називається просторовою системою сил.

Просторова система сил називається такою, що збігаються, якщо лінії дії всіх сил системи перетинаються в одній точці.

**Теорема.** Просторова система сил, що збігаються, еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових сил.

Нехай дана просторова система  $n$  сил, що збігаються ( $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ ). На підставі висновку з аксіом III і IV перенесемо всі сили системи уздовж ліній дії в точку їх перетину. Потім на підставі аксіоми паралелограма складемо сили  $F_1$  і  $F_2$ , внаслідок чого отримаємо їх рівнодійну:

$$F_{\Sigma 1} = F_1 + F_2 . \quad (1.72)$$

Склавши цю рівнодійну з силою  $F_3$ , отримаємо рівнодійну трьох сил:

$$F_{\Sigma 2} = F_{\Sigma 1} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 . \quad (1.73)$$

Повторивши вказану операцію  $n-1$  раз, отримаємо рівнодійну системи  $n$  сил, яка дорівнюватиме векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійною проходить через точку перетину ліній дії складових:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n, \text{ або } F_{\Sigma} = \sum F_i . \quad (1.74)$$

Силовий багатокутник просторової системи сил не лежить в одній площині, тому геометричний і графічний способи знаходження рівнодійної неприйнятні, а застосовується аналітичний спосіб (метод проекцій).

### 1.6.2 Проекція сили на вісь у просторі

Якщо сила і вісь не лежать в одній площині, то перпендикуляри, що проектують, також не лежать в одній площині (рис. 1.42).

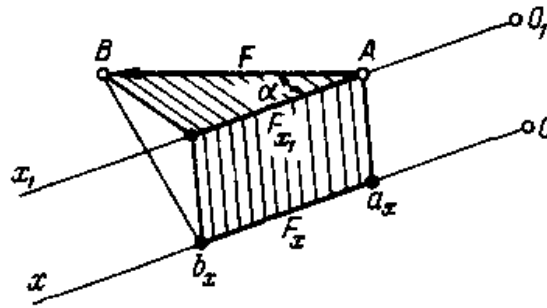


Рисунок 1.42

Для того, щоб визначити, чому дорівнює проекція сили  $F$  на вісь  $Ox$ , слід подумки провести через початок або кінець сили вісь  $O_1x_1$ , паралельну даній осі  $Ox$ , тоді  $F_x = F \cos \alpha$ , оскільки  $F_x = Fx_1$ .

Правило знаків для проекцій залишається тим самим.

Якщо вектор сили паралельний осі, то він проектується на цю вісь у натуральну величину.

Якщо вектор сили лежить в площині, перпендикулярній осі, то його проекція на цю вісь дорівнює нулю.

### 1.6.3 Розкладання сили по трьох осях координат

Нехай дана сила  $F$  (рис. 1.44). Візьмемо систему координат так, щоб початок координат збігався з початком вектора сили  $F$ . З кінця цього вектора опустимо перпендикуляр на площину  $xy$  і розкладемо силу  $F$  на складові  $F_{xy}$  і  $F_z$ , а складову  $F_{xy}$  – на складові  $F_x$  і  $F_y$ . Тоді

$$F = F_x + F_y + F_z. \quad (1.75)$$

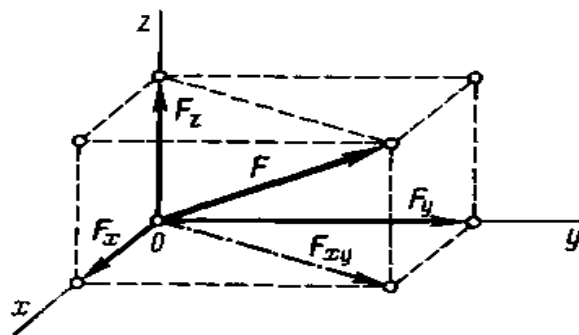


Рисунок 1.44

Добудуємо отримане зображення до паралелепіпеда, в якого складові  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  є ребрами, а сила  $F$  – діагоналлю.

З викладеного можна зробити такий висновок: рівнодійна трьох взаємно перпендикулярних сил виражається за модулем і напрямом діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах.

З рисунка 1.44 видно, що у випадках розкладання сили  $F$  по трьох взаємно перпендикулярних напрямках  $x, y, z$  складові  $F_x, F_y, F_z$  дорівнюють за модулем проєкціям сили  $F$  на цій осі. Ці проєкції позначимо  $F_x, F_y, F_z$ .

Знаючи проєкції сили на три взаємно перпендикулярні осі координат, можна визначити модуль і напрям вектора сили за формулами:

– модуль сили

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad (1.76)$$

– направляючі косинуси

$$\cos(F, x) = F_x/F, \quad \cos(F, y) = F_y/F, \quad \cos(F, z) = F_z/F. \quad (1.77)$$

#### ***1.6.4 Аналітичний спосіб визначення рівнодійної просторової системи сил, що збігаються***

Дана просторова система  $n$  сил, що збігаються. Помістимо початок координат у точці перетину ліній їх дії і розкладемо кожену силу даної системи на три взаємно перпендикулярні складові, направлені по осях координат, заздалегідь перенісши всі сили уздовж ліній їх дії в одну точку.

Замість даної системи  $n$  сил, що збігаються, отримаємо еквівалентну систему  $3n$  сил, з яких  $n$  сил діють по осі  $x$ ,  $n$  сил – по осі  $y$  і  $n$  сил – по осі  $z$ .

Рівнодійна сил, направлених по осі  $x$ , дорівнює їх алгебраїчній сумі; те саме можна сказати про сили, направлені по осях  $y$  і  $z$ . Таким чином, систему  $3n$  сил замінимо еквівалентною системою трьох сил.

Проєкції сили на три взаємно перпендикулярні осі і складові сили, направлені по цих осях, рівні за модулем, отже, проєкції рівнодійної дорівнюють

$$\cos(F, x) = F_x/F, \quad \cos(F, y) = F_y/F, \quad \cos(F, z) = F_z/F. \quad (1.78)$$

Рівнодійна трьох взаємно перпендикулярних сил виражається за модулем і напрямом діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на цих силах, і по відомих проєкціях рівнодійною можна визначити модуль і напрям вектора рівнодійної.

#### ***1.6.5 Аналітичні умови рівноваги просторової системи сил, що збігаються***

Відомо, що просторова система сил, що збігаються, еквівалентна рівнодійній. Якщо така система знаходиться в рівновазі, тобто еквівалентна нулю, то рівнодійна цієї системи дорівнює нулю, а отже, і проєкції рівнодійної дорівнюють нулю, причому ці проєкції дорівнюють сумі проєкцій складових.



Звідси випливають умови рівноваги просторової системи сил, що збігаються:

$$F_{\Sigma x} = \sum X. \quad F_{\Sigma y} = \sum Y. \quad F_{\Sigma z} = \sum Z. \quad (1.79)$$

Ці умови формулюються так: для рівноваги просторової системи сил, що збігаються, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на кожен з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

**Приклад 1.11.** Вантаж  $G=200$  Н стримується в рівновазі горизонтальною мотузкою  $AO$  і двома мотузками  $BO$  і  $CO$ , поверхня яких нахилена до горизонтальної площини під кутом  $\alpha=45^\circ$  і утворює з вертикальною площиною, що проходить через  $AO$ , прямий кут (рис.1.45, а). Мотузки  $BO$  і  $CO$  утворюють з цією вертикальною площиною кути  $\beta=30^\circ$ . Визначити натягнення мотузок.

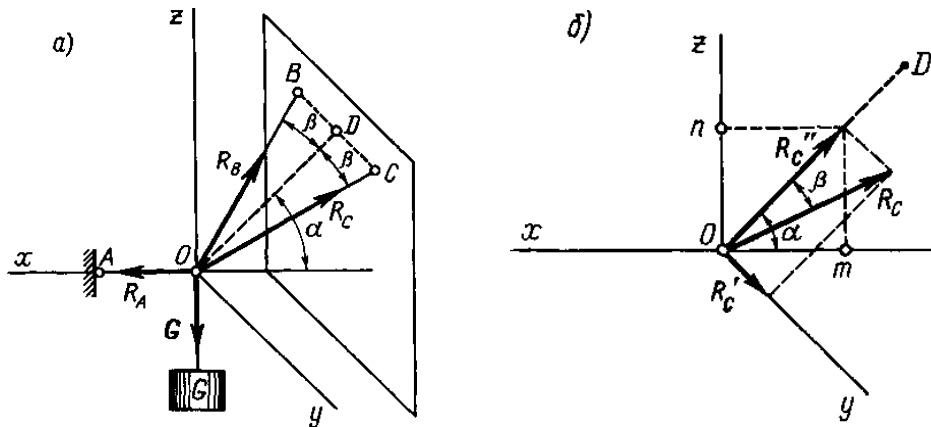


Рисунок 1.45

*Розв'язання.* Розглянемо рівновагу вузла  $O$ , до якого прикладено чотири сили:  $G$ ,  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$ . До просторової системи чотирьох сил, що збігаються, застосуємо аналітичні умови рівноваги і складемо три рівняння рівноваги:

$$1. \sum Y = 0; \quad R_C \sin \beta - R_B \sin \beta = 0, \text{ звідки } R_C = R_B.$$

Оскільки кути між реакціями  $R_B$ ,  $R_C$  і осями координат  $x$  і  $z$  невідомі, то для зручності проєктування кожен з цих сил розкладемо на дві складові, як показано на рисунку 1.45, б. Тоді

$$R_{C_x} = Om = R_C'' \cos \alpha = R_C \cos \beta \cos \alpha;$$

$$R_{C_z} = On = R_C'' \sin \alpha = R_C \cos \beta \sin \alpha.$$

Проекції складової  $R_C'$  на осі  $x$  і  $z$  дорівнюють нулю, оскільки ця складова перпендикулярна вказаним осям;

$$2. \sum Z = 0; \quad R_C \cos \beta \sin \alpha + R_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

Враховуючи, що  $R_B = R_C$ , отримуємо

$$R_B = R_C = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{G}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{200}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 163 \text{ Н.}$$

$$3. \sum X = 0; \quad R_A - R_C \cos \beta \cos \alpha - R_B \cos \beta \cos \alpha = 0, \text{ звідки}$$

$$R_A = 2R_B \cos \beta \cos \alpha = \frac{2G \cos \beta \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin \alpha} = G = 200 \text{ Н.}$$

### 1.6.6 Момент сили відносно осі

Розглянемо колесо черв'ячної передачі, укріплене на валу, що обертається в підшипниках (рис. 1.46). Черв'як передає черв'ячному колесу силу  $F$ .

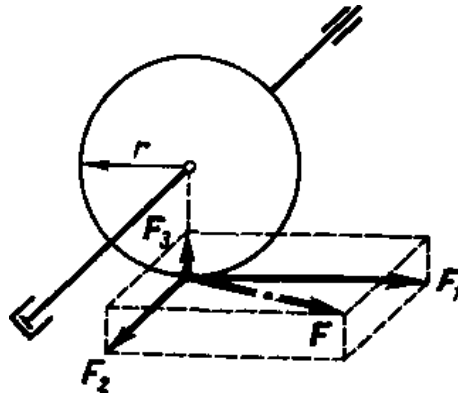


Рисунок 1.46

Розкладемо силу  $F$  на три взаємно перпендикулярні складові  $F_1$ ,  $F_2$  і  $F_3$ . Складову  $F_1$  назвемо коловою силою, складову  $F_2$  – вісьовою силою, а складову  $F_3$  – радіальною силою.

Складова  $F_1$  викликає обертальну дію, яка вимірюється добутком  $F_1 r$ ; складова  $F_2$  прагне зрушити колесо уздовж осі, складова  $F_3$  прагне зігнути вісь колеса, а обертальна дія цих сил відносно осі дорівнює нулю.

Раніше було встановлено, що проекція вектора сили на вісь є скалярна алгебраїчна величина. На відміну від проекції на вісь проекція сили на площину є величина векторна, оскільки ця проекція характеризується не лише числовим значенням, але і положенням на площину, тобто напрямом. Тому моменту сили відносно осі можна дати таке визначення: моментом сили відносно осі називається величина, що дорівнює моменту проекції цієї сили на площині, перпендикулярну осі, відносно точки перетину осі з площиною.

Це визначення пояснить рисунок 1.47. Момент сили відносно осі умовимося записувати так:

$$M_z(F) = F_H a. \quad (1.80)$$

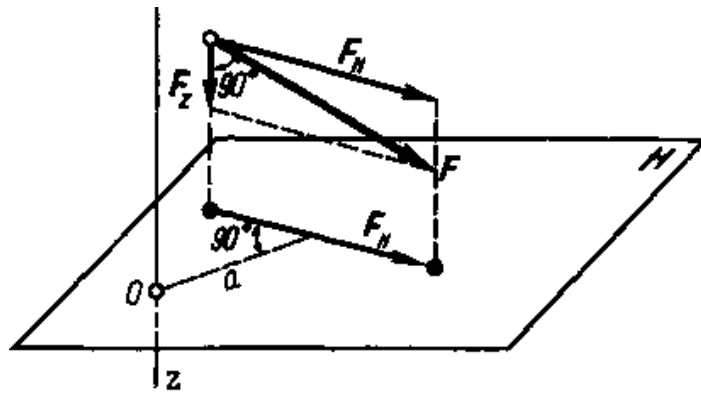


Рисунок 1.47

Умовимося вважати момент сили додатним, якщо дивитися з додатного кінця осі і сила прагне викликати обертання проти годинникової стрілки, і навпаки.

Момент сили відносно осі не змінюється від переміщення сили уздовж лінії її дії.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках (не рахуючи випадків, коли сила дорівнює нулю або діє уздовж осі):

- якщо вектор сили паралельний осі, оскільки при цьому проекція сили на поверхню, перпендикулярну осі, дорівнює нулю (див. силу  $F_z$  на рис. 1.47);
- якщо лінія дії сили пересікає вісь, оскільки при цьому плече дорівнює нулю (див. силу  $F_3$  на рис. 1.46).

### ***1.6.7 Аналітичні умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил***

Для рівноваги просторової системи довільно розташованих сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій всіх сил на кожну з трьох осей координат дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно кожної з цих осей дорівнювала нулю.

Запишемо умови рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum M_x(F_i) = 0, \\ \sum Z = 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Пояснимо сенс цих умов, для чого застосуємо три умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M(F_i) = 0. \tag{1.82}$$

Тіло, що лежить на поверхні, має три ступеня свободи, а саме: можливість переміщення в напрямках двох взаємно перпендикулярних осей, які лежать у цій площині, і можливість обертання довкола осі, перпендикулярної

цій площині. Якщо до тіла прикладена плоска система сил і виконана умова  $\sum X = 0$ , то тіло не переміщатиметься у напрямку осі  $x$ , оскільки рівнодійна системи не має складової, паралельній осі  $x$ . Якщо виконана умова  $\sum Y = 0$ , то тіло не переміщатиметься і у напрямку осі  $y$ , оскільки рівнодійна системи не має складової, паралельній осі  $y$ . Нарешті, якщо виконана умова  $\sum M(F_i) = 0$ , тобто сума моментів відносно будь-якої точки площині дорівнює нулю, то тіло під дією цієї системи сил не обертатиметься, оскільки немає пари сил, яка може здійснити це обертання.

Таким чином, трьом ступеням свободи тіла на поверхні відповідають три умови рівноваги.

Вільне тіло в просторі має шість ступенів свободи, а саме: можливість переміщатися в напрямках трьох взаємно перпендикулярних осей координат і можливість обертатися довкола цих осей. Таким чином, шести ступеням свободи тіла в просторі відповідають шість умов рівноваги.

Якщо система сил, прикладена до вільного тіла, задовольняє всі шість умов рівноваги, то можливість трьох переміщень і трьох обертань під дією цієї системи унеможливлено, і тіло знаходитиметься в рівновазі.

Неважко показати, що всі виведені вище умови рівноваги для різних систем сил є окремими випадками умов рівноваги, розглянутих тут.

У випадку, якщо на вільне тіло діє просторова система паралельних сил (наприклад, паралельних осі  $z$ ), то умови рівноваги цієї системи запишуться так:

$$\sum Z = 0, \quad \sum M_x(F_i) = 0, \quad \sum M_y(F_i) = 0. \quad (1.83)$$

Останні три умови рівноваги будуть тотожністю, оскільки проекції всіх сил такої системи на осі  $x$  і  $y$  дорівнюють нулю і моменти всіх сил відносно осі  $z$  також дорівнюють нулю.

Оскільки умови рівноваги просторової системи сил справедливі для будь-яких прямокутних осей координат, то під час розв'язання даної задачі систему координат можна змінювати, тобто частину умов рівноваги скласти для одних осей координат, а частина – для змінених.

Крім того, можна одне, два або всі три рівняння проекцій сил замінити рівняннями моментів сил відносно нових осей координат (див. приклад 1.12). У деяких випадках такі прийоми спрощують розв'язання завдань.

Під час розв'язання завдань рівняння моментів сил відносно осей в загальному вигляді запишуватимемо спрощено, а саме:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \quad (184)$$

**Приклад 1.12.** На горизонтальному валу  $AB$  (рис.1.48) насаджено зубчасте колесо 1 діаметром  $D=2$  м і шестерня 2 діаметром  $d=20$  см. Інші розміри вказані на рисунку 1.48. До колеса 1 по дотичній прикладена горизонтальна сила  $P=100$  Н, а до шестерні 2 також по дотичній прикладена вертикальна сила  $Q$ . Визначити силу  $Q$  і реакції підшипників  $A$  і  $B$  у положенні рівноваги. Масою деталей знехтувати.

*Розв'язання.* Відкинемо підшипники і розглянемо рівновагу вала із зубчастим колесом і шестернею. Реакції підшипників  $A$  і  $B$  перпендикулярні осі вала. Тому розкладемо кожну з цих реакцій на дві взаємно перпендикулярні складові, паралельні осям координат  $x$  і  $z$ . У результаті отримана прикладена до заданої системи тіл просторова система шести сил, п'ять з яких, тобто  $X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q$ , невідомі за модулем.

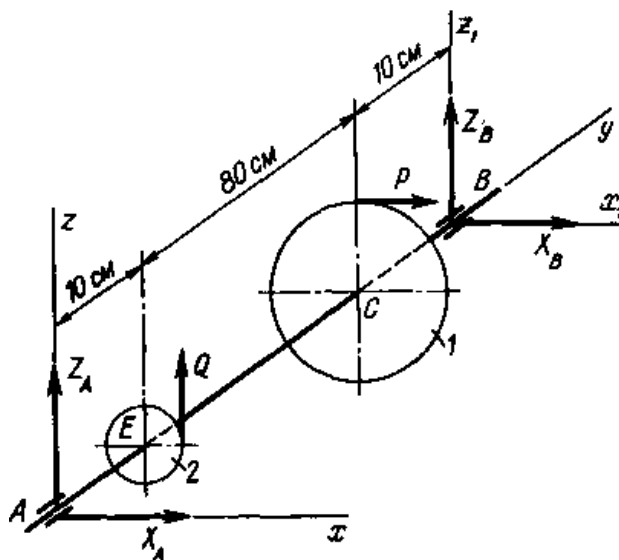


Рисунок 1.48

Застосуємо умови рівноваги просторової системи довільно розташованих сил і складемо п'ять рівнянь рівноваги:

$$1. \sum M_y = 0; \quad \frac{-d}{2} + \frac{PD}{2} = 0.$$

$$\text{З цього рівняння} \quad Q = \frac{PD}{d} = \frac{100 \cdot 2}{0,2} = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН}.$$

$$2. \sum M_z = 0; \quad -X_B \cdot AB - P \cdot AC = 0.$$

$$\text{З цього рівняння} \quad X_B = \frac{-P \cdot AC}{AB} = \frac{-100 \cdot 0,9}{1,0} = -90 \text{ Н}.$$

$$3. \sum M_x = 0; \quad Q \cdot AE + Z_B \cdot AB = 0.$$

$$\text{З цього рівняння} \quad Z_B = \frac{-Q \cdot AE}{AB} = \frac{-1000 \cdot 0,1}{1,0} = -100 \text{ Н}.$$

$$4. \sum X = 0; \quad X_A + P + X_B = 0.$$

З цього рівняння  $X_A = -P - X_B = -100 - (-90) = -10$  Н.

$$5. \sum Z = 0; \quad Z_A + Q + Z_B = 0.$$

З цього рівняння  $Z_A = -Q - Z_B = -1000 - (-100) = -900$  Н.

Знак «-» перед значеннями реакцій  $X_A$ ,  $X_B$ ,  $Z_A$  і  $Z_B$  показує, що ці реакції направлені протилежно вказаним на рис. 1.48.

Шоста умова рівноваги  $\sum Y = 0$  обертається в тотожність, оскільки проекції на вісь  $y$  усіх сил даної системи дорівнюють нулю.

Для перевірки розв'язання складемо додаткове, контрольне рівняння моментів відносно осі  $x_1$ , що проходить через точку  $B$ :

$$\sum M_{x_1} = 0; \quad -Z_A \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$900 \cdot 1,0 - 1000 \cdot 0,9 = 0.$$

Контрольне рівняння обертається в тотожність, що свідчить про правильність отриманих відповідей.

На цьому прикладі покажемо можливість зміни під час розв'язання системи координатних осей і заміни рівняння проекцій рівнянням моментів.

Визначимо реакцію  $X_A$ , залишивши замість рівняння проекцій сил на вісь  $x$ ; рівняння моментів сил відносно нової осі  $z_1$ , що проходить через точку  $B$ :

$$\sum M_{z_1} = 0; \quad X_A \cdot AB + P \cdot CB = 0.$$

З цього рівняння

$$X_A = \frac{-P \cdot CB}{AB} = \frac{-100 \cdot 0,1}{1,0} = -10 \text{ Н.}$$

Як видно, відповідь отримана та сама.

### 1.6.8 Теорема про момент рівнодійної відносно осі (теорема Варіньона)

**Теорема.** Момент рівнодійної відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж осі.

Нехай надані просторова система  $n$  довільно розташованих сил, прикладених до тіла, і рівнодійна цієї системи  $F_\Sigma$  (рис. 1.49):

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \equiv F_\Sigma. \quad (1.85)$$

Прикладемо до тіла іншу систему сил, рівнодійна якій  $F'_\Sigma$  за модулем дорівнює силі  $F_\Sigma$  і напрямлена по тій самій лінії дії в протилежну сторону.

Сила  $F'_\Sigma$  для даної системи є силою, що врівноважує, і разом з даними силами утворює урівноважену систему

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n, F'_\Sigma) \equiv 0, \quad (1.86)$$

також

$$(F_\Sigma, F'_\Sigma) \equiv 0. \quad (1.87)$$

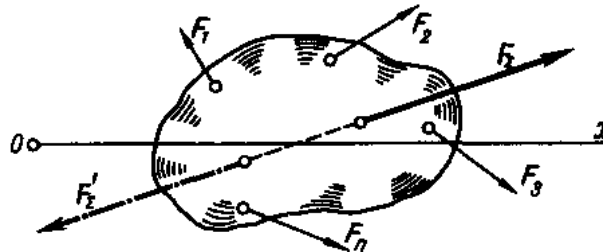


Рисунок 1.49

Оскільки обидві записані вище системи еквівалентні нулю, тобто урівноважені, то можна застосувати до них будь-яку умову рівноваги, наприклад,

$$\sum M_x(F_i) = 0. \quad (1.88)$$

Запишемо цю умову для обох систем:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) + M_x(F'_\Sigma) = 0 \quad (1.89)$$

$$M_x(F_\Sigma) + M_x(F'_\Sigma) = 0. \quad (1.90)$$

Оскільки праві частини цієї рівності рівні, то рівні будуть і ліві:

$$M_x(F_1) + M_x(F_2) + M_x(F_3) + \dots + M_x(F_n) = M_x(F_\Sigma), \quad (1.91)$$

оскільки члени  $M_x(F'_\Sigma)$  взаємно знищилися.

Отже,

$$\sum M_x(F_i) = M_x(F_\Sigma); \quad (1.92)$$

теорема доведена.

## 1.7 Центр тяжіння

### 1.7.1 Центр паралельних сил

Центром паралельних сил називається така точка на лінії дії рівнодійної системи паралельних сил, через яку проходить рівнодійна, і в тому випадку, якщо всі сили системи обернути довкола їх точок прикладання на один і той самий кут, зберігаючи паралельність сил.

Покажемо існування центру паралельних сил на системі двох сил  $F_1$  і  $F_2$  (рис. 1.50). На підставі теореми про складання двох паралельних сил,

направлених в один бік, визначимо рівнодійну цих сил і положення її лінії дії з формул

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2; \quad F_1/F = BC/AC. \quad (1.93)$$

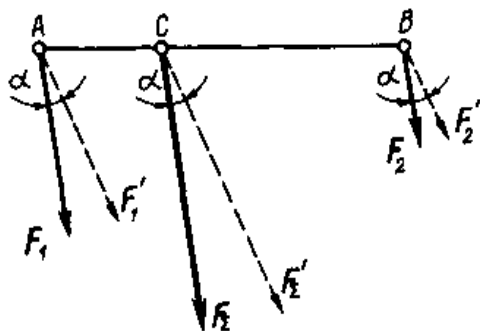


Рисунок 1.50

Неважко побачити, що точка  $C$ , що лежить на лінії  $AB$ , та поєднує точки прикладання даних сил, є центром двох паралельних сил  $F_1$  і  $F_2$ , оскільки при повороті їх на один і той самий кут  $\alpha$  відношення плечей  $B_C$  і  $C_A$  не зміниться і рівнодійна також пройде через точку  $C$ .

Якщо дана система  $n$  паралельних сил, то рівнодійну цієї системи можна знайти, послідовно попарно складаючи всі сили. На лінії дії рівнодійної системи паралельних сил також існуватиме точка, що має властивість центру паралельних сил. Виведемо формули для визначення координат центру системи  $n$  паралельних сил.

Нехай надані просторова система  $n$  паралельних сил і рівнодійна цієї системи. Виберемо систему осей координат і позначимо координати точок прикладання сил даної системи і координати точки прикладання рівнодійної (рис. 1.51).

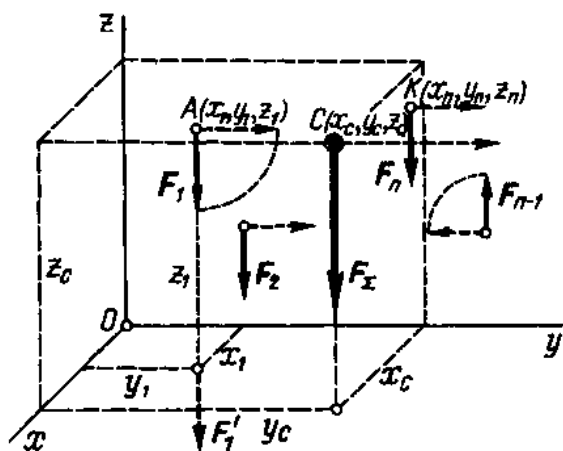


Рисунок 1.51



Запишемо моменти сил даної системи відносно осі  $y$ . Для того, щоб легко уявити, чому дорівнює момент сили відносно осі, слід подумки перенести силу уздовж лінії дії до положення, коли точка прикладання сили з'явиться в площині координатних осей (сила  $F_1'$  на рис. 1.51):

$$\begin{aligned} M_y(F_1) &= F_1 x_1, \\ M_y(F_2) &= F_2 x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ M_y(F_n) &= F_n x_n, \\ M_y(F_\Sigma) &= F_\Sigma x_C. \end{aligned} \tag{1.94}$$

Застосуємо доведену в попередньому параграфі теорему про момент рівнодійної відносно осі. Тоді

$$F_\Sigma x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n. \tag{1.95}$$

Звідки

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n}{F_\Sigma}. \tag{1.96}$$

Записавши моменти сил відносно осі  $x$  і знову застосувавши теорему про момент рівнодійної, отримаємо

$$y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3 + \dots + F_n y_n}{F_\Sigma}. \tag{y.97}$$

Для визначення координати  $z_C$  обернемо всі сили системи довкола їх точок прикладання в один бік, щоб сили стали паралельні осі  $y$ . При цьому точка  $C$  не змінить свого положення, оскільки вона є центром паралельних сил даної системи.

Запишемо моменти всіх сил відносно осі  $x$  і застосуємо теорему про момент рівнодійної, внаслідок чого отримаємо

$$z_C = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \dots + F_n z_n}{F_\Sigma}. \tag{1.98}$$

Рівнодійна системи паралельних сил дорівнює їх алгебраїчній сумі, тобто  $F_\Sigma = \sum F_i$ . Застосувавши скорочену форму запису, отримаємо формули для визначення координат центру паралельних сил у такому вигляді:

$$x_C = \frac{\sum(F_i x_i)}{\sum F_i}; \quad y_C = \frac{\sum(F_i y_i)}{\sum F_i}; \quad z_C = \frac{\sum(F_i z_i)}{\sum F_i}. \tag{1.99}$$

Зазначимо, що у наведених формулах сили і моменти сил беруть із знаком за раніше встановленими правилами.

### 1.7.2 Визначення положення центру тяжіння

Сила, з якою тіло притягується до Землі, називається силою тяжіння.

Елементарною часткою тіла називається така мала частка, положення якої в просторі визначається координатами однієї точки. Розглянемо тіло, що складається з великої кількості елементарних часток. Сили тяжіння кожної частки, направлені до центру Землі, утворюють систему сил, що збігаються, але для тіл, розміри яких малі порівняно з розмірами Землі, з достатньою мірою точності можна вважати ці сили системою паралельних сил.

Центром тяжіння тіла називається центр паралельних сил тяжіння всіх елементарних часток тіла.

Центр тяжіння є геометрична точка, яка може лежати поза тілом (наприклад, кільце, циліндр з отвором).

Координати центру тяжіння тіла знаходять за тими самими формулами, що і координати центру паралельних сил, а саме:

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i}; \quad y_c = \frac{\sum(G_i y_i)}{\sum G_i}; \quad z_c = \frac{\sum(G_i z_i)}{\sum G_i}, \quad (1.100)$$

де  $G_i$  – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;  $x_i, y_i, z_i$  – координати частки;  $\sum G_i$  – сила тяжіння всього тіла.

У разі однорідних тіл за такими самими формулами можна визначати координати центру тяжіння об'ємів, площ і ліній. Наприклад, для абсциси  $x_c$  отримаємо такі формули:

– сила тяжіння елементарної частки, виражена через її об'єм  $V_i$ , дорівнює

$$G_i = \gamma V_i, \quad (1.101)$$

де  $\gamma$  – питома сила тяжіння (для однорідного тіла – величина постійна).

Тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \sum(V_i x_i)}{\gamma \sum V_i}, \quad (1.102)$$

отже, для об'єму

$$x_c = \frac{\sum(V_i x_i)}{\sum V_i}; \quad (1.103)$$

– якщо тіло є однорідною пластинкою завтовшки  $h$ , то сила тяжіння елементарної частки, виражена через площу  $A_i$ , дорівнює

$$G_i = \gamma h A_i; \quad (1.104)$$

тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma h \sum(A_i x_i)}{\gamma h \sum A_i}, \quad (1.105)$$

отже, для площі

$$x_c = \frac{\sum(A_i x_i)}{\sum A_i}; \quad (1.106)$$

– якщо тіло є однорідним дротом постійного поперечного перетину  $A$ , то сила тяжіння елементарної частки, виражена через довжину  $l_i$ , дорівнює

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma A \sum(l_i x_i)}{\gamma A \sum l_i}; \quad (1.107)$$

тоді

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma A \sum(l_i x_i)}{\gamma A \sum l_i}, \quad (1.108)$$

отже, для лінії

$$x_c = \frac{\sum(l_i x_i)}{\sum l_i}.$$

### 1.7.3 Методи знаходження центру тяжіння

Розглянемо три методи знаходження центру тяжіння: метод симетрії, метод розбиття і метод негативних мас.

*Метод симетрії.* Уявімо собі однорідне тіло, яке має площину симетрії. Виберемо таку систему координат, щоб осі  $x$  і  $z$  лежали у площині симетрії (рис. 1.52).

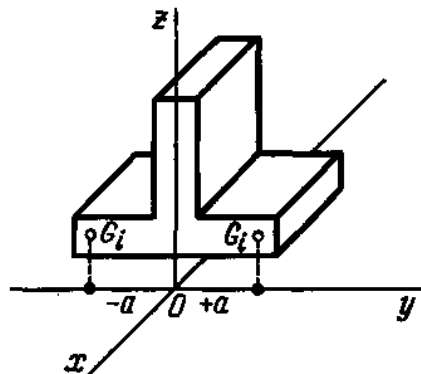


Рисунок 1.52

У цьому випадку кожній елементарній частинці силою тяжіння  $G_i$  з абсцисою  $y_i = +a$  відповідає така ж елементарна частинка з абсцисою  $y_i = -a$ , тоді

$$y_c = \frac{\sum(G_i y_i)}{\sum G_i} = 0. \quad (1.109)$$

Звідси випливає висновок: якщо однорідне тіло має поверхню симетрії, то центр тяжіння тіла лежить в цій площині.

Аналогічно можна довести і такі положення:

– якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр тяжіння тіла лежить на цій осі;

– якщо однорідне тіло має дві осі симетрії, то центр тяжіння знаходиться в точці їх перетину;

– центр тяжіння однорідного тіла обертання лежить на осі обертання.

*Метод розбиття.* Цей метод полягає в тому, що тіло розбивають на найменше число частин, сили тяжіння і положення центрів тяжіння яких відомі, після чого застосовують виведені раніше формули.

Допустимо, що сила тяжіння  $G$  діє на три частини тіла  $G'$ ,  $G''$ ,  $G'''$ , абсциси центрів тяжіння цих частин  $x'_c$ ,  $x''_c$ ,  $x'''_c$  відомі. Візьмемо формулу для визначення абсциси центру тяжіння всього тіла

$$x_c = \frac{\sum(G_i x_i)}{G_i} \quad (1.110)$$

і перепишемо її у такій формі:

$$x_c \sum G_i = \sum(G_i x_i) \text{ або } Gx_c = \sum(G_i x_i). \quad (1.111)$$

Останнє рівняння запишемо для кожної з трьох частин тіла окремо:

$$G'x'_c = \sum(G'_i x'_i); G''x''_c = \sum(G''_i x''_i); G'''x'''_c = \sum(G'''_i x'''_i). \quad (1.112)$$

Склавши праві і ліві частини цих трьох рівностей, отримаємо

$$G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c = \sum(G'_i x'_i) + \sum(G''_i x''_i) + \sum(G'''_i x'''_i) = \sum(G_i x_i). \quad (1.113)$$

Але, права частина останньої рівності є добутком  $Gx_c$ , оскільки

$$Gx_c = \sum(G_i x_i), \quad (1.114)$$

отже,

$$x_c = \frac{G'x'_c + G''x''_c + G'''x'''_c}{G}, \quad (1.115)$$

що і потрібно було довести. Аналогічно,

$$y_c = \frac{G'y'_c + G''y''_c + G'''y'''_c}{G};$$

$$z_c = \frac{G'z'_c + G''z''_c + G'''z'''_c}{G}. \quad (1.116)$$

Отримані формули аналогічні формулам для визначення координат центрів тяжіння, виведених у попередньому параграфі. Тому у вихідні формули можна підставляти не сили тяжіння елементарних часток  $G_i$ , а сили тяжіння кінцевих частин; під координатами  $x_i, y_i, z_i$  розуміють координати центрів тяжіння частин, на які тіло розбите.

*Метод негативних мас.* Цей метод полягає в тому, що тіло, яке має вільні порожнини, вважають суцільними, а масу вільних порожнин вважають від'ємною. Вигляд формул для визначення координат центру тяжіння тіла при цьому не змінюється.

Таким чином, при визначенні центру тяжіння тіла, що має вільні порожнини, слід застосовувати метод розбиття, але вважати масу вільних порожнин негативною.

#### 1.7.4 Положення центру тяжіння деяких фігур

*Прямокутник.* Оскільки прямокутник має дві осі симетрії, то центр тяжіння його площі знаходиться в точці перетину цих осей, інакше кажучи, в точці перетину діагоналей прямокутника.

*Трикутник.* Нехай даний трикутник  $ABD$  (рис. 1.53). Розіб'ємо його на елементарні (нескінченно вузькі) смужки, паралельні стороні  $AD$ . Центр тяжіння кожної смужки лежатиме на медіані  $Bd$ , отже, на цій медіані лежатиме центр тяжіння всієї площі трикутника. Розбивши трикутник на елементарні смужки, паралельні стороні  $AB$ , побачимо, що шуканий центр тяжіння лежить і на медіані  $aD$ , отже, центр тяжіння площі трикутника лежить в точці перетину його медіан. З геометрії відомо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться відносно 1:2 від основи. З подібності трикутників  $CNd$  і  $BMd$  отримаємо

$$CN = h/3. \quad (1.117)$$

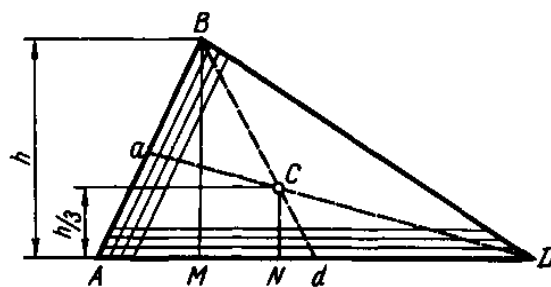


Рисунок 1.53

Отже, центр тяжіння площі трикутника лежить на відстані однієї третини висоти від кожної основи.

Дуга кола. Візьмемо дугу  $AB$  кола радіусом  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$  (рис. 1.54).

Систему координат виберемо так, щоб початок координат був у центрі кола, а вісь  $x$  ділила дугу навпіл, тоді  $y_C=0$  унаслідок симетрії дуги відносно осі  $x$ . Визначимо  $x_C$ .

Розіб'ємо дугу  $AB$  на елементарні частини  $l_i$ , одна з яких – на рис. 1.54. Тоді, згідно з правилами визначення положення центру тяжіння,

$$x_C = \frac{\sum (l_i x_{Ci})}{\sum l_i}. \quad (1.118)$$

Дугу  $l_i$  унаслідок незначної довжини приймемо за відрізок прямої. З подібності  $\triangle OD_iC_i$  і елементарного  $\triangle S$  (на кресленні заштрихований) отримаємо

$$l_i / \Delta y_i = R / x_{Ci} \quad \text{або} \quad l_i x_{Ci} = R \Delta y_i. \quad (1.119)$$

Тоді

$$x_C = \frac{\sum (l_i x_{Ci})}{\sum l_i} = \frac{\sum (R \Delta y_i)}{l} = \frac{R \sum \Delta y_i}{l} = R \frac{AB}{l}, \quad (1.120)$$

оскільки  $\sum \Delta y_i = AB$ , а  $l = 2R\alpha$  – довжина дуги  $AB$ . Але  $AB = 2R \sin \alpha$ ,  $l = 2R\alpha$ , отже,

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.121)$$

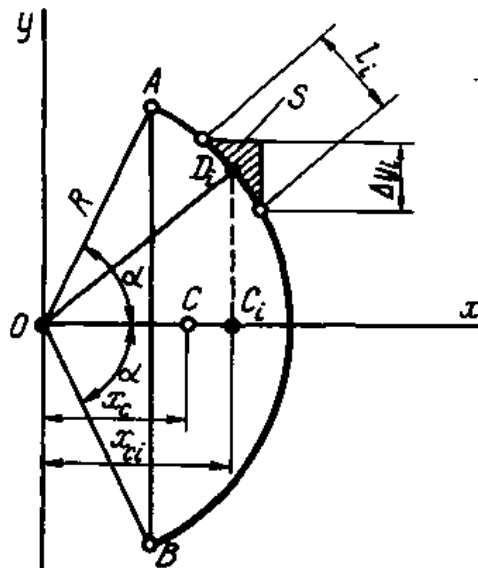


Рисунок 1.54

При  $\alpha = \pi/2$  рад (півколо)

$$x_C = \frac{2R}{\pi}. \quad (1.122)$$

*Круговий сектор.* Візьмемо сектор радіусом  $R$  з центральним кутом  $2\alpha$  (рис. 1.55). Проведемо осі координат, як показано на кресленні, тоді  $y_C=0$ . Визначимо  $x_C$ , для чого розіб'ємо сектор на ряд елементарних секторів, кожен з яких унаслідок незначної довжини дуги  $l_i$  приймемо за рівнобедрений трикутник з висотою  $R$ . Тоді центр тяжіння кожного елементарного сектора лежатиме на дузі радіуса  $2R/3$  і завдання визначення центру тяжіння сектора зведеться до визначення центру тяжіння дуги кола радіусу  $2R/3$ , отже,

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}. \quad (1.123)$$

При  $\alpha = \pi/2$  рад (півколо)

$$x_C = \frac{4R}{3\pi}. \quad (1.124)$$

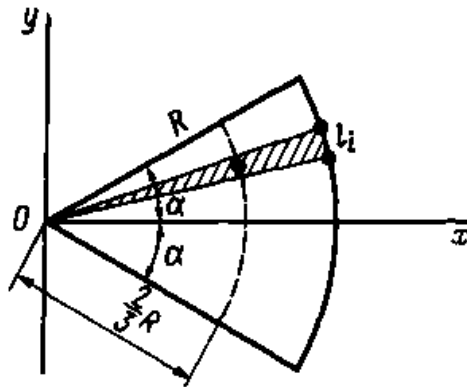


Рисунок 1.55

**Приклад 1.13.** Визначити положення центру тяжіння тонкої однорідної пластинки, форма якої і розміри в міліметрах показані на рис. 1.56.

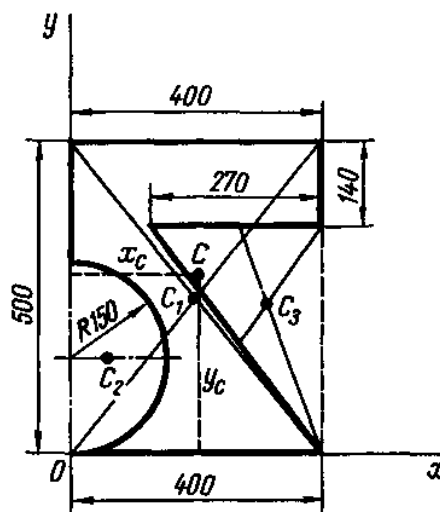


Рисунок 1.56

*Розв'язання.* Виберемо осі координат, як показано на рисунку 1.56. Уявімо собі задану фігуру такою, що складається з трьох частин: прямокутника  $40 \times 500$ , півкола і трикутника, причому площі двох останніх частин вважатимемо негативними. Тоді

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}; y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

де  $A_1 = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ см}^2$ ;  $x_1 = 20 \text{ см}$ ;

$$A_2 = -\frac{\pi}{2} \cdot 15^2 = -353 \text{ см}^2; \quad A_3 = -\frac{\pi}{2} \cdot 15^2 = -353 \text{ см}^2;$$

$$x_2 = \frac{4 \cdot 15}{3\pi} = 6,37 \text{ см}; \quad x_3 = 13 + \frac{2}{3} \cdot 27 = 31 \text{ см};$$

$$y_1 = 25 \text{ см}; \quad y_2 = 15 \text{ см}; \quad y_3 = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24 \text{ см}.$$

Підставивши значення і зробивши обчислення, отримаємо  $x_c = 19,5 \text{ см}$ ,  $y_c = 28,4 \text{ см}$ .

**Приклад 1.14.** Визначити положення центру тяжіння перетину, складеного з двотавра № 22 і швелера № 20, як показано на рис. 1.57.

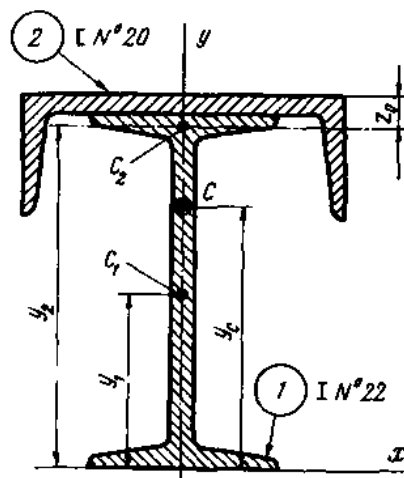


Рисунок 1.57

*Розв'язання.* З курсу креслення відомо, що номер профілю прокату відповідає найбільшому габаритному розміру його перетину, вираженому в сантиметрах.

Оскільки перетин, складений з двотавра і швелера, є фігурою, симетричною відносно осі  $y$ , то центр тяжіння такого перетину лежить на цій осі, тобто  $x_c = 0$ . За довідником визначимо площі і координати центрів тяжіння двотавра 1 і швелера 2.



Для двотаврового перетину

$$A_1 = 15,2 \text{ см}^2; y_1 = 22/2 = 11 \text{ см};$$

для швелерного перетину

$$A_2 = 12 \text{ см}^2, y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см},$$

де  $d$  – товщина стінки швелера;

$z_0$  – розмір, що визначає положення центру тяжіння швелера.

Застосуємо формулу для визначення ординати центру тяжіння всього перетину:

$$y_c = \frac{\sum (A_i y_i)}{\sum A_i},$$

тоді

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15,2 \cdot 11 + 12 \cdot 21,07}{15,2 + 12} = 15,4 \text{ см}.$$

## 2 КІНЕМАТИКА

### 2.1 Кінематика точки

#### 2.1.1 Основні поняття кінематики

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються рухи матеріальних тіл без урахування їх мас і сил, що діють на них.

Коли в механіці говорять про рух тіла, то розуміють зміну з часом його положення в просторі по відношенню до інших тіл. Зазвичай з тілом, по відношенню до якого вивчають рух, зв'язують яку-небудь систему координат, яку разом з вибраним способом виміру часу називають системою відліку. Якщо координати всіх точок тіла у вибраній системі відліку залишаються весь час незмінними, то тіло знаходиться у спокої. Якщо розглядається рух тіла по відношенню до умовно нерухомої системи відліку, то рух називають абсолютним; рух тіла по відношенню до рухомої системи відліку називають відносним. У світі все знаходиться в безперервному русі, тому всі рухи є відносними, проте умовно можна уявити собі і абсолютний рух, наприклад, рух по відношенню до Землі.

#### 2.1.2 Основні визначення теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин займається застосуванням законів теоретичної механіки до механізмів і машин.

Ознайомимося з основними визначеннями теорії механізмів і машин.

Згідно з цією теорією механізм – це замкнений кінематичний ланцюг, у якому визначені рухи всіх ланок. Механізми служать для передачі або перетворення руху.

Машина є механізм або поєднання механізмів, що здійснюють певні доцільні рухи для перетворення енергії (енергетичні машини), зміни форми, властивостей, стану і положення предмета праці (робочі машини) або для збору, переробки і використання інформації (інформаційні машини).

Таким чином, машина складається з одного або декількох механізмів, але не кожен механізм є машиною.

Робота механізму або машини обов'язково супроводжується тим або іншим рухом її органів.

Простою частиною механізму є ланка. Ланка – це одне тіло або незмінне поєднання тіл.

Дві ланки, сполучені між собою і такі, що допускають відносний рух, називаються кінематичною парою. Кінематичні пари бувають нижчі та вищі. Ланки нижчих пар стикаються по поверхнях (поступальні, обертальні та гвинтові пари), ланки вищих пар стикаються по лініях і точках (зубчасті пари, підшипники кочення).

Сукупність кінематичних пар називається кінематичним ланцюгом. Кінематичні пари і ланцюги можуть бути плоскими і просторовими.

Ланка, що обертається довкола нерухомої осі, називається кривошипом. Ланка, що коливається довкола нерухомої осі, називається балансиром або коромислом. Ланка, що здійснює складний рух паралельно якійсь площині, називається шатуном. Рухома зворотно-поступальна ланка називається повзуном. Ланка, виконана у вигляді рейки з пазом, називається кулісою, в пазу ковзає камінь куліси.

Ланка, якій ззовні надається певний рух, називається такою, що веде. Останні рухомі ланки називаються веденими.

Як приклад розглянемо широко поширений кривошипно-повзунний механізм, схематично зображений на рис. 2.1.

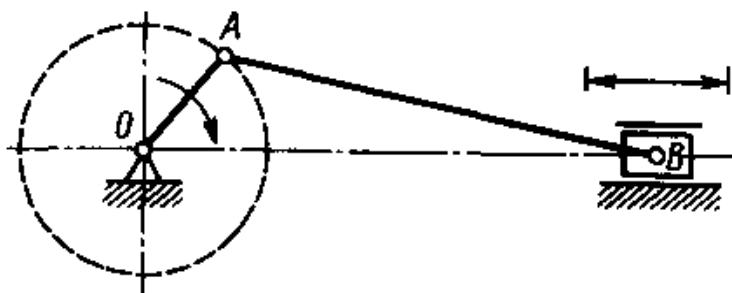


Рисунок 2.1

Цей механізм перетворює обертальний рух в зворотно-поступальний (наприклад, у компресорах, поршневих насосах, ексцентрикових і кривошипних пресах) або, навпаки, для перетворення зворотно-поступального руху в обертальний (наприклад, у парових машинах, двигунах внутрішнього згорання).

### **2.1.3 Способи задання руху точки**

Знання законів руху тіла означає знання законів руху кожної його точки, тому вивчення кінематики почнемо з вивчення руху геометричної точки.

Траєкторією точки називається геометричне місце положень рухомої точки в даній системі відліку. Залежно від форми траєкторії рух точки буває двох видів: прямолінійний і криволінійний. Розглянемо два способи задання руху точки: природний і координатний.

Природний спосіб полягає в тому, що рух точки задається її траєкторією і рівнянням руху по цій траєкторії (законом руху).

Рівняння руху в загальному вигляді записується так:

$$s = f(t), \quad (2.1)$$

де  $s$  – відстань точки від початкового положення, що є функцією часу;  $t$  – час руху точки від початкового моменту.

Знаючи траєкторію точки і рівняння руху по цій траєкторії, можна визначити положення точки у будь-який момент часу, для чого необхідно в рівність  $s=f(t)$  підставити час.

При своєму русі точка проходить деякий шлях, що також є функцією часу. Слід підкреслити, що шлях, пройдений точкою, збігається з відстанню від початку відліку лише тоді, коли точка весь час рухається в одному напрямі і початок її руху збігається з початком відліку.

Координатний спосіб полягає в тому, що рух точки задається рухом її проекцій уздовж осей координат.

Рівняння плоского руху точки в координатній формі записуються так:  $x = f(t)$ ,  $y = f_1(t)$ .

Знаючи рівняння руху точки в координатній формі, можна, підставивши в ці рівняння час, визначити положення проекцій точки, а отже, і самої точки у будь-який момент часу (рис. 2.2).

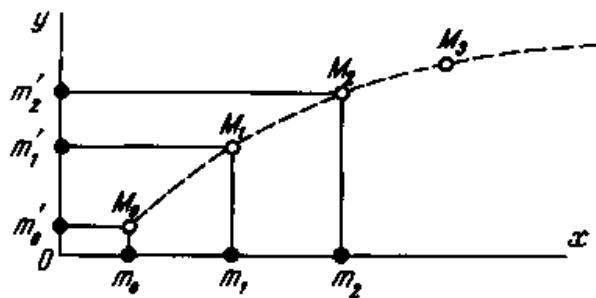


Рисунок 2.2

**Приклад 2.1.** Кривошип  $OA$  обертається навколо нерухомої осі так, що кут  $\varphi=10t$ , рад. Довжина  $OA=AB=0,8$  м. Знайти рівняння руху і траєкторію середньої точки  $M$  шатуна, а також рівняння руху повзуну  $B$ , якщо в початковий момент повзун знаходився в крайньому положенні; осі координат вказані на рис. 2.3.

*Розв'язання.* Визначимо координати точки  $M$  залежно від кута  $\varphi$ :

$$x_M = OA \cos \varphi + AM \cos \varphi = 0,8 \cos \varphi + 0,4 \cos \varphi = 1,2 \cos \varphi;$$

$$y_M = MB \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi.$$

Таким чином, рівняння руху точки  $M$  запишуться так:

$$x_M = 1,2 \cos 10t, \quad y_M = 0,4 \sin 10t.$$

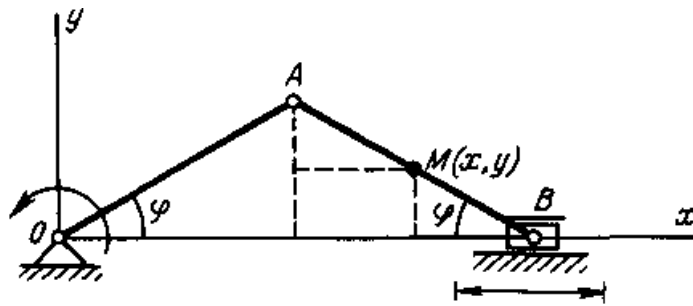


Рисунок 2.3

Щоб визначити рівняння траєкторії точки  $M$ , виключимо з рівнянь руху час. Перетворимо рівняння руху і піднесемо до квадрата:

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} = \cos^2 10t, \quad \frac{y_M^2}{0,4^2} = \sin^2 10t.$$

Склавши праві і ліві частини цієї рівності, отримаємо рівняння траєкторії точки  $M$ :

$$\frac{x_M^2}{1,2^2} + \frac{y_M^2}{0,4^2} = 1.$$

Точка  $M$  рухається по еліпсу з півосями завдовжки 1,2 і 0,4 м. Оскільки повзун  $B$  рухається прямолінійно уздовж осі, то  $y_B=0$ .

Для здобуття рівняння руху повзуна визначимо абсцису точки  $B$  залежно від кута  $\phi$ :

$$x_B = OA \cos \phi + AB \cos \phi = 0,8 \cos \phi + 0,8 \cos \phi = 1,6 \cos \phi.$$

Тоді рівняння руху повзуна запишеться так:

$$x_B = 1,6 \cos 10t, \text{ м.}$$

**Приклад 2.2.** Кривошип  $OM$  куліси Вольфа рівномірно обертається навколо нерухомої осі  $O$  так, що кут  $\phi = \frac{\pi}{4}t$ , рад (рис. 2.4). Довжина стрижня  $OM=0,2$  м. У початковий момент стрижень  $OM$  склав з віссю  $Ox$  кут  $\phi_0=0$ . Скласти рівняння руху куліси.

*Розв'язання.* З конструкції механізму видно, що куліса рухається зворотно-поступально уздовж осі  $x$ . Очевидно, що куліса рухатиметься за тим самим законом, за яким рухається проекція точки  $M$  на вісь  $x$ , отже,

$$x = x_M = OM \cos \phi = 0,2 \cos \frac{\pi}{4}t, \text{ м.}$$

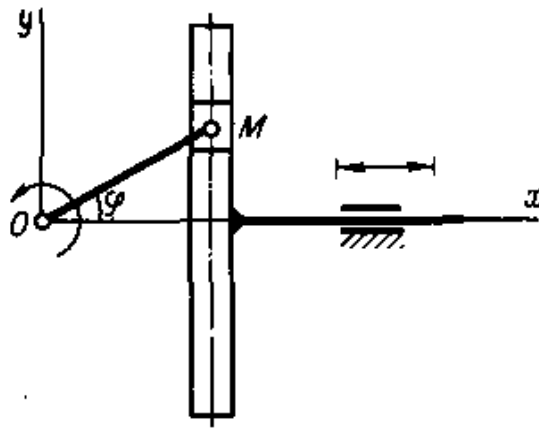


Рисунок 2.4

### 2.1.4 Швидкість точки

Швидкість є кінематична міра руху точки, що характеризує швидкість зміни її положення.

Як відомо з фізики, при рівномірному русі швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:  $v = \frac{S}{t} = const$ , (передбачається, що початки відліку шляху і часу збігаються).

Швидкість є величина векторна. При прямолінійному рівномірному русі швидкість постійна і за модулем, і за напрямом, а вектор її збігається з траєкторією (рис. 2.5, а).

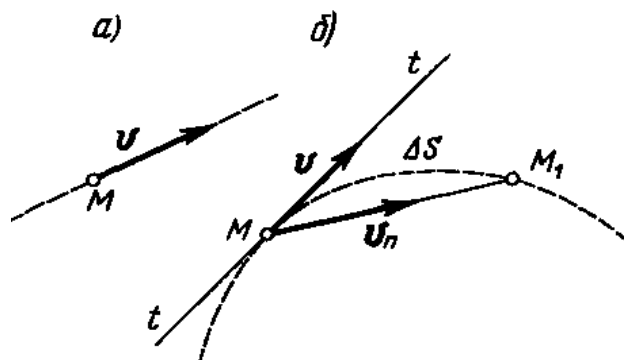


Рисунок 2.5

При криволінійному русі швидкість точки за напрямом змінюється. Для того, щоб встановити напрям вектора швидкості при криволінійному русі, розіб'ємо траєкторію на нескінченно малі ділянки шляху, які можна вважати унаслідок їхнього розбиття прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість  $v_p$  такого прямолінійного руху буде направлена по хорді. У межі при  $\Delta s$ , прямуючої до нуля, хорда збігається з дотичною, отже, швидкість в кожен момент часу направлена по дотичній до траєкторії у бік руху (рис. 2.5, б).

При нерівномірному русі точки модуль її швидкості змінюється. Уявімо собі точку, рух якої заданий природним способом рівнянням  $s = f(t)$ .

Якщо за невеликий проміжок часу  $\Delta t$  точка пройшла шлях  $\Delta s$ , то її середня швидкість дорівнює  $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

Середня швидкість не дає уявлення про дійсну швидкість в кожен даний момент часу (дійсну швидкість інакше називають миттєвою). Чим менше проміжок часу, за який визначається середня швидкість, тим ближче вона до дійсної.

Дійсна швидкість є межа, до якої прямує середня швидкість при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:  $v = \lim_{x \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t}$ . Таким чином, числове значення швидкості дорівнює  $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ .

Дійсна швидкість при будь-якому русі точки дорівнює першій похідній координати (тобто відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Рух, у якому швидкість з часом зростає, називають прискореним; рух, у якому швидкість з часом спадає, – сповільненим.

**Приклад 2.3.** Виріб рухається згідно з рівнянням

$$s = 0,1t^2 + t,$$

де  $t$  – у секундах;  $s$  – в метрах.

Визначити середню швидкість виробу за проміжок часу між кінцем 10-ї і 20-ї секунд і дійсну швидкість в кінці 20-ї секунди.

*Розв'язання.* Для визначення середньої швидкості виробу знайдемо прирости часу і шляху за вказаний проміжок часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с},$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = (0,1t_2^2 + t_2) - (0,1t_1^2 + t_1) = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м}.$$

Середня швидкість виробу визначиться так:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с}.$$

Для визначення дійсної швидкості виробу продиференціюємо рівняння руху за часом, внаслідок чого отримаємо формулу, що виражає залежність дійсної швидкості від часу:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (0,1t^2 + t)}{\partial t} = 0,2t + 1.$$

Підставивши в цей вираз час  $t_2$ , набудемо значення дійсної швидкості в кінці 20-ї секунди:

$$v_{20} = 0,2t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с.}$$

Нехай точка з положення  $M$ , рухаючись нерівномірно, за час  $\Delta t$  перейшла в положення  $M_1$  (рис. 2.5, б). Дугу  $MM_1$  позначимо  $\Delta s$ . Відрізок  $MM_1$  назвемо вектором переміщення точки  $M$ . Допустимо, що точка  $M$  перейшла за час  $\Delta t$  у положення  $M_1$ , рухаючись по хорді і притому рівномірно, тоді швидкість такого прямолінійного руху буде  $v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}$ . Перейдемо до межі, помноживши

заздалегідь чисельник і знаменник правої частини на  $\Delta s$ , і подамо межу добутку як добуток меж:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{MM_1}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta s} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

Оскільки при  $\Delta t$ , прямує до нуля,  $\Delta s$  також прямує до нуля, то перша межа (межа відношення хорди до відповідної дуги) дорівнює одиниці. Друга межа дає першу похідну шляху за часом, тобто дійсну швидкість, причому вектор  $v_n$  у межі буде направлений по дотичній, тобто співпаде з вектором дійсної швидкості  $v$ . Таким чином,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM_1}{\Delta t} = v$ .

Отже, межа вектора умовної швидкості  $v_n$ , рівна межі відношення вектора переміщення точки до відповідного проміжку часу, коли останній прямує до нуля, дорівнює вектору дійсної швидкості точки.

### **2.1.5 Прискорення точки в прямолінійному русі**

*Прискорення є кінематична міра зміни вектора швидкості точки.*

Прискорення є величина векторна. При прямолінійному русі точки вектор швидкості завжди збігається з траєкторією і тому вектор зміни швидкості також збігається з траєкторією.

Відомо, що прискоренням є зміна швидкості в одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу  $\Delta t$  швидкість точки змінилася на  $\Delta v$ , то середнє прискорення  $a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Середнє прискорення не дає уявлення про дійсне прискорення в кожен даний момент часу (дійсне прискорення інакше називають миттєвим). Чим менше проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до достеменного. Дійсне прискорення є межа, до якої прямує середнє прискорення при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}$ .



Таким чином, враховуючи, що  $v = \partial s / \partial t$ , отримаємо  $a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ .

Дійсне прискорення в прямолінійному русі дорівнює першій похідній швидкості або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

**Приклад 2.4.** Точка рухається прямолінійно згідно із законом  $s = t^4 + 2t$  ( $s$  – в метрах,  $t$  – у секундах). Знайти її середнє прискорення в проміжку між моментами  $t_1=5$  с,  $t_2=7$  с, а також її дійсне прискорення в момент  $t_3=6$  с.

*Розв'язання.* Спочатку визначаємо швидкість точки:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = 4t^3 + 2.$$

Підставляючи сюди замість  $t$  його значення  $t_1=5$  с і  $t_2=7$  с, знаходимо:

$$v_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502 \text{ м/с},$$

$$v_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1374 \text{ м/с}.$$

Отже, приріст швидкості за даний проміжок часу  $\Delta t=7-5=2$  с буде

$$\Delta v = v_7 - v_5 = 1374 - 502 = 872 \text{ м/с}.$$

Середнє прискорення точки

$$a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436 \text{ м/с}^2.$$

Щоб визначити дійсне прискорення точки, знаходимо похідну від швидкості за часом:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = 12t^2.$$

Підставляючи сюди замість  $t$  значення  $t_3=6$  с, отримаємо

$$a_6 = 12 \cdot 6 = 432 \text{ м/с}^2.$$

### **2.1.6 Прискорення точки в криволінійному русі**

*При русі точки по криволінійній траєкторії швидкість міняє свій напрям.*

Уявімо собі точку  $M$ , яка за час  $\Delta t$ , рухаючись по криволінійній траєкторії, перемістилася в положення  $M_1$  (рис. 2.6).

Вектор приросту (зміни) швидкості позначимо  $\Delta v$ , тоді  $\Delta v = v_1 - v$ .

Для знаходження вектора  $\Delta v$  перенесемо вектор  $v_1$  у точку  $M$  і побудуємо трикутник швидкостей. Визначимо вектор середнього прискорення:  $a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

Вектор  $a_{cp}$  паралельний вектору  $\Delta v$ , оскільки від ділення векторної величини на скалярну напрям вектора не змінюється. Вектор дійсного прискорення є межа, до якої прямує відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли останній прямує до нуля:  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ .

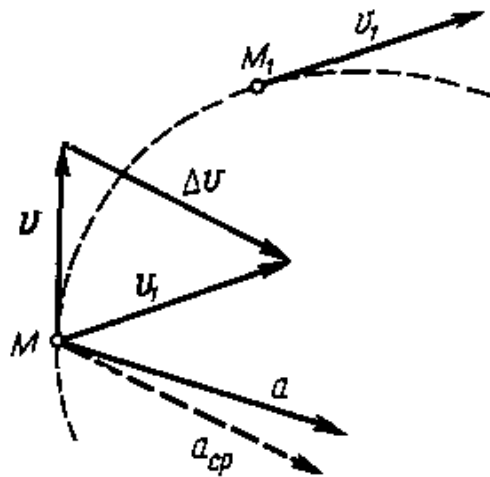


Рисунок 2.6

Таку межу називають векторною похідною. Таким чином, дійсне прискорення точки в криволінійному русі дорівнює векторній похідній швидкості за часом.

З рис. 2.6 видно, що вектор прискорення в криволінійному русі завжди направлений у бік угнутості траєкторії.

### 2.1.7 Поняття про кривину кривих ліній

Як побачимо в наступному розділі, прискорення точки в криволінійному русі залежить від кривини її траєкторії.

Розглянемо криволінійну траєкторію точки  $M$  (рис. 2.7, а). Кут  $\Delta\varphi$  між дотичними до кривої в двох сусідніх точках називається кутом суміжності.

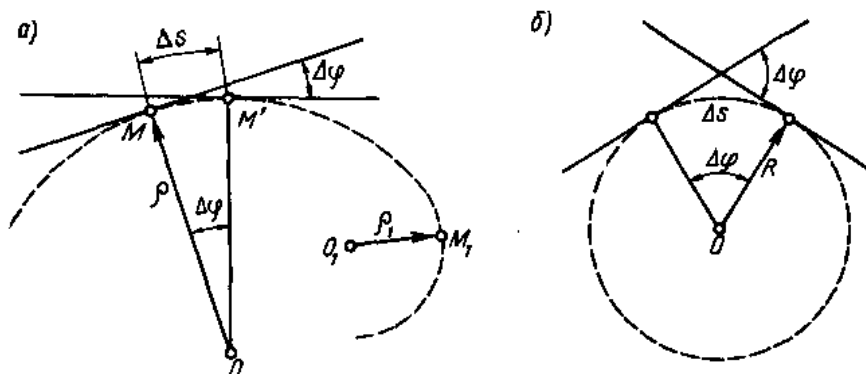


Рисунок 2.7

Кривиною кривої в даній точці називається межа відношення кута суміжності до відповідної довжини  $\Delta s$  дуги, коли остання прямує до нуля.

Позначимо кривину  $k$ , тоді  $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s}$ .

Розглянемо коло радіусу  $R$  (рис. 2.7, б). Оскільки  $\Delta s = R\Delta\phi$ , то

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{R\Delta\phi} = \frac{1}{R}.$$

Отже, кривина кола в усіх точках однакова і дорівнює  $k = \frac{1}{R}$ .

Для кожної точки даної кривої можна підібрати таке коло, кривина якого дорівнює кривині кривої в даній точці. Радіус  $\rho$  такого кола називається радіусом кривини кривої в даній точці, а центр цього кола називається центром кривини.

Отже, кривина кривої в даній точці є величина, зворотна радіусу кривини в цій самій точці:  $k = \frac{1}{\rho}$ .

Очевидно, що кривина прямої лінії дорівнює нулю, а радіус кривини дорівнює нескінченності:  $k = 0$ ;  $\rho = \frac{1}{k} = \infty$ .

### 2.1.8 Теорема про проекцію прискорення на дотичну і нормаль

Проекція повного прискорення на нормаль до траєкторії називається нормальним прискоренням; проекція повного прискорення на дотичну до траєкторії називається дотичним прискоренням. Дотичне прискорення інколи називають тангенціальним.

**Теорема.** Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, що ділиться на радіус кривини траєкторії в даній точці, дотичне прискорення – першій похідній швидкості за часом.

Нехай заданий плоский рух точки  $M$  по траєкторії  $AB$  (рис. 2.8). За час  $\Delta t$  точка перейшла з положення  $M$  у положення  $M_1$ , та пройшла при цьому шлях  $\Delta s = \cup MM_1$ .

Вектор приросту швидкості за час  $\Delta t$  дорівнює  $\Delta v = v_1 - v$ .

Визначимо вектор середнього прискорення:  $a_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ; відкладемо цей вектор з точки  $M$  паралельно вектору  $\Delta v$ . Спроектуємо вектор  $a_{cp}$  на дотичну і нормаль, точку  $D$  також спроектуємо на дотичну.

Розглянемо подібні трикутники  $CDF$  і  $MKH$ . З подібності цих трикутників

маємо  $\frac{HK}{FD} = \frac{MH}{CF} = \frac{a_{cp}}{\Delta v} = \frac{\Delta v}{\Delta t \Delta v} = \frac{1}{\Delta t}$ , звідки  $HK = \frac{FD}{\Delta t}$ ,  $MH = \frac{CF}{\Delta t}$ .

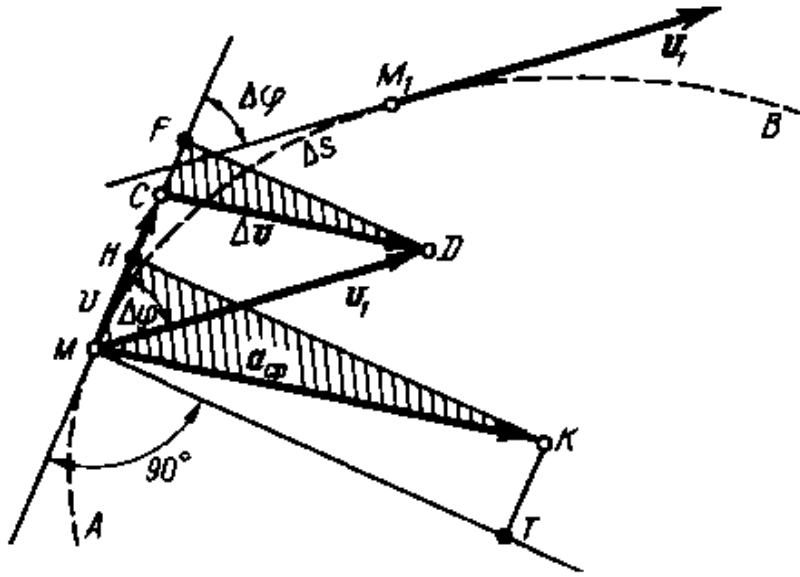


Рисунок 2.8

Перейдемо до межі при  $\Delta t$ , що наближається до нуля (при цьому  $\Delta\phi$  і  $\Delta s$  також прямує до нуля):  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} HK = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = a_n$  (нормальне прискорення),

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} MH = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = a_t \text{ (дотичне прискорення).}$$

Обчислимо першу межу при  $\Delta t$ , що наближається до нуля:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{FD}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v_1 \sin \Delta\phi}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( v_1 \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{\rho},$$

оскільки  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v$ ,  $\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta\phi}{\Delta\phi} = 1$ ,  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\partial s}{\partial t} = v$ .

Обчислимо другу межу при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:

$$\begin{aligned} a_t &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{CF}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\phi - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2} \right) - v}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v_1 - v}{\Delta t} - 2 \frac{v_1 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( v_1 \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\Delta\phi/2} \sin \frac{\Delta\phi}{2} \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{\partial v}{\partial t}, \end{aligned}$$

оскільки  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_1 = v$ ,  $\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\Delta \phi / 2} = 1$ ,  $\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \phi}{2} = 0$ ,  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\rho}$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v. \text{ Отже, } a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_t = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Теорема доведена.

Аналізуючи формули дотичного і нормального прискорень, можна побачити, що якщо немає зміни швидкості за модулем, то  $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ ; якщо немає зміни швидкості за напрямом (прямолінійний рух), то  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ . Звідси випливає, що дотичне прискорення характеризує зміна швидкості лише за модулем, а нормальне – лише за напрямом.

Знаючи дотичне і нормальне прискорення, можна обчислити модуль і напрям повного прискорення за формулою: модуль прискорення  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ ; напрям прискорення  $\cos(a_t, a) = \frac{a_t}{a}$ .

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як складові повного прискорення, тобто як векторні величини. Відомо, що якщо осі взаємно перпендикулярні, то проекції вектора на ці осі і його складові, направлені по цих осях, рівні за модулем.

Дотичне, нормальне і повне прискорення зображені на рис. 2.9.

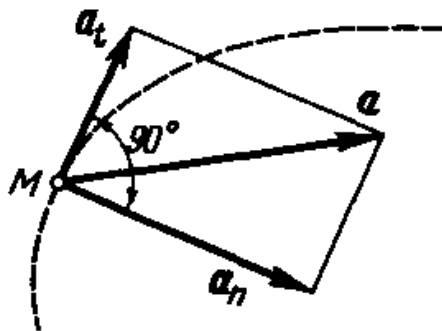


Рисунок 2.9

Якщо  $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} > 0$ , то вектори дотичного прискорення і швидкості направлені в один бік і рух буде прискореним. Якщо  $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} < 0$ , то вектор

дотичного прискорення направлений убік, протилежний до вектора швидкості, і рух буде сповільненим.

Вектор нормального прискорення завжди направлений до центру кривини, тому це прискорення інакше називають доцентровим.

**Приклад 2.5.** Точка ободу маховика в період розгону рухається згідно з рівнянням  $s=0,1t^3$  ( $t$  – в секундах,  $s$  – в метрах). Радіус маховика дорівнює  $r=2$  м. Визначити нормальне і дотичне прискорення точки в мить, коли її швидкість  $v=30$  м/с.

*Розв'язання.* Для визначення швидкості обчислимо похідну шляху за часом:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = 0,3t^2,$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{v}{0,3}} = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с.}$$

Для цього моменту слід визначити нормальне і дотичне прискорення точки. Знаходимо дотичне прискорення як похідну швидкості за часом:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0,6t.$$

Підставляємо у вираз для дотичного прискорення значення  $t=10$  с:

$$a_t = 0,6 \cdot 10 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення точки визначаємо за формулою

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Для моменту часу  $t=10$  с знаходимо

$$a_n = \frac{30^2}{2} = 450 \text{ м/с}^2.$$

### 2.1.9 Види руху точки залежно від прискорень

Аналізуючи виведені формули дотичного і нормального прискорень, можна встановити такі види руху точки:

–  $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$ ,  $a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0$ , в цьому випадку рух нерівномірний ( $v \neq \text{const}$ )

криволінійний ( $\rho \neq \infty$ );

$$- a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0, \text{ в цьому випадку рух рівномірний } (v = \text{const})$$

криволінійний ( $p \neq \infty$ );

$$- a_t = \frac{\partial v}{\partial t} \neq 0, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = 0, \text{ в цьому випадку рух нерівномірний } (v \neq \text{const})$$

прямолінійний ( $p = \infty$ );

$$- a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \text{const} \neq 0, \text{ в цьому випадку рух рівнозмінний (криволінійний,}$$

якщо  $a_n \neq 0$ , прямолінійний, якщо  $a_n = 0$ );

$$- a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = 0, \text{ в цьому випадку рух рівномірний}$$

прямолінійний, який є єдиним виглядом руху без прискорення.

### 2.1.10 Формули і графіки рівномірного руху точки

Як було встановлено раніше, при рівномірному русі дотичне прискорення

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \text{ Отже, модуль швидкості точки при рівномірному русі є величина}$$

постійна:  $\frac{\partial s}{\partial t} = v = \text{const}$ . Звідси  $\partial s = v \partial t$ .

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$\int_{s_0}^s \partial s = \int_0^t v \partial t, \quad s - s_0 = vt, \quad (2.2)$$

де  $s_0$  – початкова відстань.

Отже, формули рівномірного руху точки мають такий вигляд:

$$v = \text{const}, \quad s = s_0 + vt. \quad (2.3)$$

Графіки швидкості і шляху рівномірного руху показані на рис. 2.10, причому передбачається, що  $s_0 = 0$ .

Неважко показати, що швидкість точки при рівномірному русі пропорційна тангенсу кута  $\alpha$  між прямолінійним графіком цього руху і позитивним напрямом осі часу:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\mu_s \cdot AB}{\mu_t \cdot OB} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \text{tg} \alpha, \quad (2.4)$$

де  $\mu_s$  – масштаб шляху, що виражається в м/мм;  $\mu_t$  – масштаб часу, що виражається в с/мм.

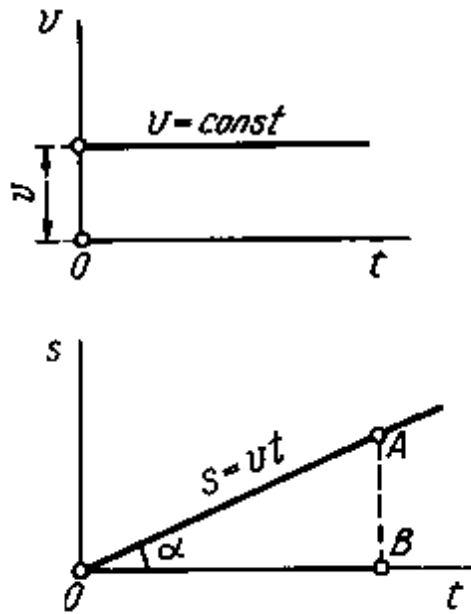


Рисунок 2.10

**Приклад 2.6.** Штучний супутник, має швидкість  $v$ , що дорівнює 8 км/с, а період обертання, дорівнює 1 год. 36 хв., або 5760 с. Визначити висоту польоту супутника над поверхнею Землі, вважаючи його орбіту колом, а рух рівномірним. Радіус Землі  $R=6370$  км.

*Розв'язання.* Позначимо  $r$  – радіус орбіти супутника, проведений з центру Землі;  $h$  – висота польоту супутника над поверхнею Землі, яку необхідно визначити (рис. 2.11).

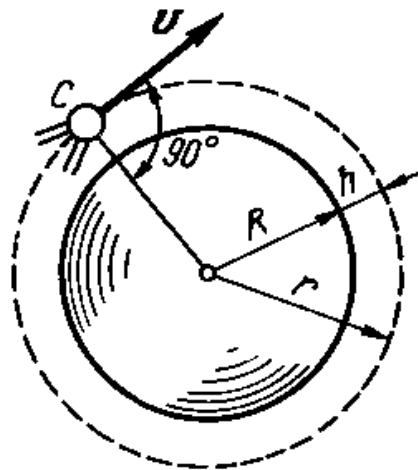


Рисунок 2.11

Шлях  $s$ , що пройдений супутником за один період обертання, дорівнює добутку часу  $T$ , витраченого на один оберт, на швидкість  $v$  руху супутника.



З іншого боку, цей самий шлях дорівнює довжині кола радіусу  $r$ . Таким чином,

$$s = vT = 2\pi r, \text{ звідки } r = \frac{vT}{2\pi} = \frac{8 \cdot 10^3 5760}{2\pi} = 7340 \cdot 10^3 \text{ м} = 7340 \text{ км.}$$

Далі знаходимо висоту польоту супутника над поверхнею Землі, що необхідно визначити:  $h = r - R = 7340 - 6370 = 970 \text{ км.}$

### 2.1.11 Формули і графіки рівнозмінного руху точки

Як було встановлено раніше, при рівнозмінному русі дотичне прискорення є величина постійна:  $a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \text{const}$ . Звідси  $\partial v = a_t \partial t$ .

Інтегруючи цей вираз, отримаємо

$$\int_{v_0}^v \partial v = \int_0^t a_t \partial t, v - v_0 = a_t t, \quad (2.5)$$

де  $v_0$  – початкова швидкість.

Формула швидкості в остаточному вигляді

$$v = v_0 + a_t t. \quad (2.6)$$

Оскільки

$$\partial s = v \partial t, \quad (2.7)$$

то, інтегруючи цей вираз, отримаємо формулу переміщень (відстаней від початкового положення)

$$\int_{s_0}^s \partial s = \int_0^t (v + a_t t) \partial t, s - s_0 = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}, \quad (2.8)$$

де  $s_0$  – початкова відстань.

Вважаючи  $s_0=0$ , запишемо формули рівнозмінного руху точки:

$$a_t = \text{const}, v = v_0 + a_t t, s = v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}. \quad (2.9)$$

Якщо точка здійснює криволінійний рух, то вона має нормальне прискорення

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (2.10)$$

а модуль її повного прискорення визначиться за формулою

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \quad (2.11)$$

Якщо точка рухається прямолінійно, то  $a_n=0$ , а повне прискорення дорівнює дотичному:  $a=a_t$ .

У рівноприскореному русі напрям вектора прискорення збігається з напрямом вектора швидкості; у рівноуповільненому русі вектор прискорення направлений убік, зворотний вектору швидкості.

Формулу переміщень (відстаней від початку відліку) перетворимо, виключивши з неї час  $t$ . З формули швидкості маємо

$$t = \frac{v - v_0}{a_t}, \quad (2.12)$$

тоді

$$s = v_0 \frac{v - v_0}{a_t} + \frac{a_t}{2} \left( \frac{v - v_0}{a_t} \right)^2. \quad (2.13)$$

Після перетворень отримаємо

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_t}. \quad (2.14)$$

У деяких випадках при вирішенні завдань зручно користуватися формулою переміщень рівнозмінного руху в іншому вигляді.

Оскільки

$$s = v_{cp} t, \text{ то } s = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (2.15)$$

Графіки прискорення, швидкості і переміщення точки при прямолінійному рівнозмінному русі наведено на рис. 2.12.

Крива переміщень (відстаней) при рівнозмінному русі є параболою.

Відомо, що якщо побудувати графік якоїсь функції  $y=f(x)$ , то в будь-якій точці цього графіка

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.16)$$

де  $\alpha$  – кут, який утворює в цій точці дотична до кривої з позитивним напрямом осі абсцис.

Застосовуючи це положення до зображених на рис. 2.12 графіків руху точки і враховуючи масштаби шляху і часу, отримаємо

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (2.17)$$

де  $\alpha_1$  – кут між дотичною до графіка переміщення і позитивним напрямом осі часу;  $\mu_s$  – масштаб шляху, що виражається в м/мм;  $\mu_t$  – масштаб часу, що виражається в с/мм.

З викладеного випливає, що якщо дотична до кривої переміщень складає гострий кут з позитивним напрямом осі часу, то у цей момент швидкість точки

позитивна; при тупому куті швидкість точки у цей момент негативна. Якщо дотична в якійсь точці кривої переміщень паралельна осі часу, то швидкість точки у цей момент дорівнює нулю (рис. 2.12).

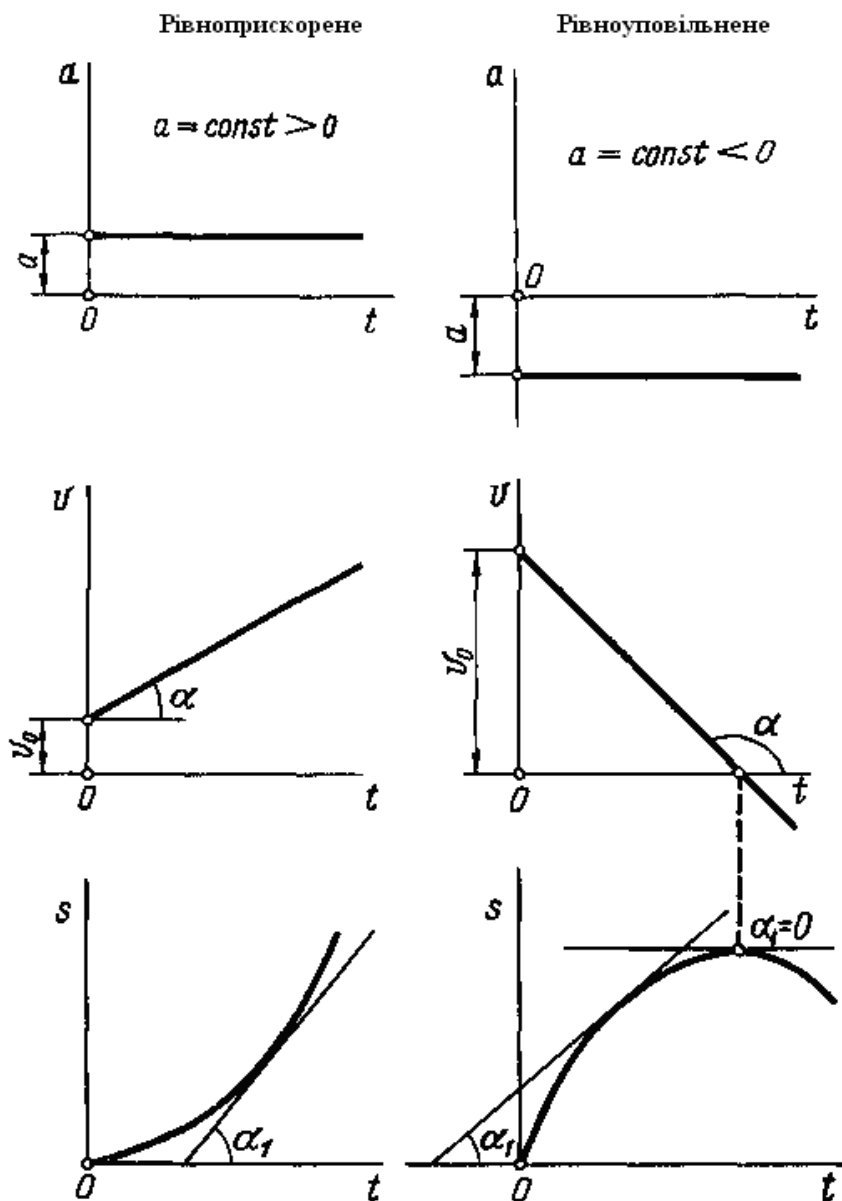


Рисунок 2.12

Аналогічний зв'язок є між графіками швидкості і прискорення прямолінійного руху точки, а саме

$$a = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.18)$$

де  $\alpha$  – кут між дотичною до графіка швидкості і позитивним напрямом осі часу;  $\mu_v$  – масштаб швидкості, що виражається в (м/с)/мм;  $\mu_t$  – масштаб часу, що виражається в с/мм.

Крива переміщень при рівноприскореному русі має опуклість, направлену вниз (друга похідна переміщення за часом позитивна), а при рівноуповільненому русі – опуклість, направлену вгору (друга похідна переміщення за часом негативна).

**Приклад 2.7.** Виріб скочується по похилій поверхні з прискоренням  $a=0,2$  м/с. Яку швидкість розвине виріб у кінці похилої гори, довжина якої 250 м? Початкова швидкість виробу  $v_0=1$  м/с.

*Розв'язання.* Для визначення швидкості руху виробу в кінці похилої поверхні застосуємо формулу

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

З цієї формули знайдемо

$$v^2 = 2as + v_0^2.$$

Підставляючи значення величин, отримаємо

$$v = \sqrt{2as + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot 0,2 \cdot 250 + 1} = \sqrt{101} = 10,05 \text{ м/с.}$$

### 2.1.12 Теорема про проекцію швидкості на координатну вісь

Якщо рух точки заданий дійсним чином, то швидкість її знаходять як першу похідну переміщення за часом; якщо рух точки заданий в координатній формі, то за допомогою теореми про проекцію швидкості на координатну вісь.

**Теорема.** Проекція швидкості на координатну вісь дорівнює першій похідній від відповідної координати за часом.

Нехай плоский рух точки  $M$  задано координатним способом рівняннями руху

$$x = f(t), y = f_1(t). \quad (2.19)$$

За час  $\Delta t$  точка перейшла з положення  $M$  у положення  $M_1$  (рис. 2.13). Якби точка рухалася по хорді рівномірно, то її умовна швидкість дорівнювала б

$$v_n = \frac{MM_1}{\Delta t}. \quad (2.20)$$

Спроекуємо вектор  $v_n$  і точку  $M$  на вісь  $x$ , тоді

$$v_{nx} = v_n \cos(v_n, x) = \frac{MM_1}{\Delta t} \cos(v_n, x). \quad (2.21)$$

Оскільки

$$MM_1 \cos(v_n, x) = \Delta x, \quad \text{то} \quad v_{nx} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.22)$$

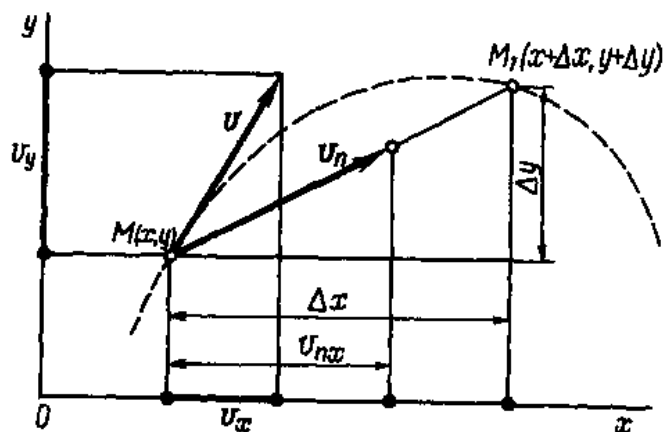


Рисунок 2.13

Перейдемо до межі при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{nx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.23)$$

Оскільки швидкість  $v_n$  у межі дає дійсну швидкість, то межа, що стоїть в лівій частині рівності, дає проекцію дійсної швидкості на вісь  $x$ , а в правій частині є перша похідна від абсциси  $x$  за часом, отже,

$$v_x = \partial x / \partial t. \quad (2.24)$$

Теорема доведена.

Аналогічно,

$$v_y = \partial y / \partial t. \quad (2.25)$$

Знаючи дві проекції швидкості, можна знайти її модуль і напрям за формулами:

- модуль швидкості  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ;
- напрям швидкості  $\cos(v, x) = v_x / v$ .

**Приклад 2.8.** Знайти модуль швидкості середини  $M$  шатуна кривошипно-повзунного механізму і швидкості повзуна  $B$ , якщо  $OA=AB=0,8$  м, а кут  $\phi = \omega t$ , де  $\omega$  – постійна величина, а  $t$  виражається в секундах (рис. 2.3).

*Розв'язання.* Для розв'язання завдання скористаємося рівняннями руху точки  $M$  і повзуна  $B$ , отриманими в прикладі 2.1:

$$\begin{aligned} x_M &= 1,2 \cos \phi = 1,2 \cos \omega t, \text{ м;} \\ y_M &= 0,4 \sin \phi = 0,4 \sin \omega t, \text{ м;} \\ x_B &= 1,6 \cos \phi = 1,6 \cos \omega t, \text{ м.} \end{aligned}$$

Для визначення швидкості точки  $M$  застосуємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь, внаслідок чого отримаємо:

$$v_{M_x} = \frac{\partial x_M}{\partial t} = -1,2\omega \sin \omega t ,$$

$$v_{M_y} = \frac{\partial y_M}{\partial t} = 0,4\omega \cos \omega t .$$

Визначимо модуль швидкості точки  $M$ :

$$v_M = \sqrt{v_{M_x}^2 + v_{M_y}^2} = \sqrt{(1,2\omega \sin \omega t)^2 + (0,4\omega \cos \omega t)^2} = 0,4\omega \sqrt{8 \sin^2 \omega t + 1} , \text{ м/с.}$$

Оскільки повзун  $B$  рухається прямолінійно, то для визначення модуля швидкості його руху продиференціюємо рівняння руху за часом, внаслідок чого отримаємо

$$v_B = \partial x_B / \partial t = -1,6 \sin \omega t , \text{ м/с.}$$

### 2.1.13 Теорема про проекцію прискорення на координатну вісь

Якщо рух точки заданий дійсним способом, то її прискорення визначають за допомогою теореми про проекцію прискорення на дотичну і нормаль; якщо рух точки заданий координатним способом, – то за допомогою теореми про проекцію прискорення на координатну вісь.

**Теорема.** Проекція прискорення на координатну вісь дорівнює другій похідній від відповідної координати за часом.

З доведеної в попередньому розділі теореми видно, що проекція швидкості точки на координатну вісь дорівнює швидкості проекції точки на ту саму вісь.

Аналогічне положення буде справедливе і для прискорення точки, тобто проекція прискорення точки на координатну вісь дорівнює прискоренню проекції точки на ту саму вісь. Оскільки проекції точок на осі рухаються

прямолінійно, то, згідно з 2.1.5,  $a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ ,  $a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ .

Знаючи дві проекції прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення за формулами:

$$- \text{модуль прискорення} = 0,4\omega a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} ;$$

$$- \text{напрямок прискорення} \cos(a, x) = a_x / a .$$

**Приклад 2.9.** Рух точки визначається рівнянням  $x = 20t^2 + 5$ ,  $y = 15t^2 - 3$  ( $t$  – у секундах;  $x$  і  $y$  – в метрах). Визначити модуль і напрям швидкості і прискорення у момент часу  $t=2$  с.

*Розв'язання.* Для визначення модуля і напрямку швидкості точки застосуємо теорему про проекцію швидкості на координатну вісь. Продиференціювавши за часом рівняння руху точки, отримаємо:

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = 40t, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = 30t.$$

Модуль швидкості точки визначимо за формулою

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40t)^2 + (30t)^2} = 50t.$$

Підставивши значення часу  $t=2$  с, отримаємо

$$v_2 = 50 \cdot 2 = 100 \text{ м/с.}$$

Направляючий косинус визначимо за формулою

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{40t}{50t} = 0,8.$$

Для визначення модуля і напрямку прискорення точки застосуємо теорему про проекцію прискорення на координатну вісь. Другий раз продиференціювавши за часом рівняння руху точки, отримаємо:

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 40, \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 30.$$

Модуль прискорення точки визначиться за формулою

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ м/с}^2.$$

Направляючий косинус визначиться за формулою

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

Кут між векторами  $v$ ,  $a$  і віссю  $x$  буде кутом першої чверті, оскільки  $\sin(v, x) = \sin(a, x) = 0,6$  є величина позитивна.

Оскільки напрям вектора швидкості у будь-який момент часу залишається незмінним, той рух точки є прямолінійним і повне її прискорення можна визначити за формулою

$$a = \frac{v}{\partial t} = \frac{\partial(50t)}{\partial t} = 50 \text{ м/с}^2.$$

## 2.2 Простіші рухи твердого тіла

### 2.2.1 Поступальний рух

Розрізняють два види простіших рухів твердого тіла: поступальний рух і обертання довкола нерухомої осі.

Рух тіла, за якого будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму первинному положенню, називається поступальним. Уявлення про поступальний рух можна отримати, спостерігаючи рух кузова вагону трамвая на прямолінійній ділянці шляху, поступально рухається стіл повздовжньо-стругального верстата, поршень стаціонарного двигуна внутрішнього згорання тощо.

**Теорема.** При поступальному русі всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Нехай за час  $\Delta t$  тіло, рухаючись поступально, перемістилося з положення  $AB$  у положення  $A_1B_1$  причому довільна точка  $A$  пройшла шлях  $\Delta s_A$ , а інша довільна точка  $B$  пройшла шлях  $\Delta s_B$  (рис. 2.13):

$$\cup AA_1 = \Delta s_A, \cup BB_1 = \Delta s_B. \quad (2.26)$$

З'єднаємо точки  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$  хордами. Оскільки  $AB=A_1B_1$  (тіло тверде) і  $AB \parallel A_1B_1$  (рух поступальний), то фігура  $ABB_1A_1$  є паралелограм. Отже, хорда  $AA_1$  рівна і паралельна хорді  $BB_1$ .

Візьмемо проміжне положення прямої  $A_2B_2$  і з'єднаємо кінці цього відрізка з точками  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$ .

Аналогічно попередньому можна довести, що вписані ламані лінії  $AA_2A_1$  і  $BB_2B_1$  мають попарно рівні і паралельні сторони. Якщо безконечне число разів подвоювати число сторін цих ламаних ліній, то в межі вони дадуть дуги  $\Delta s_A$  і  $\Delta s_B$ . Але, оскільки ці ламані лінії завжди однакові, то вони однакові і в межі, отже, траєкторії довільних точок  $A$  і  $B$  будуть однакові:  $\cup \Delta s_A = \cup \Delta s_B$ .

Оскільки точки  $A$  і  $B$  вибрані абсолютно довільно, то, отже, траєкторії всіх точок тіла будуть однакові.

Доведемо тепер, що швидкості і прискорення точок  $A$  і  $B$ , а отже, і всіх точок тіла в кожен даний момент часу рівні. Оскільки вектори переміщень точок  $A$  і  $B$  рівні між собою:  $AA_1=BB_1$ , то, розділивши обидві частини цієї векторної рівності на  $\Delta t$  і перейшовши до межі, при  $\Delta t$ , що прямує до нуля,

$$\text{отримаємо } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t}.$$

Ці межі дають вектори швидкостей точок, отже,  $v_A = v_B$ .

Перенесемо вектори швидкостей  $v_{A_1}$  і  $v_{B_1}$  у точці  $A$  і  $B$  і знайдемо вектори приросту швидкостей  $\Delta v_A$  і  $\Delta v_B$ . Розглянемо трикутники  $AMN$  і  $BM_1N_1$ . Ці трикутники однакові, і їхні рівні сторони попарно паралельні, отже,

$$\Delta v_A = \Delta v_B. \quad (2.27)$$



Розділимо обидві частини цієї векторної рівності на  $\Delta t$  і перейдемо до межі, яка при  $\Delta t$ , прямує до нуля, внаслідок чого отримуємо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_B}{\Delta t} \quad (2.28)$$

або

$$a_A = a_B. \quad (2.29)$$

Теорема доведена.

Таким чином, поступальний рух твердого тіла визначається рухом однієї з його точок, отже, всі формули кінематики точки застосовні для тіла, що рухається поступально.

**Приклад 2.10.** Ланки 1 і 2 креслярського механізму (рис. 2.14) можуть повертатися відносно опор  $A$  і  $C$  і шарнірно з'єднані з диском 3; диск і лінійка 6 шарнірно з'єднані ланками 4 і 5. Довести, що диск 3 і лінійка 6 можуть здійснювати поступальний рух, якщо  $AB=CD$ ,  $AC=BD$ ,  $EF=GH$ ,  $EG=FH$ .

*Розв'язання.* Розглянемо чотирикутник  $ABDC$ . Оскільки протилежні сторони цього чотирикутника за умовами завдання попарно рівні, то він є паралелограмом. Звідси випливає, що при будь-якому переміщенні ланок 1 і 2 сторона  $BD$  залишається паралельній нерухомій стороні  $AC$ . Таким чином, згідно з визначенням поступального руху, сторона  $BD$  і жорстко пов'язаний з нею диск можуть переміщатися лише поступально. Так само лише поступально може переміщатися і відрізок  $EG$ , жорстко пов'язаний з диском 3.

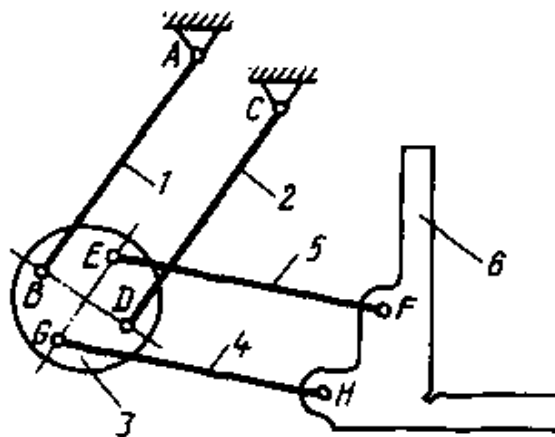


Рисунок 2.14

Далі розглянемо чотирикутник  $EFHG$ , який за умовою є паралелограмом при будь-якому положенні механізму. Отже, сторона  $FH$  рухається так само, як

сторона  $EG$ , тобто поступально. Очевидно, що лінійка  $b$ , жорстко пов'язана з стороною  $FH$ , також може рухатися лише поступально.

У наведеному прикладі передбачалося, що ланками механізму є абсолютно тверді тіла.

### 2.2.2 Обертання довкола нерухомої осі

Рух, при якому принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається обертальним; пряма лінія, що з'єднує ці дві точки, називається віссю обертання. У визначенні обертального руху говориться про незмінну систему, тому що вісь обертання може знаходитися і поза тілом.

Розглянемо диск, що обертається довкола осі, перпендикулярної площині креслення (рис. 2.15). Точка  $O$  – слід цієї осі. Очевидно, що траєкторії точок тіла, що обертається, є кола різних радіусів, розташовані на поверхні, перпендикулярній осі обертання, з центрами, що лежать на цій осі.

Нехай за час  $t$  диск обернувся на кут  $\varphi$ . При цьому точка  $A$  пройшла шлях  $s_A$ , а точка  $B$  – шлях  $s_B$ . Оскільки точки, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, за один і той самий проміжок часу проходять різні шляхи, то, отже, вони мають різні швидкості і прискорення.

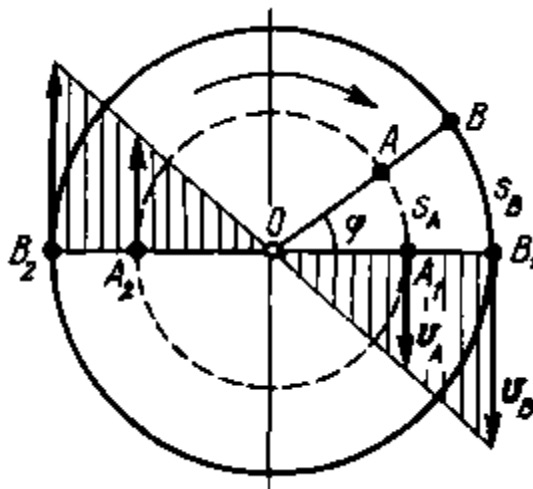


Рисунок 2.15

Отже, при обертальному русі тіла точки його, що знаходяться на різній відстані від осі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Звідси випливає, що лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість і прискорення не можуть характеризувати обертальний рух тіла в цілому. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом  $\varphi$ , на який обернулося тіло за даний проміжок часу. Цей кут називається кутовим переміщенням тіла. Кутове переміщення виражається в радіанах (рад) або обертах (об); у

останньому випадку кутове переміщення позначають  $N$ . Для встановлення залежності між  $\phi$  і  $N$  складемо пропорцію:

$$\begin{aligned} 1 \text{ об} &= 2\pi \text{ рад,} \\ N \text{ об} &= \phi \text{ рад,} \end{aligned} \quad (2.30)$$

звідки

$$\phi = 2\pi N, \text{ рад,} \quad (2.31)$$

де  $N$  – кількість обертів тіла.

Кутове переміщення тіла є функція часу, отже, закон обертального руху в найзагальнішому вигляді запишеться так:

$$\phi = f(t). \quad (2.32)$$

З рис. 2.15 видно, що шлях будь-якої точки тіла, що обертається

$$s = r\phi, \quad (2.33)$$

де  $r$  – відстань точки від осі обертання.

Швидкість будь-якої точки тіла визначається так:

$$v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (r\phi)}{\partial t} = r \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.34)$$

( $r$  винесли за знак похідної, оскільки для даної точки твердого тіла ця величина стала).

Вираз  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  позначимо  $\omega$  і назвемо кутовою швидкістю. Кутова швидкість є кінематична міра руху тіла, що обертається, що характеризує швидкість його кутового переміщення:

$$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом.

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, запишеться так:  $v = \omega r$ .

Швидкість точки в кожен момент часу прямо пропорційна її відстані від осі обертання, отже, графік швидкостей точок, наприклад, діаметра  $B_1B_2$ , буде двома трикутниками (рис. 2.15). Очевидно, що вектор швидкості точки тіла, що обертається, направлений перпендикулярно радіусу, що сполучає цю точку з віссю обертання. Якщо точка лежить на поверхні тіла, що обертається, то її швидкість називають коловою.

У техніці швидкість обертання виражають в обертах за хвилину, позначають буквою  $n$  і називають частотою обертання. Встановимо залежність

між кутовою швидкістю і частотою обертання, вираженими відповідно в рад/с і хв.<sup>-1</sup>. Запишемо пропорцію:

$$\begin{aligned} \omega \text{ рад} &- 1 \text{ с}, \\ 2\pi n \text{ рад} &- 60 \text{ с}. \end{aligned}$$

З пропорції знайдемо

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/с},$$

де  $n$  – частота обертання тіла, об/хв або хв.<sup>-1</sup>.

**Приклад 2.11.** Скільки часу (хв.) продовжиться обточування вала діаметром  $d=180$  мм і завдовжки  $l=1000$  мм, якщо обточування здійснюється за один прохід різця; подача різця за один оберт виробу  $s_{o6}=0,5$  мм/об, а швидкість різання  $v=135$  м/хв.

*Розв'язання.* Перш за все визначимо кутову швидкість  $\omega$  і частоту обертання  $n$  вала:

$$\omega = \frac{v}{0,5d} = \frac{135}{0,5 \cdot 0,18 \cdot 60} = 25 \text{ рад/с},$$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 25}{3,14} = 238 \text{ хв}^{-1}.$$

Далі визначимо подачу різця за хвилину:

$$s_{xв} = s_{o6}n = 0,5 \cdot 238 = 119 \text{ мм/хв} = 0,119 \text{ м/хв}.$$

Розділивши довжину оброблюваної поверхні на хвилину подачі різця, визначимо машинний час, необхідний для обточування вала:

$$t = \frac{l}{s_{xв}} = \frac{1}{0,119} = 8,4 \text{ хв}.$$

**Приклад 10.3.** Необхідно запустити 3 штучні супутники Землі так, щоб вони утворили рівносторонній трикутник, нерухомий по відношенню до Землі. З якою швидкістю мають рухатися супутники по круговій орбіті, розташованій в площині екватора, якщо відомо, що вони літатимуть на висоті  $h=35800$  км? Радіус Землі на екваторі  $R=6370$  км (рис. 2.16). Визначимо також колову швидкість точки на екваторі.

*Розв'язання.* Якщо супутники будуть нерухомі по відношенню до Землі, то можна вважати, що разом із Землею вони складають незмінну систему.

Визначимо колову швидкість  $v_A$  точки  $A$ , що знаходиться на екваторі Землі, за формулою  $v_A = \omega R$ .

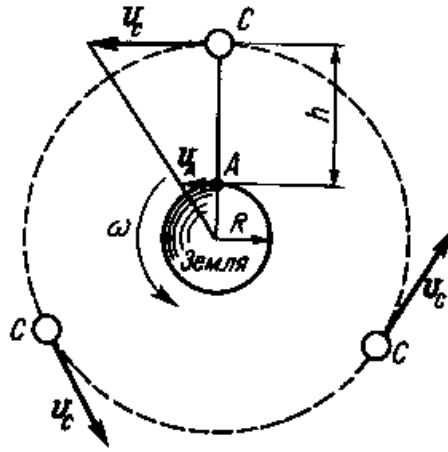


Рисунок 2.16

Кутова швидкість обертання Землі довкола своєї осі дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0,727 \cdot 10^{-4} \text{ рад/с.}$$

Тоді швидкість точки  $A$  дорівнюватиме

$$v_A = 0,727 \cdot 10^{-4} \cdot 6370 \cdot 10^3 = 463 \text{ м/с.}$$

Оскільки супутники складають разом із Землею незмінну систему, що обертається довкола земної осі, то швидкості точок цієї системи прямо пропорційні їх відстаням від осі обертання:

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{R+h}{R}.$$

Звідси визначимо шукану швидкість супутників:

$$v_C = \frac{v_A(R+h)}{R} = \frac{463 \cdot (6370 + 35800) \cdot 10^3}{6370 \cdot 10^3} = 3060 \text{ м/с.}$$

### 2.2.3 Різні види обертального руху

*Рівномірний обертальний рух.* Якщо тіло обертається довкола нерухомої осі з постійною кутовою швидкістю, то рух називається рівномірним. Формули рівномірного обертального руху:  $\omega = const, \phi = \omega t$ .

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, що рівномірно обертається, визначають так:

$$a_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial(\omega r)}{\partial t} = r \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r,$$

$$a_t = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = \omega^2 r.$$

**Приклад 2.13.** Махове колесо обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $4\pi$  рад/с. Скільки обертів колесо зробить за 2 хв?

*Розв'язання.* Застосуємо формулу рівномірного обертального руху і визначимо кутове переміщення колеса за час  $t=2$  хв. $=120$  с:

$$\phi = \omega t = 4\pi \cdot 120 = 480\pi \text{ рад.}$$

Далі визначимо кількість обертів  $n$  тіла за той самий проміжок часу:

$$N = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{480\pi}{2\pi} = 240 \text{ об.}$$

*Нерівномірний обертальний рух.* Якщо кутова швидкість тіла, що обертається, з часом змінюється, то рух називається нерівномірним. У найзагальнішому вигляді формули нерівномірного обертального руху запишуться так:

$$\phi = f(t), \quad \omega = \partial\phi/\partial t.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного тіла, що обертається, визначають так:

$$a_t = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial(\omega r)}{\partial t} = r \frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

Вираз  $\partial\omega/\partial t$  позначають  $\alpha$  і називають кутовим прискоренням. Кутове прискорення є кінематична міра зміни кутової швидкості тіла, що обертається:

$$\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (2.36)$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній кутової швидкості або другій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутового прискорення:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{\phi}{t^2}. \quad (2.37)$$

Тепер можна записати формулу для визначення дотичного прискорення будь-якої точки тіла, що нерівномірно обертається а в такому вигляді:

$$a_t = \alpha r. \quad (2.38)$$

Нормальне прискорення визначається за такою формулою, як і у випадку рівномірного обертання, тобто

$$a_n = \omega^2 r. \quad (2.39)$$

Повне прискорення

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\alpha r)^2 + (\omega^2 r)^2}, \quad (2.40)$$

звідки

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}. \quad (2.41)$$

## Направляючий тангенс

$$\operatorname{tg}(a, a_n) = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha r}{\omega^2 r}, \quad (2.42)$$

звідки

$$\operatorname{tg}(a, a_n) = \frac{\alpha}{\omega^2}.$$

Якщо напрям кутового прискорення збігається з напрямом обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 2.17).

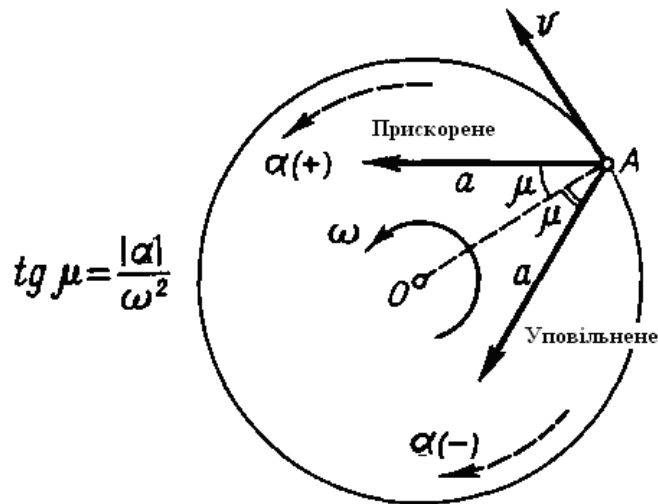


Рисунок 2.17

**Приклад 2.14.** Написати рівняння обертання диска парової турбіни під час запуску, якщо відомо, що кут  $\varphi$ , рад, повороту диска пропорційний куту, часу і при  $t=3$ с кутова швидкість дорівнює  $27\pi$  рад/с.

*Розв'язання.* Згідно з умовою, рівняння обертання диска парової турбіни під час запуску виглядатиме так:  $\varphi = bt^3$ .

Для визначення коефіцієнта пропорційності  $b$  продиференціюємо рівняння обертання диска, внаслідок чого отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega = \frac{\partial (bt^3)}{\partial t} = 3bt^2,$$

звідки

$$b = \frac{\omega}{3t^3}.$$

Підставивши в це рівняння значення часу і кутової швидкості, отримаємо

$$b = \frac{27\pi}{3 \cdot 3^3} = \pi.$$

Отже, рівняння руху диска турбіни має вигляд

$$\phi = \pi t^3.$$

*Рівнозмінний обертальний рух.* Якщо тіло обертається довкола нерухомої осі з постійним кутовим прискоренням, то рух називається рівнозмінним. Формули цього вигляду обертального руху можуть бути отримані таким самим способом, яким були виведені формули рівнозмінного руху точки, тобто за допомогою інтегрального числення.

Отже, якщо тверде тіло обертається довкола нерухомої осі рівнозмінно, то  $\alpha = \partial\omega/\partial t = \text{const}$ , звідки  $\partial\omega = \alpha\partial t$ .

Інтегруючи цю рівність за  $t$ , отримаємо

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \partial\omega = \int_0^t \alpha\partial t, \quad (2.43)$$

де  $\omega_0$  – початкова кутова швидкість. Остаточно отримаємо формулу кутової швидкості у такому вигляді:  $\omega = \omega_0 + \alpha t$ .

Далі виведемо формулу кутового переміщення. Оскільки під час будь-якого обертального руху  $\partial\phi/\partial t = \omega$ ,  $\partial\phi = \omega\partial t$ , то, інтегруючи цю рівність за  $t$ , отримаємо

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \partial\phi = \int_0^t \omega\partial t = \int_0^t (\omega_0 + \alpha t)\partial t = \int_0^t \omega_0\partial t + \int_0^t \alpha t\partial t, \\ \phi - \phi_0 = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}, \quad (2.44)$$

де  $\phi_0$  – початкове кутове переміщення.

Якщо  $\phi_0=0$ , то формула кутового переміщення матиме вигляд  $\phi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$ .

Отже, формули рівнозмінного обертального руху твердого тіла записуються так:

$$\alpha = \text{const}, \\ \omega = \omega_0 + \alpha t, \\ \phi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}. \quad (2.45)$$

З виведених формул можна отримати формули кутового переміщення у вигляді:

$$\phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} \text{ або } \phi = \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \quad (2.46)$$



**Приклад 2.15.** В інерційному акумуляторі маховик обертається в глибокому вакуумі з частотою 20000 рад/с. Представлений самому собі, він продовжує обертатися до повної зупинки протягом двох тижнів. Визначити кутове прискорення маховика, вважаючи його постійним.

*Розв'язання.* Визначимо початкову кутову швидкість маховика і час обертання:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 20000}{30} \text{ рад/с};$$

$$t = 2 \text{ нед.} \times 7 \text{ дн.} \times 86400 \text{ с.}$$

Розділивши початкову кутову швидкість на час, отримаємо кутове прискорення:

$$\alpha = \frac{-\pi \cdot 20000}{30 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 86400} = -0,00174 \text{ рад/с}^2.$$

Знак «-» показує, що обертання маховика було сповільненим.

#### **2.2.4 Порівняння формул кінематики для поступального і обертального руху**

Порівнюючи формули кінематики точки або поступально рухомого тіла з формулами обертального руху тіла, легко помітити, що основні з цих формул аналогічні. Щоб з формул поступального руху отримати формули обертального руху, необхідно замість лінійного переміщення  $s$  підставити кутове переміщення  $\phi$ , замість лінійного прискорення  $a$  – кутове прискорення  $\alpha$ .

Порівняння формул поступального і обертального руху зручно провести за допомогою табл. 2.1.

#### **2.2.5 Перетворення обертальних рухів**

Перетворення обертальних рухів здійснюється різними механізмами, які називаються передачами. Найбільш поширені види таких механізмів – зубчасті, фрикційні передачі і передачі гнучким зв'язком (наприклад, ремінні, канатні, стрічкові та ланцюгові). За допомогою цих механізмів здійснюється передача обертального руху від джерела руху (провідного вала) до приймача (веденого вала). Передачі характеризуються передавальним відношенням або передавальним числом.

Передавальним відношенням і називається відношення кутової швидкості провідної ланки до кутової швидкості веденої ланки.

Таблиця 2.1

Кінематична міра руху	Характер руху	Вид руху	
		поступальний	обертальний
Переміщення	Нерівномірне	$s = f(t)$	$\phi = f(t)$
	Рівномірне	$s = vt$	$\phi = \omega t$
	Рівнозмінне	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\phi = \omega_0 t + \frac{at^2}{2}$
Швидкість	Нерівномірне	$v = \frac{\partial s}{\partial t}$	$\omega = \frac{\partial \phi}{\partial t}$
	Рівномірне	$v = const$	$\omega = const$
	Рівнозмінне	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + at$
Прискорення дотичне	Нерівномірне	$a_t = \frac{\partial v}{\partial t}$	$\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial t}$
	Рівномірне	$a_t = 0$	$\alpha = 0$
	Рівнозмінне	$a_t = const$	$\alpha = const$
Прискорення нормальне		$a_n = \frac{v^2}{r}$	$a_n = \omega^2 r$

Передавальне відношення може бути більше, менше або дорівнювати одиниці.

Передавальним числом і двох зв'язаних ланок називається відношення більшої кутової швидкості до меншої.

Передавальне число передачі завжди більше або дорівнює одиниці.

В цілях уніфікації позначень передатних відношень і передавальних чисел усіх передач позначатимемо  $i$ , у деяких випадках з подвійним індексом, який відповідає індексам ланок передачі. Отже, передавальне відношення –  $i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2$ . Зазначимо, що індексом 1 позначається ланка передачі, що веде, а індексом 2 – ведена.

Передача, в якій кутова швидкість веденої ланки менше кутової швидкості ведучої ланки, називається такою, що знижує; інакше передача називається такою, що підвищує.

У техніці найбільш поширені зубчасті, ремінні і ланцюгові передачі. Розглянемо зубчасту передачу, схематично зображену на рис. 2.18.

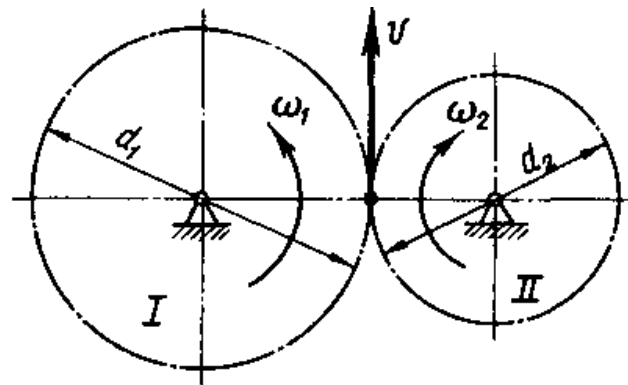


Рисунок 2.18

У місці зіткнення зубчастих коліс I і II лінійні швидкості точок першого і другого колеса однакові. Позначивши модуль цієї швидкості  $v$ , отримаємо  $v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}$ , отже,  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$ .

Відомо, що діаметр діляльного кола зубчастого колеса дорівнює добутку його модуля на число зубів  $d=mz$ , тоді для пари зубчастих коліс

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Розглянемо ремінну передачу, схематично зображену на рис. 2.19. За відсутності прослизання ремня по шківах  $v = \frac{\omega_1 d_1}{2} = \frac{\omega_2 d_2}{2}$ , тоді для ремінної передачі  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1}$ .

Для ланцюгових передач:  $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}$ .

де  $z_1, z_2$  – кількість зубів ведучої і веденої зірочок передачі.

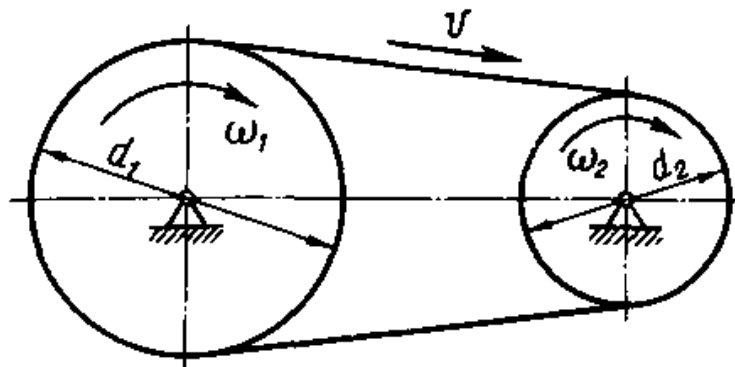


Рисунок 2.19

**Приклад 2.16.** У механізмі домкрата при обертанні рукоятки *A* обертаються зубчасті колеса 1, 2, 3, 4 і 5, які приводять в рух зубчасту рейку *B* домкрата (рис. 2.20). Визначити швидкість останньої, якщо рукоятка *A* здійснює  $n=30$  об/хв, кількість зубів коліс  $z_1=6, z_2=24, z_3=8, z_4=32$ ; радіус п'ятого колеса  $r=4$  см.

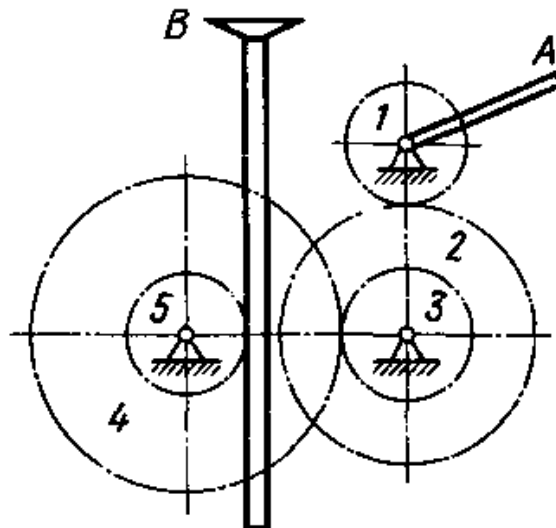


Рисунок 2.20

*Розв'язання.* Для пари зубчастих коліс 1 і 2 передавальне відношення

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Передавальне відношення для пари коліс 3 і 4

$$i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

Перемноживши праві та ліві частини останніх двох рівностей, отримаємо

$$i_{12}i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}.$$

Оскільки зубчасті колеса 2 і 3 жорстко сидять на одному валу, то  $\omega_2 = \omega_3$  і, отже,  $i_{12}i_{34} = \omega_1 / \omega_4$ .

Відношення  $\omega_1 / \omega_4$  є передавальне відношення двох пар зубчастих коліс, зображених на рис. 2.20, а саме

$$i_{14} = i_{12}i_{34} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3},$$

тобто передавальне відношення двох пар зубчастих коліс дорівнює добутку передавальних відношень цих пар коліс.

Користуючись останньою формулою, визначимо кутову швидкість коліс 4 і 5, що жорстко сидять на одному валу ( $\omega_4 = \omega_5$ ):

$$\omega_4 = \omega_5 = \omega_1 \cdot \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}.$$

Оскільки  $\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi 30}{30} = \pi$  рад/с, то  $\omega_4 = \omega_5 = \pi \cdot \frac{6}{24} \cdot \frac{8}{32} = \frac{\pi}{16}$  рад/с.

Визначимо швидкість рейки В:

$$v = \omega_5 r_5 = \frac{\pi}{16 \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 0,78 \cdot 10^{-2} \text{ м/с} = 0,78 \text{ см/с}.$$

## 2.3 Складний рух точки

### 2.3.1 Поняття про складний рух точки

Рух точки по відношенню до нерухомої системи координат називається абсолютним. Рух точки по відношенню до рухомої системи координат називається відносним. Рух рухомої системи координат по відношенню до нерухомої називається переносним.

Абсолютний рух точки є складним і складається з відносного і переносного рухів. Пояснимо викладене за допомогою рис. 2.21.



Рисунок 2.21

Нехай  $xOy$  – рухома система координат, що переміщується в площині креслення рівномірно поступально уздовж осі  $x$ ; точка  $A$  рівномірно переміщується вгору по осі  $y$ . Якщо здійснюватиметься лише відносний рух, то точка перейде з положення  $A$  у положення  $A_1$ . Якщо здійснюватиметься лише переносний рух, то точка з положення  $A$  попаде в положення  $A_2$ . Якщо ж одночасно здійснюються і відносний і переносний рухи, то точка за цей самий проміжок часу перейде з положення  $A$  у положення  $A_3$ .

**Приклад 2.17.** Стрижень  $OA$  обертається навколо осі  $O$  у площині рисунка згідно із законом  $\varphi=bt$ ; по стрижню рухається точка  $M$  за законом  $OM=at$ . Знайти траєкторію абсолютного руху точки  $M$  (рис. 2.22).

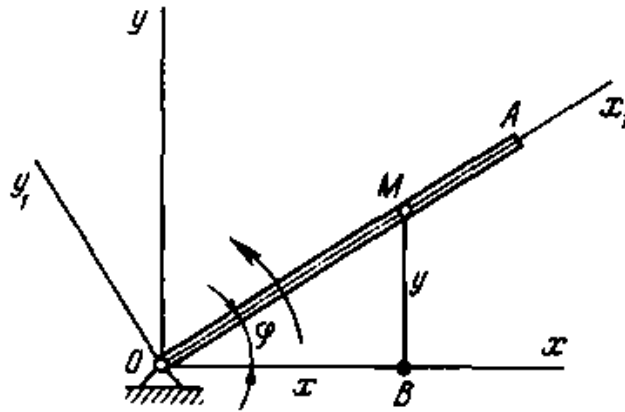


Рисунок 2.22

*Розв'язання.* Виберемо нерухому систему координат  $xOy$  і рухому систему  $x_1Oy_1$ , незмінно пов'язану зі стрижнем  $OA$ . У такому разі переносним рухом буде обертання рухливих осей разом з уявно закріпленою на них у кожен момент точкою  $M$  навколо точки  $O$ , а відносним – рух точки  $M$  уздовж стрижня.

Рівняння переносного обертального руху запишеться так:

$$\phi = bt.$$

Рівняння відносного руху матиме вигляд

$$x_1 = OM = at.$$

Визначимо рівняння абсолютного руху точки в координатній формі, для чого координати  $x$  і  $y$  в нерухомій системі відліку  $xOy$  виразимо як функції часу  $t$ .

З рис. 2.22 маємо:

$$x = OB = OM \cos \phi, \quad y = BM = OM \sin \phi$$

або, підставляючи значення  $\phi$  і  $OM$ , отримаємо:

$$x = at \cos bt, \quad y = at \sin bt.$$

Щоб визначити рівняння траєкторії абсолютного руху точки, виключимо з рівнянь руху час  $t$ , для чого розділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{y}{x} = \frac{at \sin bt}{at \cos bt} = \operatorname{tg} bt,$$

звідки

$$t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Крім того, звівши рівняння руху в квадрат і склавши їх, отримаємо

$$x^2 + y^2 = a^2 t^2; x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}.$$

Таке рівняння траєкторії абсолютного руху точки М. Ця траєкторія є архімедовою спіраллю.

### 2.3.2 Теорема про складання швидкостей

Швидкість точки в абсолютному русі називається абсолютною. Швидкість точки у відносному русі називається відносною. Швидкість даної точки, уявно закріпленої в даний момент на рухомій системі координат, називається переносною. Зв'язок між цими швидкостями встановлює теорема про складання швидкостей.

**Теорема.** Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкості.

Нехай за час  $\Delta t$  точка перейшла з положення  $A$  у положення  $A_3$ , рухаючись по траєкторії абсолютного руху, тобто по дузі  $AA_3$  (рис. 2.23). Якби мав місце лише відносний рух, то точка перейшла б в положення  $A_1$ ; якби тільки переносне, то точка перейшла б в положення  $A_2$ .

Можна уявити, що точка  $A$  перейшла в положення  $A_3$ , рухаючись спочатку лише по траєкторії переносного руху (дуга  $AA_2$ ), а потім лише по траєкторії відносного руху (дуга  $A_2A_3$ , рівна дузі  $AA_1$ ).

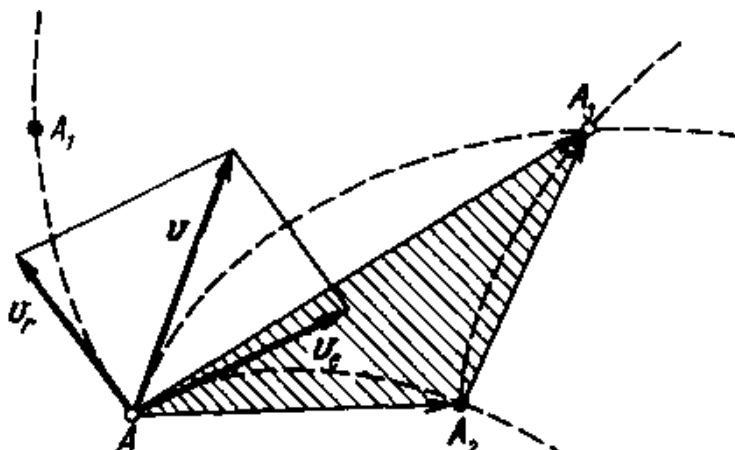


Рисунок 2.23

З'єднавши точки  $A$ ,  $A_2$  і  $A_3$  хордами, отримаємо таку залежність між векторами переміщень точки  $A$ :  $AA_3 = AA_2 + A_2A_3$ .

Розділимо всі члени рівності на  $\Delta t$  і перейдемо до межі при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_2}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_2A_3}{\Delta t}$ , що дає

$$v = v_e + v_r, \quad (2.47)$$

де  $v$  – вектор абсолютної швидкості;  $v_e$  – вектор переносної швидкості;  $v_r$  – вектор відносної швидкості.

Теорема доведена.

**Приклад 2.18.** Стрижень  $OA$  (рис. 2.24) обертається в площині креслення довкола нерухомої точки  $O$  згідно із законом  $\varphi = t^2$ . По стрижню рівноприскорено рухається повзун  $M$ , віддаляючись від точки  $O$ . Рух повзуна визначається рівнянням

$$s = OM = 2 + 2t^2,$$

( $s$  – в метрах,  $t$  – у секундах). Знайти абсолютну швидкість повзуна в момент  $t=1$  с.

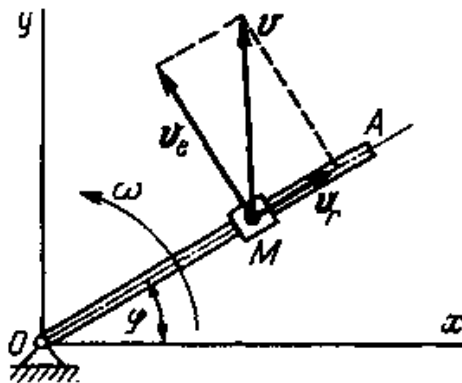


Рисунок 2.24

*Розв'язання.* Виберемо нерухому систему координат  $xOy$ ; рухомою системою вважатимемо стрижень. У такому разі відносним рухом є рух повзуна  $M$  по стрижню. Отже, відносна швидкість направлена уздовж стрижня і дорівнює

$$v_r = \frac{\partial s}{\partial t} = 4t.$$

У момент  $t=1$  відносна швидкість за модулем дорівнюватиме  $v_{r1}=4$  м/с.

Переносним рухом є обертальний рух стрижня  $OA$  з уявно закріпленим на ньому в даний момент повзуном, тому переносна швидкість  $v_e$  повзуна направлена перпендикулярно стрижню, причому її значення визначається за формулою

$$v_e = \omega OM = \frac{\partial \varphi}{\partial t} OM.$$



Оскільки  $OM=s=2+2t^2$ , а  $\partial\phi/\partial t=2t$ , то  $v_e=2t(2+2t^2)$ .

Вважаючи  $t=1$ с, отримаємо  $v_e=8$  м/с.

Оскільки відносна і переносна швидкості взаємно перпендикулярні, а на підставі теореми про складання швидкостей  $v=v_r+v_e$ , то

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}.$$

Підставляючи значення швидкостей при  $t=1$  с, отримаємо

$$v = \sqrt{v_{r1}^2 + v_{e1}^2} = \sqrt{4 + 8^2} = 8,94 \text{ м/с.}$$

## 2.4 Плоскопаралельний рух твердого тіла

### 2.4.1 Поняття про плоскопаралельний рух твердого тіла

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, за якого всі точки тіла переміщуються в площині, паралельній якійсь одній площині, що називається основною.

З визначення плоскопаралельного руху випливає, що будь-яка пряма  $AB$ , проведена в тілі перпендикулярно основній площині, рухається поступально (рис. 2.25). Для визначення руху тіла на кожній прямій, перпендикулярній основній площині, треба знати рух лише однієї точки. Взявши ці точки в одній площині  $Q$ , паралельній основній, отримаємо перетин  $S$ , рух якого визначає рух тіла. Але плоский рух перетину  $S$  сповна визначається рухом двох будь-яких його точок  $C$  і  $D$  або відрізком  $CD$ . Таким чином, питання про плоскопаралельний рух тіл зводиться до питання про рух відрізка прямої в площині, паралельній основній.

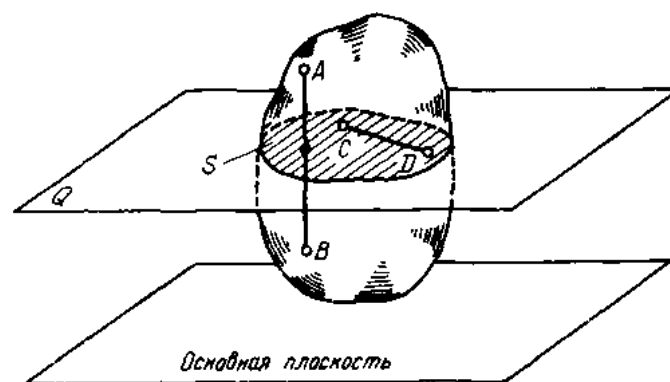


Рисунок 2.25

Плоскопаралельний рух вивчається двома методами:

- методом миттєвих центрів швидкостей;
- методом розкладання плоскопаралельного руху на поступальне і обертальне.

### 2.4.2 Метод миттєвих центрів швидкостей

В основі цього методу лежить наступна теорема: будь-яке плоскопаралельне переміщення твердого тіла, отримано одним обертанням біля осі, яка перпендикулярна основній площині.

Нехай відрізок, що визначає плоскопаралельний рух тіла, за кінцевий проміжок часу перемістився з положення  $AB$  у положення  $A_1B_1$  (рис. 2.26).

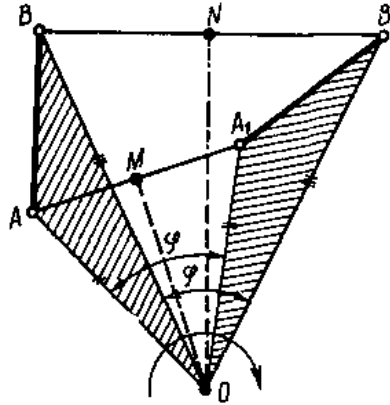


Рисунок 2.26

З'єднаємо точки  $A$  і  $A_1$ ,  $B$  і  $B_1$  прямими лініями і з середин отриманих відрізків (точки  $M$  і  $N$ ) побудуємо перпендикуляри до їх взаємного перетину в точці  $O$ . Цю точку з'єднаємо прямими лініями з кінцями відрізків  $AB$  і  $A_1B_1$  і отримаємо два конгруентні (рівні) трикутники, що мають загальну вершину  $O$ :

$$\triangle AOB = \triangle A_1OB_1.$$

Трикутник  $AOB$  поєднується з трикутником  $A_1OB_1$  шляхом повороту на кут  $\varphi$  навколо точки  $O$ , що називається центром кінцевого повороту. Точка  $O$  є слід осі кінцевого повороту, перпендикулярній основній площині. Таким чином, відрізок  $AB$ , що визначає плоскопаралельний рух тіла, переміщується в будь-яке нове положення шляхом одного обертання довкола осі кінцевого повороту. Теорема доведена.

Наведений доказ буде справедливий і в тому випадку, якщо переміщення тіла відбудеться за нескінченно малий проміжок часу  $\Delta t$ . У межі при  $\Delta t$ , що прямує до нуля, обертання відбуватиметься довкола миттєвої осі.

Слід миттєвої осі обертання у площині фігури називають миттєвим центром швидкостей. Очевидно, що швидкість точки, що є в даний момент миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулю. Кутова швидкість  $\omega$ , з якою відбувається миттєве обертання, називається миттєвою кутовою швидкістю.

Точка нерухомої площини, що співпадає в даний момент часу з миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називається миттєвим центром обертання.

Якщо пряма  $AB$  рухається паралельно самій собі, то можна вважати, що тіло обертається довкола осі, видаленої в нескінченність, інакше кажучи, поступальну ходу можна розглядати як обертальне по колу нескінченно великого радіусу.

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шляхом послідовних миттєвих безперервних поворотів довкола миттєвих осей обертання.

Методом миттєвих центрів швидкостей можна користуватися лише в ході визначення швидкостей точок плоскої фігури, але не під час визначення траєкторій і прискорень цих точок.

### 2.4.3 Властивості миттєвого центру швидкостей

Встановимо такі три властивості миттєвого центру швидкостей, які випливають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, що обертається довкола нерухомої осі:

- швидкість миттєвого центру дорівнює нулю;
- миттєвий центр лежить на перпендикулярі, проведеному з точки до напрямку її швидкості;
- швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центру швидкостей (рис. 2.27):  $v_A = \omega OA$ .

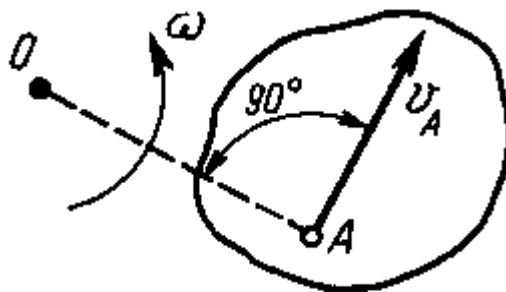


Рисунок 2.27

На підставі розглянутих вище властивостей можна встановити наступні п'ять способів визначення положення миттєвого центру швидкостей плоскої фігури, що визначає плоскопаралельний рух тіла.

1. Відомі миттєва кутова швидкість  $\omega$  і швидкість  $v_A$  будь-якої точки  $A$  плоскої фігури (рис. 2.27).

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей  $O$  знаходиться на перпендикулярі, проведеному з точки  $A$  до вектора швидкості  $v_A$  на відстані  $OA = v_A / \omega$ .

2. Відомі напрями швидкостей двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури (рис. 2.28).

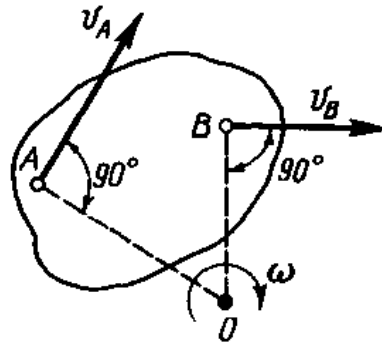


Рисунок 2.28

У цьому випадку миттєвий центр  $O$  лежить на перетині перпендикулярів, проведених з точок  $A$  і  $B$  до напрямів їх швидкостей, причому

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega OA}{\omega OB} = \frac{OA}{OB}, \quad (2.48)$$

тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їх відстаням від миттєвого центру швидкостей.

3. Відомо, що швидкості двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури паралельні один одному, направлені в один бік, перпендикулярні відрізку  $AB$  і за модулем нерівні (рис. 2.29).

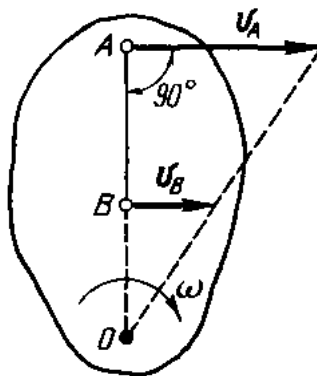


Рисунок 2.29

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей  $O$  знаходиться в точці перетину прямої, що поєднує початки векторів  $v_A$  і  $v_B$ , з прямою, що поєднує кінці цих векторів.

Якщо вектори швидкостей точок  $A$  і  $B$  рівні між собою, то миттєвий центр швидкостей в даний момент знаходиться в нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулю, швидкості всіх точок плоскої фігури будуть однакові і рух буде миттєво поступальним.

4. Відомо, що швидкості двох точок  $A$  і  $B$  плоскої фігури паралельні, направлені у протилежні сторони і перпендикулярні відрізку  $AB$  (рис. 2.30).

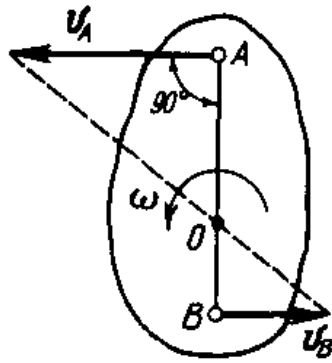


Рисунок 2.30

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей  $O$  знаходиться в точці перетину відрізка  $AB$  з прямою, що поєднує кінці векторів  $v_A$  і  $v_B$ .

5. Відомо, що плоска фігура котиться без ковзання по нерухомій кривій.

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей (МЦШ)  $O$  знаходиться в точці зіткнення фігури з кривою, оскільки швидкість цієї точки фігури в даний момент дорівнює нулю.

Розглянемо кочення колеса по прямолінійній рейці в різних умовах тертя.

На рис. 2.31 показано положення миттєвого центру швидкостей і графіки швидкостей точок вертикального діаметру у випадках тертя ковзання, тертя кочення, тертя кочення з прослизанням, часткового і повного буксування колеса.

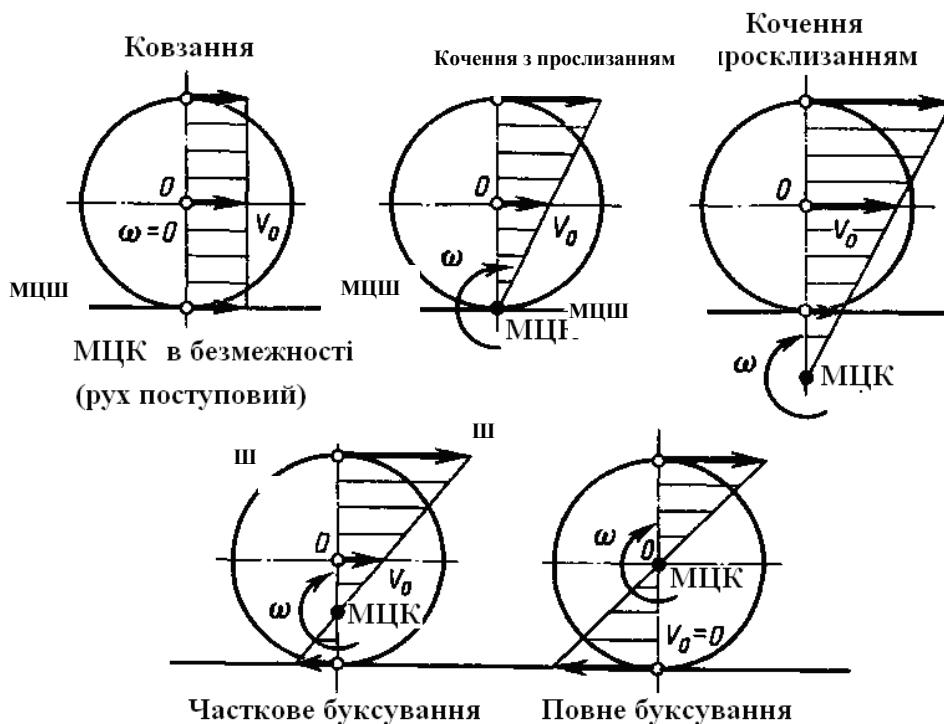


Рисунок 2.31

**Приклад 2.19.** Колесо радіусу  $R$  котиться без ковзання по прямолінійній рейці, причому швидкість його центру  $O$  дорівнює  $v_0=2\text{ м/с}$  (рис. 2.32). Знайти швидкість кінців вертикального і горизонтального діаметрів колеса.

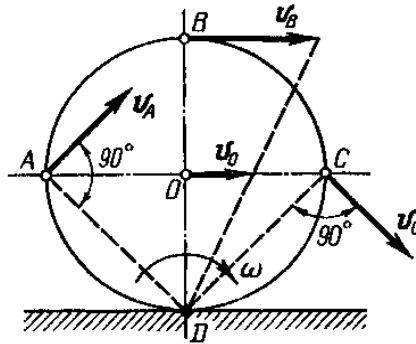


Рисунок 2.32

*Розв'язання.* За умовами завдання колесо котиться без ковзання, тому швидкість точки  $D$  стосовно колеса з рейкою дорівнює нулю, отже, точка  $D$  – миттєвий центр швидкостей колеса.

Знаючи швидкість точки  $O$ , знаходимо кутову швидкість колеса  $\omega$ :

$$\omega = \frac{v_0}{OD} = \frac{v_0}{R}.$$

На підставі властивостей миттєвого центру швидкостей визначимо модулі швидкостей точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  колеса:

$$v_A = \omega \cdot AD = \frac{v_0}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с},$$

$$v_B = \omega \cdot BD = \frac{v_0}{R} 2R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с},$$

$$v_C = \omega \cdot CD = \frac{v_0}{R} R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Напрями векторів швидкостей точок  $A$ ,  $B$  і  $C$  перпендикулярні прямим, що з'єднують ці точки з миттєвим центром швидкостей.

#### 2.4.4 Розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний

В основі цього методу лежить така **теорема**: будь-яке плоскопаралельне переміщення твердого тіла може бути отримане за допомогою одного поступального і одного обертального руху.

Нехай за час  $\Delta t$  відрізок  $AB$ , що визначає плоскопаралельний рух тіла, перемістився в положення  $A_1B_1$  (рис. 2.33).

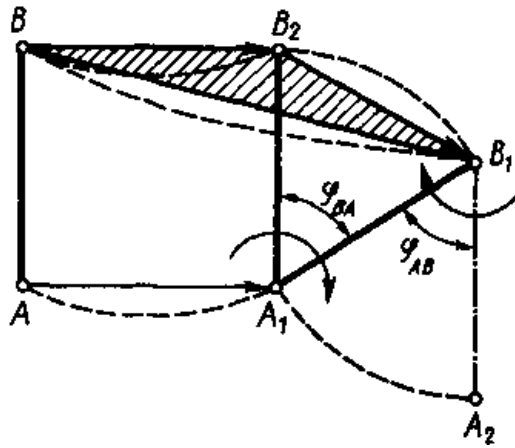


Рисунок 2.33

Передбачимо, що відрізок  $AB$  спочатку переміщався лише поступально, причому всі його точки рухалися однаково, як точка  $A$ . Таким чином, відрізок перейшов у положення  $A_1B_2$ , після чого його можна перемістити у положення  $A_1B_1$  за допомогою лише обертального руху довкола точки  $A_1$ . Звідси видно, що складний плоскопаралельний рух складається з двох простих рухів: поступального і обертального, причому можна вважати, що ці рухи відбуваються одночасно.

Встановимо залежність між векторами швидкостей точок  $A$  і  $B$ . Для цього з'єднаємо прямими точки  $A, A_1$  і  $B, B_1, B_2$ , внаслідок чого отримаємо таку залежність між векторами переміщень точки  $B$ :

$$BB_1 = BB_2 + B_2B_1. \quad (2.49)$$

Оскільки  $BB_2 = AA_1$ , то можна записати, що  $BB_1 = AA_1 + B_2B_1$ .

Розділимо всі члени рівності на  $\Delta t$  і перейдемо до межі при  $\Delta t$ , що прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_2B_1}{\Delta t}, \quad (2.50)$$

що дає

$$v_B = v_A + v_{BA}, \quad (2.51)$$

де  $v_B$  – вектор абсолютної швидкості точки  $B$ ;

$v_A$  – вектор абсолютної швидкості точки  $A$ ;

$v_{BA}$  – вектор швидкості точки  $B$  у відносному обертальному русі відрізка  $AB$  довкола точки  $A$ , направлений перпендикулярно відрізку  $AB$ .

Таким чином, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шлях обертального і поступального рухів, що одночасно відбуваються; поступальний рух можна вважати переносним, а обертальний – відносним. Вектор абсолютної швидкості будь-якої точки  $B$  дорівнює вектору абсолютної швидкості будь-якої

іншої точки  $A$  плюс вектор швидкості точки  $B$  у відносному обертальному русі відрізка  $AB$  довкола точки  $A$ .

Точку, довкола якої відбувається відносний обертальний рух, називатимемо полюсом.

Якщо за полюс замість точки  $A$  прийняти точку  $B$ , то, міркуючи аналогічно, отримаємо  $v_A = v_B + v_{AB}$ .

Порівнюючи цю векторну рівність з попередньою, бачимо, що вектори відносних швидкостей  $v_{BA}$  і  $v_{AB}$  за модулем рівні між собою, тобто  $v_{BA} = v_{AB}$ .

З рис. 2.33 видно, що напрям відносного обертання і кут повороту відрізка  $AB$  за будь-який проміжок часу не залежить від вибору полюса, тобто  $\phi_{BA} = \phi_{AB}$ .

Продиференціювавши цю рівність за часом, отримаємо  $\frac{\partial \phi_{BA}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{AB}}{\partial t}$

або  $\omega_{BA} = \omega_{AB}$ .

Отже, відносна кутова швидкість від вибору полюса не залежить.

Аналогічно,  $\frac{\partial \phi_{BA}}{\partial t} = \frac{\partial \phi_{AB}}{\partial t}$  або  $\alpha_{BA} = \alpha_{AB}$ .

Також і відносне кутове прискорення від вибору полюса не залежить.

Із сказаного випливає, що під час розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний поступальна частина руху в загальному випадку залежить від вибору полюса, а обертальна частина руху від вибору полюса не залежить.

Оскільки за полюс може бути вибрана будь-яка точка площини, у тому числі і миттєвий центр швидкостей, то під час розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний кутова швидкість відносного обертального руху завжди дорівнює абсолютній кутовій швидкості.

Якщо векторну рівність  $v_A = v_B + v_{AB}$  спроектувати на напрям прямої  $AB$ , то *пр.*  $v_A = \text{пр. } v_B$ , оскільки  $v_{AB} = 0$ . Отже, під час плоскопаралельного руху проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на напрям прямої, яка поєднує ці точки, рівні між собою.

**Приклад 2.20.** Кривошипний механізм зв'язаний шарнірно в середині  $C$  шатуна із стрижнем  $CD$ , а останній із стрижнем  $DE$ , який може обертатися довкола точки  $E$ . Визначити кутову швидкість  $\omega_{DE}$  стрижня  $DE$  у вказаному на рис. 2.34 положенні кривошипного механізму, якщо точки  $B$  і  $E$  розташовані



на одній вертикалі; кутова швидкість  $\omega$  кривошипа  $OA$  дорівнює 8 рад/с.  $CA=25$  см,  $DE=100$  см, кут  $CDE=\pi/2$  і кут  $BED=\pi/6$  рад.

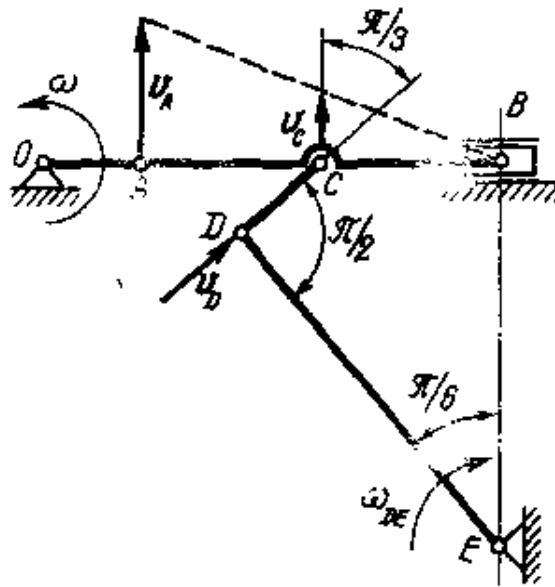


Рисунок 2.34

*Розв'язання.* Перш за все визначимо швидкість точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$v_A = \omega \cdot OA = 8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2 \text{ м/с.}$$

У заданому положенні механізму повзун  $B$  займає крайнє праве положення і його швидкість у цей момент дорівнює нулю. Отже, точка  $B$  у даний момент є миттєвим центром швидкостей шатуна  $AB$ . Оскільки швидкості точок шатуна прямо пропорційні їх відстаням від миттєвого центру швидкостей, то запишемо пропорцію

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{CB}{AB},$$

з якої визначимо модуль швидкості точки  $C$ :

$$v_C = v_A \frac{CB}{AB} = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с.}$$

Вектор швидкості  $v_C$  перпендикулярний шатуну  $AB$ , вектор швидкості точки  $D$  перпендикулярний стрижню  $DE$ , тобто направлений уздовж стрижня  $DC$ .

Швидкість точки  $D$  визначимо, розклавши складний плоскопаралельний рух ланки  $DC$  на поступальний і обертальний за формулою

$$v_D = v_C + v_{DC},$$

де вектор відносної швидкості  $v_{DC}$  перпендикулярний ланці  $DC$ . Спроектувавши цю векторну рівність на напрям прямої  $DC$ , отримаємо

$$v_D = \frac{v_C \cos \pi}{3} = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м/с.}$$

Виразивши швидкість точки  $D$  через кутову швидкість стрижня  $DE$ , отримаємо

$$v_D = \omega_{DE} DE,$$

звідки, підставивши числові значення, знайдемо

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{DE} = \frac{0,5}{1} = 0,5 \text{ рад/с.}$$

**Приклад 2.21.** Визначити швидкість точки  $B$  під час плоского руху тіла.

*Розв'язання.* Під час плоского руху тіла швидкість точки визначається як геометрична сума швидкостей полюса (точка  $A$ ) і швидкостей  $V_{BA}$  точки  $B$  в обертальному русі тіла навколо полюса  $A$ . При цьому швидкість  $V_{BA}$  завжди перпендикулярна до відрізка  $BA$ .

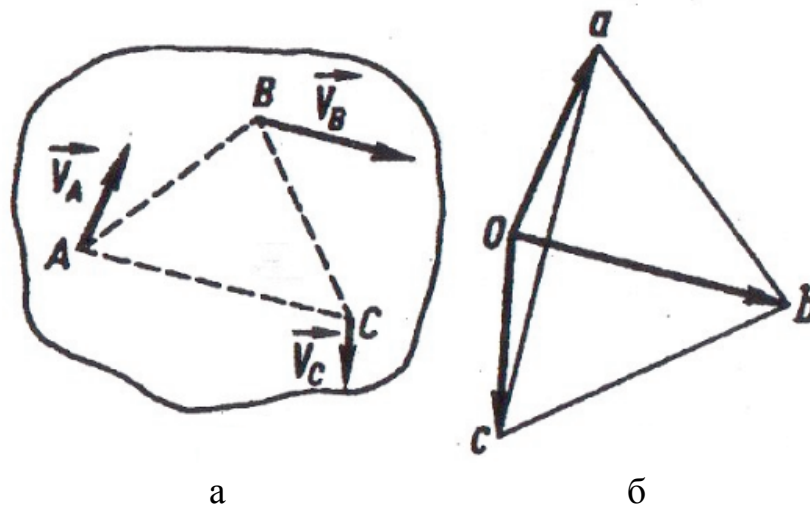


Рисунок 2.35

Для побудови вектора  $V_V$  вибираємо за межами плоскої фігури довільну точку полюс  $O$ , з якої в заданому масштабі відкладаємо вектор  $OA = k\vec{V}_A$  (рис. 2.35, б), де  $k$  – масштабний коефіцієнт. З кінця даного вектора, з точки  $a$ , проведемо пряму  $ab$ , перпендикулярну до  $AB$  (вектор  $\vec{V}_{AB}$  перпендикулярний до  $AB$ ) до перетинання її в точці  $b$  з прямою, проведеною з полюса  $O$  паралельно швидкості точки  $B$ . Вектор  $ab = k\vec{V}_{BA}$  є в обраному масштабі швидкістю точки  $B$  під час обертального руху тіла навколо точки  $A$ , а вектор  $Ob = K \cdot \vec{V}_B$ . Таким чином, швидкість точки  $B$  визначена.

**Приклад 2.22.** Здійснити кінематичний аналіз важільного механізму витяжного преса (рис. 2.36).

*Розв'язання.* Побудова кінематичної схеми

За заданими довжинами ланок  $l_{OA}$ ,  $l_{AB}$ ,  $l_{BC}$ ,  $l_{CD}$ ,  $l_{DE}$  та координатами  $a, b$  шарніра  $C$  будуюмо кінематичну схему важільного механізму, згідно з положенням, коли  $F_E = F_{E_{\max}}$  з вибраним масштабним коефіцієнтом:

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}, \quad (2.52)$$

де  $l_{OA}$  – дійсна довжина кривошипа 1, м;  $OA$  – довжина відрізка на кінематичній схемі, що відповідає довжині кривошипа 1, мм.

Таким чином, масштабний коефіцієнт довжини  $\mu_l$  має розмірність  $[\mu_l] = \text{м/мм}$ .

Визначимо довжини відрізків на кінематичній схемі, що відповідають довжинам ланок та координатам шарніра  $C$ :

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}; \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}; \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l}; \quad DE = \frac{l_{DE}}{\mu_l};$$

$$AS_2 = \frac{l_{AS_2}}{\mu_l}; \quad DS_4 = \frac{l_{DS_4}}{\mu_l}; \quad (a) = \frac{a}{\mu_l}; \quad (b) = \frac{b}{\mu_l}.$$

Побудова плану швидкостей важільного механізму

За умовою задачі частота обертання  $n_1$ ,  $\text{хв}^{-1}$  кривошипа  $OA$  відома, тому для знаходження кутової швидкості  $\omega_1$ ,  $\text{с}^{-1}$ , скористаємося залежністю:  $\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30}$ .

Знаючи кутову швидкість  $\omega_1$  кривошипа  $OA$  і його дійсну довжину  $l_{OA}$ , знаходимо лінійну швидкість точки  $A$  за формулою:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}. \quad (2.53)$$

Вектор лінійної швидкості  $\vec{V}_A$  напрямлений перпендикулярно до кривошипа  $OA$  в бік його обертального руху.

Для побудови плану лінійних швидкостей (рис. 2.37) довільно вибираємо полюс плану швидкостей – точку  $p$  (її швидкість дорівнює 0).

Оскільки точки  $O$ ,  $C$ ,  $S_1$ ,  $S_3$  (центри мас кривошипів 1 і 3) нерухомі ( $\vec{V}_O = \vec{V}_C = \vec{V}_{S_1} = \vec{V}_{S_3} = 0$ ), то відповідні точки  $o$ ,  $c$ ,  $s_1$ ,  $s_3$  потрапляють у полюс  $p$  плану швидкостей.

Будуємо вектор  $\overrightarrow{pa}$  паралельно до вектора  $\vec{V}_A$  довільної довжини  $pa$ , мм. При цьому вектор  $\overrightarrow{pa}$  зображує на плані вектор швидкості точки  $A$ ,

тобто  $\vec{V}_A = \vec{pa} \cdot \mu_V$ , де масштабний коефіцієнт швидкостей  $\mu_V$ ,  $\left(\frac{m \cdot c^{-1}}{mm}\right)$  знаходиться за формулою:

$$\mu_V = \frac{V_A}{pa}. \quad (2.54)$$

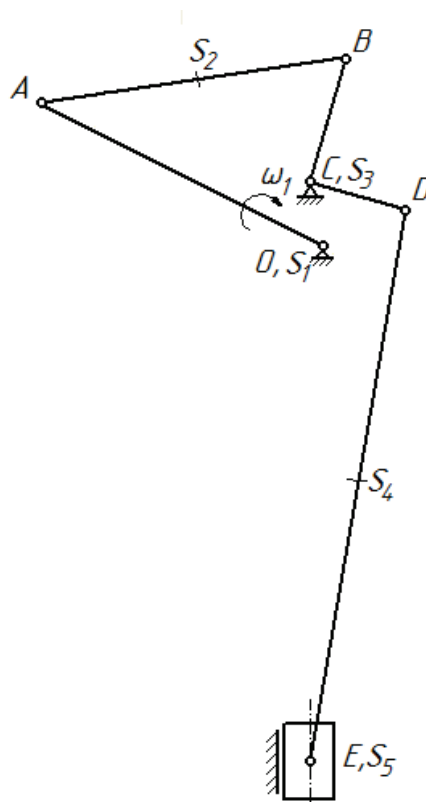


Рисунок 2.36 – Кінематична схема важільного механізму

Для знаходження швидкості точки  $B$  урахуємо, що ця точка є спільною для шатуна  $AB$  і коромисла  $BC$ . Шатун  $AB$  здійснює плоскопаралельний рух. Цей складний рух шатуна  $AB$  замінюємо двома умовними простими рухами – поступальним та обертальним, які дають кінцевий результат переміщення. Центр шарніра  $B$  при цьому набуває послідовно двох швидкостей: при поступальному русі – швидкості  $\vec{V}_A$ , а при обертальному русі – відносної швидкості  $\vec{V}_{BA}$  (швидкість точки  $B$  відносно точки  $A$ )  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ .

При цьому швидкість  $\vec{V}_{BA}$  невідома нам за величиною, але відома за напрямком ( $\vec{V}_{BA} \perp AB$ ).

З другого боку, швидкість  $\vec{V}_B$  точки  $B$  коромисла  $CB$ , яке здійснює тільки обертальний рух навколо нерухомої точки  $C$  ( $\vec{V}_C = 0$ ), набуває швидкості  $\vec{V}_{BC}$

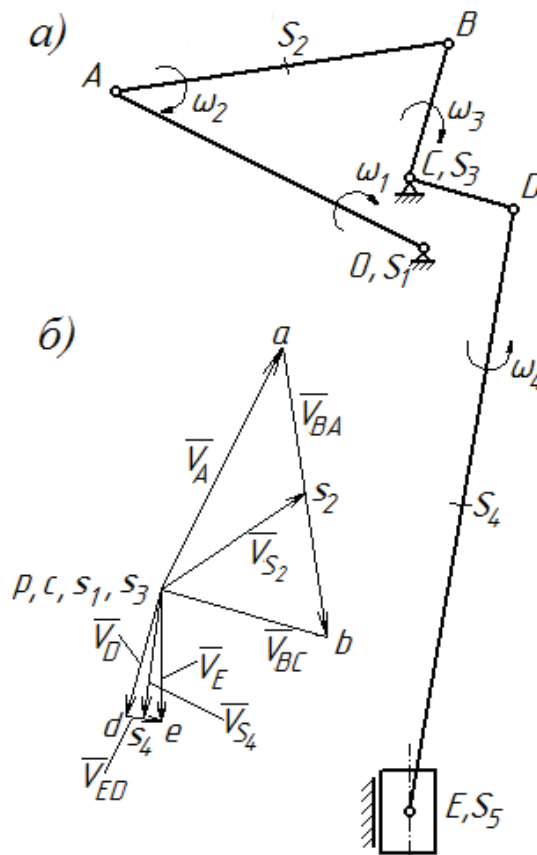
точки  $B$  відносно точки  $C$ , яка невідома нам за величиною, але відома за напрямом ( $\vec{V}_{BC} \perp CB$ ). Таким чином, швидкість точки  $B$  буде:  $\vec{V}_B = \vec{V}_{BC}$ .

За рівнянням (2.54) через кінець вектора  $\vec{V}_A$  – точку  $a$  на плані швидкостей проводимо пряму лінію, паралельну до вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{BA}$ , а через полюс  $p$  (точку  $c$ ) – пряму лінію, паралельну до вектора швидкості  $\vec{V}_{BC}$ .

Точка перетину вказаних ліній – напрямків швидкостей  $\vec{V}_{BA}$  і  $\vec{V}_{BC} = \vec{V}_B$  – визначає точку  $b$ , а отже, і величину швидкостей згідно з масштабним коефіцієнтом  $\mu_V$ :

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V, \quad (2.55)$$

$$V_B = cb \cdot \mu_V. \quad (2.56)$$



а) кінематична схема важільного механізму; б) план швидкостей  
Рисунок 2.37 – Побудова плану швидкостей важільного механізму

Відрізки  $ab$ , мм, і  $cb$ , мм, не тільки визначають у масштабі модулі відносних швидкостей  $V_{BA}$  і  $V_{BC}$ , але й одночасно вони є планами швидкостей шатуна  $AB$  і кривошипа  $BC$ . Позначимо центр мас шатуна 2 через  $S_2$ .

Для знаходження точки  $s_2$  на плані швидкостей відповідно до точки  $S_2$ , яка лежить на шатуні 2 згідно з теоремою подібності, на плані швидкостей лежатиме на відрізку  $ab$ . Склавши пропорцію

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB},$$

одержимо довжину відрізка

$$as_2 = ab \frac{AS_2}{AB}.$$

Відкладемо відрізки  $as_2$  на плані швидкостей та, з'єднавши точку  $s_2$  з полюсом  $p$ , знаходимо величину швидкості точки  $S_2$ :

$$V_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_V. \quad (2.57)$$

Для знаходження швидкості точки  $D$  складемо пропорцію

$$\frac{cd}{cb} = \frac{CD}{CB}, \quad (2.58)$$

одержимо довжину відрізка

$$cd = cb \frac{CD}{CB}.$$

З'єднавши точку  $d$  з полюсом  $p$ , знаходимо величину швидкості точки  $D$ :

$$V_D = pd \cdot \mu_V. \quad (2.59)$$

Для знаходження швидкості точки  $E$  врахуємо, що ця точка є спільною для шатуна  $DE$  і повзуна 5. Шатун  $DE$  здійснює складний рух, який можна розкласти як і для шатуна  $AB$  на два прості: переносний (поступальний) точки  $D$  і відносний (обертальний) навколо точки  $D$ . При заміні дійсного руху шатуна  $DE$  двома умовними, що дають кінцевий результат його переміщення, центр шарніра  $E$  набуває послідовно двох швидкостей:  $\vec{V}_D$  – при поступальному русі та відносної  $\vec{V}_{ED}$  – при обертальному русі (швидкості точки  $E$  навколо точки  $D$ ). Швидкість  $\vec{V}_{ED}$  невідома за величиною, але відома за напрямком ( $\vec{V}_{ED} \perp ED$ ). На основі цього запишемо векторне рівняння для знаходження швидкості точки  $E$ :

$$\vec{V}_E = \vec{V}_D + \vec{V}_{ED}. \quad (2.60)$$

Для визначення векторів швидкостей  $\vec{V}_E$  і  $\vec{V}_{ED}$  проведемо через точку  $b$  плану швидкостей пряму лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{ED}$  ( $\vec{V}_{ED} \perp ED$ ), а з полюса  $p$  – пряму лінію, паралельну руху повзуна 5. Точка перетину цих ліній визначить точку  $e$  – кінець

векторів  $\vec{V}_E$  і  $\vec{V}_{ED}$ . Відрізок  $de$  не тільки визначає у масштабі величину відносної швидкості

$$V_{FD} = df \cdot \mu_v, \quad (2.61)$$

але й одночасно він є планом швидкостей шатуна  $DE$ . Відрізок  $pe$  визначить  $V_E = pe \cdot \mu_v$  величину швидкості точки  $E$ .

Знайшовши лінійні швидкості всіх точок ланок механізму, можна встановити кутові швидкості шатунів 2, 4 та кривошипа 3.

У даному випадку кутова швидкість шатуна  $AB$  (ланка 2)

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{l_{AB}}, \quad (2.62)$$

де  $l_{AB}$  – дійсна довжина шатуна 2, м.

Для визначення напрямку кутової швидкості  $\omega_2$  перенесемо з плану швидкостей вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{BA}$  у точку  $B$  на кінематичну схему і розглянемо обертальний рух точки  $B$  відносно точки  $A$  у напрямку швидкості  $\vec{V}_{BA}$ . У нашому випадку кутова швидкість напрямлена за рухом годинникової стрілки.

Аналогічним чином визначають кутові швидкості та їх напрямки кривошипа 3 і шатуна 4

$$\omega_3 = \frac{V_{BC}}{l_{CB}}, \quad (2.63)$$

$$\omega_4 = \frac{V_{ED}}{l_{EF}}, \quad (2.64)$$

де  $l_{CB}$ ,  $l_{DF}$  – дійсні довжини відповідно коромисла 3, шатуна 4, м.

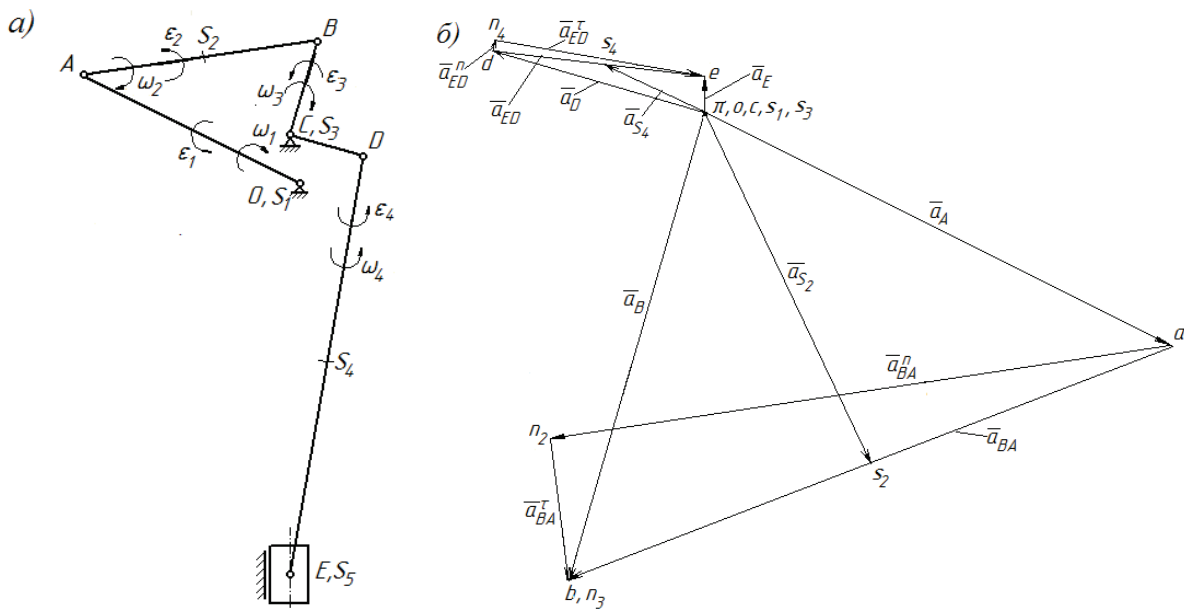
Кутова швидкість  $\omega_3$  кривошипа 3 напрямлена за рухом годинникової стрілки, а  $\omega_4$  шатуна 4 – проти руху годинникової стрілки.

Побудова плану прискорень механізму

Вихідними даними для побудови плану лінійних прискорень (рис. 2.38, б) є положення ланок механізму (кінематична схема механізму) і план швидкостей. Рівняння, які використовуються в ході побудови плану прискорень, різняться тільки тим, що повні прискорення точки розкладають на певні складові.

У даному випадку відносне прискорення точки  $A$  є геометричною сумою нормального (доцентрового) та тангенціального (дотичного) прискорень:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO} = \vec{a}_{AO}^n + \vec{a}_{AO}^t. \quad (2.65)$$



а) кінематична схема важільного механізму; б) план прискорень  
Рисунок 2.38 – Побудова плану прискорень

Нормальне прискорення  $\vec{a}_{AO}^n$  напрямлене по лінії  $AO$  до центра обертання кривошипа – точки  $O$ , дотичне  $\vec{a}_{AO}^r$  – перпендикулярно до  $AO$  і напрямлене в бік кутового прискорення  $\varepsilon_1$  ланки 1. Величини цих прискорень знаходять зі співвідношень

$$a_{AO}^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = \frac{V_A^2}{l_{OA}}; \quad (2.66)$$

$$a_{AO}^r = \frac{dV_A}{dt} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}. \quad (2.67)$$

Припустимо, що початкова ланка обертається рівномірно ( $\omega_1 = const$ ), то кутове прискорення  $\varepsilon_1 = \frac{d\omega_1}{dt} = 0$ , таким чином, у даному випадку  $a_{AO}^r = 0$ , тобто прискорення точки  $A$ :  $\vec{a}_A = \vec{a}_{AO}^n$ . Для побудови плану лінійних прискорень довільно вибираємо полюс плану прискорень – точку  $\pi$  (її прискорення дорівнює 0). Оскільки точки  $O, C, S_1, S_3$  нерухомі ( $\vec{a}_O = \vec{a}_C = \vec{a}_{S_1} = \vec{a}_{S_3} = 0$ ), то точки  $o, c, s_1, s_3$  потрапляють у полюс  $\pi$  плану прискорень. Будуємо вектор  $\vec{\pi a}$  паралельно вектору  $\vec{a}_A$  довільної довжини  $\pi a$ . Тоді масштабний коефіцієнт прискорень  $\mu_a, \frac{m \cdot c^{-2}}{mm}$  знаходять за формулою:

$$\mu_a = \frac{a_A}{\pi a}. \quad (2.68)$$



Для знаходження прискорення точки  $B$  складемо два векторні рівняння:

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau, \quad (2.69)$$

$$\vec{a}_{B_3} = \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau. \quad (2.70)$$

Початок вектора нормального прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$  точки  $B$  відносно  $A$  має збігатися з кінцем вектора  $\vec{a}_A$ . Величина прискорення  $a_{BA}^n$  визначається за формулою:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB} = \frac{V_{BA}^2}{l_{AB}}. \quad (2.71)$$

У вибраному масштабі цей вектор буде зображено відрізком

$$an_2 = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a}. \quad (2.72)$$

Прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$  напрямлене вздовж ланки  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ .

Через точку  $n_2$ , згідно із цим самим рівнянням, необхідно провести пряму лінію – напрямком дотичного прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$  (величина останнього невідома, відомий лише його напрямок – перпендикулярний до лінії  $AB$ ).

Згідно з рівнянням (23), за умови, що  $\vec{a}_C = 0$  (точка  $C$  нерухома), прискорення  $\vec{a}_B$  дорівнює  $\vec{a}_B = \vec{a}_{BC}^n + \vec{a}_{BC}^\tau$ . Тут вектор прискорення  $\vec{a}_{BC}^n = \overline{cn_3} \cdot \mu_a$  напрямлений від точки  $B$  до точки  $C$ , а його величину  $a_{BC}^n$  визначають за формулою:

$$a_{BC}^n = \omega_3^2 \cdot l_{CB} = \frac{V_{BC}^2}{l_{CB}}. \quad (2.73)$$

Відрізок  $\pi n_3$ , знайдений за формулою:

$$\pi n_3 = cn_3 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a}, \quad (2.74)$$

відповідає прискоренню  $a_{BC}^n$ . На плані прискорень від точки  $\pi$  у напрямку прискорення  $\vec{a}_{BC}^n$  відкладемо відрізок  $\pi n_3$ . Через точку  $n_3$  проведемо пряму лінію – напрямком дотичного прискорення ( $\vec{a}_{BC}^\tau \perp BC$ ) до перетину з прямою лінією – напрямком прискорення  $\vec{a}_{BA}^\tau$ , тобто знайдемо точку  $b$ . Відрізок  $\overline{n_3 b}$  визначає дотичне прискорення:  $\vec{a}_{BC}^\tau = \overline{n_3 b} \cdot \mu_a$ , а відрізок  $\overline{\pi b}$  – вектор повного прискорення точки  $B$ :  $\vec{a}_B = \overline{\pi b} \cdot \mu_a$ .

З'єднавши точки  $a$  і  $b$ , знайдемо вектор повного відносного прискорення  $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$ , і тим самим будуємо план прискорень шатуна  $BA$ . Положення точки  $s_2$  на плані прискорень можна визначити методом подібності, склавши пропорцію

$$\frac{as_2}{ab} = \frac{AS_2}{AB}, \quad (2.75)$$

одержимо довжину відрізка  $as_2 = ab \frac{AS_2}{AB}$ .

Тоді величина прискорення точки  $S_2$  становить:  $a_{s_2} = \pi s_2 \cdot \mu_a$ .

Для знаходження прискорення точки  $D$ , згідно з теоремою подібності, складемо також пропорцію

$$\frac{cd}{cb} = \frac{CD}{CB}, \quad (2.76)$$

одержимо довжину відрізка  $cd = cb \frac{CD}{CB}$ .

З'єднавши точку  $d$  з полюсом  $\pi$ , знаходимо величину прискорення точки  $D$ :  $a_D = \pi d \cdot \mu_a$ .

Прискорення точки  $E$  шатуна  $DE$  знайдемо з рівняння:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}. \quad (2.77)$$

Розкладемо відносне прискорення  $\vec{a}_{ED}$  на дві складові:  $\vec{a}_{ED} = \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^r$ . Тоді рівняння (34) запишемо у вигляді

$$\vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^r. \quad (2.78)$$

Вектор нормального прискорення  $\vec{a}_{ED}^n$  напрямлений уздовж лінії  $ED$  від точки  $E$  до точки  $D$ , а його величина

$$a_{ED}^n = \omega_4^2 \cdot l_{DE} = \frac{V_{DE}^2}{l_{DE}}. \quad (2.79)$$

На плані прискорень  $\vec{a}_{ED}^n$  відповідає напрямку відрізка  $\overline{dn_4}$ , довжина якого може бути знайдена за формулою

$$dn_4 = \frac{a_{ED}^n}{\mu_a}. \quad (2.80)$$

Через кінець (точку  $n_4$ ) проведемо пряму лінію дотичного прискорення  $\vec{a}_{ED}^r$ , напрямленого перпендикулярно до лінії  $DE$  ( $\vec{a}_{ED}^r \perp \vec{a}_{ED}^n$ ), потім через полюс  $\pi$  – напрямок прискорення точки  $E$ . Тоді точка перетину напрямків прискорень  $\vec{a}_E$  і  $\vec{a}_{ED}^r$  визначить точку  $E$  – кінець векторів  $\vec{a}_E$  і  $\vec{a}_{ED}^r$ . З'єднавши

точки  $d$  і  $E$ , знайдемо вектор повного відносного прискорення  $\vec{a}_{ED} = \vec{a}_{ED}^n + \vec{a}_{ED}^r$ , тим самим побудуємо план прискорень шатуна  $DE$ . Напрявлений відрізок  $\overrightarrow{n_4 d}$  визначає дотичне прискорення:  $\vec{a}_{ED}^r = \overrightarrow{n_4 e} \cdot \mu_a$ , а спрявлений відрізок  $\overrightarrow{\pi e}$  – вектор повного прискорення точки  $E$ :  $\vec{a}_E = \overrightarrow{\pi e} \cdot \mu_a$ .

Величина кутового прискорення  $\varepsilon_2$  ланки 2 (шатуна  $AB$ ) визначається за формулою

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^r}{l_{AB}}, \quad (2.81)$$

де  $a_{BA}^r = n_2 b \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}$ .

Для визначення напрямку кутового прискорення  $\varepsilon_2$  перенесемо вектор дотичного прискорення  $\vec{a}_{BA}^r$  у точку  $B$  кінематичної схеми механізму і спостерігатимемо, у який бік цей вектор обертатиме шатун  $AB$  відносно вибраного центра обертання (точка  $A$ ). У нашому випадку кутове прискорення  $\varepsilon_2$  спрявлене за рухом годинникової стрілки. Отже, відносний обертальний рух шатуна  $AB$  у цьому положенні прискорений, оскільки кутове прискорення  $\varepsilon_2$  має такий самий напрямок, як у кутовій швидкості  $\omega_2$ .

Аналогічним чином визначають кутові прискорення і їх напрямки кривошипа 3 і шатуна 4

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^r}{l_{CB}}, \quad (2.82)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{ED}^r}{l_{DE}}, \quad (2.83)$$

де  $a_{BC}^r = n_3 b \cdot \mu_a$ ;  $a_{ED}^r = n_4 e \cdot \mu_a, \frac{M}{c^2}$  відповідно.

Кутове прискорення  $\varepsilon_3$  ланки 3 спрявлене проти руху годинникової стрілки. Оскільки  $\varepsilon_3$  має протилежний напрямок кутовій швидкості  $\omega_3$ , тому обертальний рух коромисла  $CB$  у цьому положенні вповільнений. Кутове прискорення  $\varepsilon_4$  ланки 4 спрявлене проти руху годинникової стрілки. Оскільки  $\varepsilon_4$  має такий самий напрямок, як і кутова швидкість  $\omega_4$ , то шатун  $DE$  обертається прискорено.

## 3 ДИНАМІКА

### 3.1 Основи динаміки матеріальної точки

#### 3.1.1 Аксиоми динаміки. Основне рівняння

Динаміка є розподілом теоретичної механіки, що вивчає механічний рух тіл залежно від сил, що впливають на цей рух.

Динаміка ґрунтується на ряді положень, які є аксіомами і називаються законами динаміки. Перш ніж перейти до розгляду цих законів, введемо поняття ізольованої матеріальної точки, тобто точки, на яку не діють інші матеріальні точки. Насправді ізольовані тіла в природі не існують і поняття ізольованої матеріальної точки умовне.

Перший закон динаміки, що називається аксіомою інерції або *першим законом Ньютона*, формулюється стосовно до матеріальної точки так: ізольована матеріальна точка або знаходиться у спокої, або рухається прямолінійно і рівномірно.

У кінематиці було встановлено, що прямолінійний рівномірний рух є єдиним виглядом руху, при якому прискорення дорівнює нулю, тому аксіому інерції можна сформулювати так: прискорення ізольованої матеріальної точки дорівнює нулю.

Отже, ізольована від впливу навколишніх тіл матеріальна точка не може сама собі надати прискорення. Ця властивість тіл називається інерцією або інертністю.

Таким чином, інерція або інертність є здатність тіла зберігати свою швидкість за модулем і напрямом незмінної (у тому числі і швидкістю, рівною нулю).

Змінити швидкість, тобто надати прискорення, може лише прикладена до тіла сила.

Залежність між силою і прискоренням, що надається їй, встановлює другий закон динаміки, або другий закон Ньютона, який формулюється так: прискорення, що надаються матеріальній точці силою, має напрям сили і пропорційно її модулю.

Якщо сила  $F_1$  надає матеріальній точці прискорення  $a_1$ , а сила  $F_2$  – прискорення  $a_2$ , то на підставі другого закону можна записати

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{або} \quad \frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2}. \quad (3.1)$$

Отже, для даної матеріальної точки відношення сили до прискорення є величина постійна. Це відношення позначимо  $m$  і назовемо масою даної матеріальної точки:

$$F/a = m = \text{const}. \quad (3.2)$$

Ця рівність означає, що дві матеріальні точки мають однакові маси, якщо від однієї і тієї ж сили вони отримують однакові прискорення; чим більше маса точки, тим більшу силу треба прикласти, щоб надати точці задане прискорення.

Маса – одна з основних характеристик будь-якого матеріального об'єкта, що визначає його інертні та гравітаційні властивості.

Теорія відносності встановлює таку залежність між масою тіла, що знаходиться у спокої і в русі:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.3)$$

де  $m$  – маса рухомого тіла;  $m_0$  – маса спокою;  $v$  – швидкість руху тіла;  $c$  – швидкість світла.

З цієї формули видно, що чим більше швидкість руху тіла, тим більше його маса і, отже, тим важче надати йому подальше прискорення.

*Другий закон Ньютона* (основний закон динаміки) виражається рівністю

$$F=ma, \quad (3.4)$$

яке називається основним рівнянням динаміки і читається так: сила є вектор, що дорівнює добутку маси на її прискорення.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку.

З досвіду відомо, що під дією тяжіння Землі в порожнечі тіла падають в даному місці з однаковим прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння. Сила тяжіння тіла дорівнює його масі, помноженій на прискорення вільного падіння. Якщо сила тяжіння одного тіла  $G_1=m_1g$ , а другого  $G_2=m_2g$ , то

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{m_1g}{m_2g} = \frac{m_1}{m_2}, \quad (3.5)$$

тобто сили тяжіння тіл пропорційні їх масам, що дозволяє порівнювати маси тіл шляхом їх зважування.

З другого закону Ньютона виходить, що під дією постійної сили вільна матеріальна точка, що знаходилася у спокої, рухається прямолінійно рівнозмінно.

Рух під дією постійної сили може бути і прямолінійним і криволінійним (у останньому випадку матеріальна точка має початкову швидкість, вектор якої не збігається з лінією дії сили).

До основних законів динаміки належить відома із статички аксіома взаємодії, або третій закон Ньютона. Стосовно матеріальної точки закон формулюється так: сили взаємодії двох матеріальних точок за модулем рівні між собою і направлені в протилежні сторони.

### 3.1.2 Принцип незалежності дії сил. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки

Принцип незалежності дії сил формулюється так: при одночасній дії на матеріальну точку декількох сил її прискорення дорівнює векторній сумі прискорень, яку ця точка отримала б від кожної сили окремо.

Нехай до матеріальної точки  $A$  прикладені сили  $F_1$  і  $F_2$ , рівнодійна яких рівна  $F$ . На підставі аксіоми паралелограма запишемо

$$F_1 + F_2 = F. \quad (3.6)$$

Розділимо обидві частини рівності на масу точки, отримаємо

$$\frac{F_1}{m} + \frac{F_2}{m} = \frac{F}{m}. \quad (3.7)$$

Звідки

$$a_1 + a_2 = a. \quad (3.8)$$

Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма, можна стверджувати, що під час одночасної дії на матеріальну точку декількох сил її прискорення буде таким, нібито діяла одна рівнодійна сила

$$F = \sum F_i. \quad (3.9)$$

Користуючись принципом незалежності дії сил, виведемо рівняння руху матеріальної точки в диференціальній формі.

Нехай матеріальна точка  $A$  масою  $m$  рухається в площині креслення під дією сили  $F = \sum F_i$  з прискоренням  $a$ , тоді

$$F = ma. \quad (3.10)$$

Спроекуємо цю векторну рівність на дві взаємно перпендикулярні осі координат  $x$  і  $y$  (осі і вектор сили  $F$  лежать в одній площині) і отримаємо рівняння плоского руху матеріальної точки в координатній формі:

$$F_x = \sum X = ma_x, F_y = \sum Y = ma_y. \quad (3.11)$$

Застосовуючи теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, можна ці рівняння записати у вигляді диференціальних рівнянь плоского руху матеріальної точки:

$$\sum X = m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \sum Y = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (3.12)$$

У цих рівняннях  $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$  – алгебраїчні суми проекцій сил, що діють на точку, на відповідні координатні осі;  $x$  і  $y$  – поточні координати точки.

За допомогою виведених рівнянь вирішуються два основні завдання динаміки:

- за заданим рухом точки визначити сили, що діють на неї;
- знаючи сили, що діють на точку, визначити її рух.

У тих випадках, коли під час розв'язання завдань маємо справу із скованою матеріальною точкою, необхідно застосовувати принцип звільненості. Тобто відкинути зв'язки і замінити їх реакціями, враховуючи останні в рівняннях руху нарівні з активними силами, що діють на точку.

**Приклад 3.1.** Рух тіла масою 0,5 кг виражається рівнянням

$$x=2t, \quad y=3+t-5t^2,$$

де  $x$  і  $y$  – в сантиметрах,  $t$  – у секундах. Визначити силу, що діє на тіло.

*Розв'язання.* Даний приклад відноситься до першого завдання динаміки. Перш за все, користуючись теоремою про проекцію прискорення на координатну вісь, визначимо проекції прискорення на осі  $x$  і  $y$ :

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -10 \text{ см/с}^2 = -0,1 \text{ м/с}^2.$$

Підставивши ці значення в рівняння руху матеріальної точки, отримаємо:

$$X = ma_x = 0,5 \cdot 0 = 0,$$

$$Y = ma_y = 0,5 \cdot (-0,1) = -0,05 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2 = -0,05 \text{ Н}.$$

За проекціями сили, що діє на тіло, видно, що вона паралельна осі ординат, направлена у бік негативних ординат і за модулем дорівнює

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = |Y| = 0,05 \text{ Н}.$$

**Приклад 3.2.** Кривошип  $OA$  довжиною  $l$ , обертаючись рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega$ , переміщує кулісу, що рухається поступально уздовж направляючих  $I-I$  (рис. 3.1). Знайти, нехтуючи тертям, чому при цьому дорівнює сила тиску  $F$  виробу  $A$  на кулісу, якщо сила тяжіння її дорівнює  $G$ .

*Розв'язання.* Даний приклад відноситься до першого завдання динаміки.

Застосуємо принцип звільненості, відкинемо зв'язки куліси і замінимо їх реакціями. Реакція  $N$  перпендикулярна направляючим куліси, а сила тиску  $F$  перпендикулярна кулісі, оскільки за умовою тертям нехтуємо.

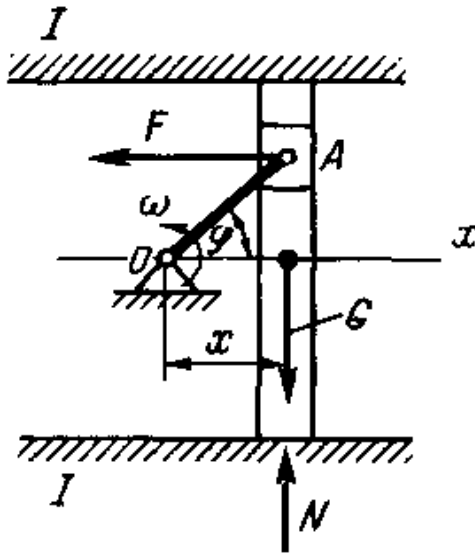


Рисунок 3.1

Куліса рухається зворотно-поступально, отже, всі її точки рухаються однаково. Складемо рівняння руху проекції точки  $A$  на вісь  $x$ , яке і буде кінематичним рівнянням руху куліси:

$$x = l \cos \phi = l \cos \omega t.$$

Застосувавши теорему про проекцію прискорення на координатну вісь, визначимо прискорення куліси

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

Складемо рівняння руху куліси в координатній формі:

$$\sum X = ma_x.$$

Спроекувавши сили, що діють на кулісу, на вісь  $x$  і підставивши значення маси і прискорення, отримаємо

$$F_x = -F = -\frac{G}{g} \omega^2 x,$$

звідки

$$F = \frac{G}{g} \omega^2 x.$$

Отже, сила тиску повзуна на кулісу змінюється пропорційно відстані куліси від осі кривошипа.

**Приклад 3.3.** На матеріальну точку масою 4 кг, яка розташована на гладенькій горизонтальній площині, діє горизонтальна сила  $F=12$  Н. З якою



швидкістю рухатиметься матеріальна точка через  $t=10$  с, якщо до додавання сили ця точка знаходилася у спокої?

*Розв'язання.* Даний приклад відноситься до другого завдання динаміки.

Оскільки дана матеріальна точка розташована на гладенькій горизонтальній площині, то під дією горизонтальної постійної сили  $F$  точка рухатиметься прямолінійно рівноприскорено. Направивши вісь  $x$  уздовж траєкторії точки, запишемо рівняння руху:

$$\sum X = ma_x = ma.$$

Спроекувавши на вісь  $x$  сили, що діють на точку, і підставивши в це рівняння значення маси, визначимо прискорення

$$a = \sum \frac{X}{m} = \frac{F}{m} = \frac{12}{4} = 3 \text{ м/с}^2.$$

Застосуємо формулу швидкості рівноприскореного руху

$$v = v_0 + at.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$v = at = 3 \cdot 10 = 30 \text{ м/с}.$$

**Приклад 3.4.** У результаті отриманого поштовху мікроскладання почала ковзати з початковою швидкістю  $v_0=2$  м/с по нерухомій стрічці конвеєра, розташованого під кутом  $\alpha=\pi/6$  рад до горизонту. Визначити переміщення  $s$  мікроскладання за проміжок часу  $t=2$  с, якщо коефіцієнт тертя ковзання мікроскладання об стрічку конвеєра  $f=0,4$ ; мікроскладання вважати точковою масою (рис. 3.2).

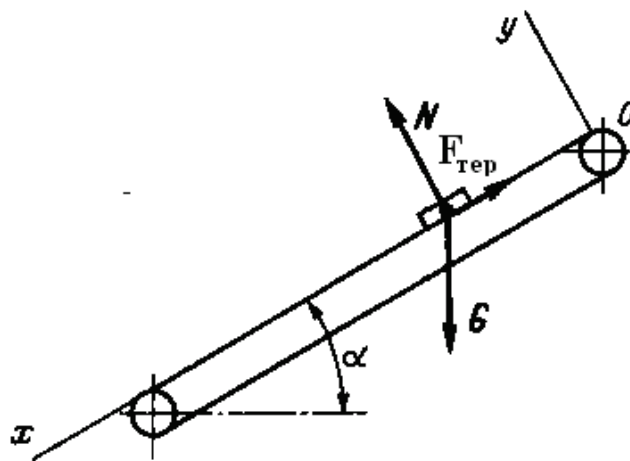


Рисунок 3.2

*Розв'язання.* Даний приклад відноситься до другого завдання динаміки. Виберемо систему координат  $xOy$  так, щоб початок координат був у

початковому положенні тіла, вісь  $x$  була направлена уздовж стрічки конвеєра вниз, а вісь  $y$  – перпендикулярно стрічці конвеєра вгору.

Застосувавши принцип звільненості, розглянемо мікроскладання як матеріальну точку, рухому уздовж осі  $x$  під дією сили тяжіння  $G$ , нормальній реакції  $N$  і сили тертя  $F_{\text{тер}}$ .

Складемо рівняння руху матеріальної точки:

$$\sum X = ma_x; G \sin \alpha - F_{\text{тер}} = \frac{G}{g} a_x, \quad (3.13)$$

$$\sum Y = ma_y; N - G \cos \alpha = \frac{G}{g} a_y. \quad (3.14)$$

Крім того, на підставі другого закону тертя ковзання можна записати

$$F_{\text{тер}} = fN. \quad (3.15)$$

Оскільки матеріальна точка рухається уздовж осі  $x$ , то  $a_y=0$ , внаслідок чого з рівняння (3.14) маємо  $N = G \cos \alpha$ .

Підставивши цей вираз у рівняння (3.8), отримаємо  $F_{\text{тер}} = fG \cos \alpha$ .

Отриманий вираз підставимо в рівняння (3.6):  $G \sin \alpha - fG \cos \alpha = \frac{G}{g} a_x$ .

Скорочуючи цю рівність на  $G$  і враховуючи, що  $ax=a$ , визначимо прискорення мікроскладання:

$$a = g \sin \alpha - gf \cos \alpha,$$

або, виносячи  $g \cos \alpha$  за дужки, отримаємо

$$a = g \cos \alpha (tg \alpha - f).$$

Оскільки права частина цієї рівності містить лише постійні величини, то прискорення мікроскладання – величина постійна, причому можливі три випадки руху:

- якщо  $tg \alpha > f$ , то  $a > 0$  і рух буде рівноприскореним;
- якщо  $tg \alpha = f$ , то  $a = 0$  і рух буде рівномірним;
- якщо  $tg \alpha < f$  то  $a < 0$  і рух буде рівноуповільненим.

Прийнявши формулу шляху рівнозмінного руху, визначимо шлях  $s$ , пройдений мікроскладанням за 2 с:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = v_0 t + g \cos \alpha \frac{(tg \alpha - f)t^2}{2} = 2 \cdot 2 + 9,81 \cdot 0,866 \frac{(0,577 - 0,4)}{2} \approx 7 \text{ м.}$$

За даних в умові прикладів значень  $tg \alpha > f$ , тобто  $a > 0$ , отже, рух мікроскладання був рівноприскореним.

### 3.1.3 Рух матеріальної точки, кинуті під кутом до горизонту

Розглянемо матеріальну точку  $M$  масою  $m$ , кинуту з точки  $O$  поверхні Землі з початковою швидкістю  $v_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту (рис. 3.3).

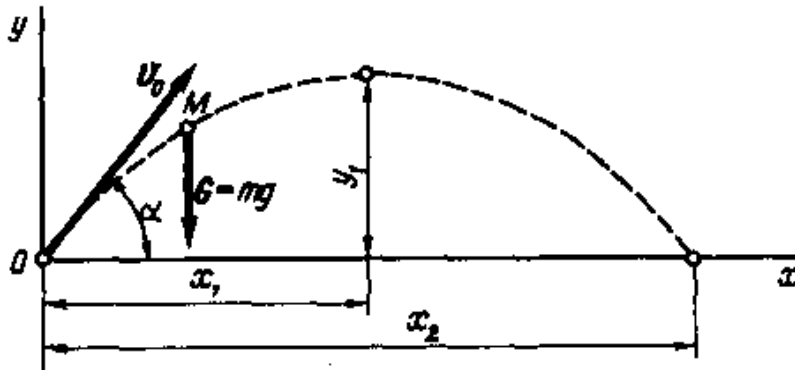


Рисунок 3.3

Визначимо рух точки  $M$ , вважаючи, що на неї діє лише сила тяжіння  $G$  (опором повітря нехтуємо). Візьмемо початок координат у точці  $O$ , вісь  $x$  направимо по горизонталі вправо, а вісь  $y$  – по вертикалі вгору. Складемо диференціальні рівняння руху точки:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -mg. \quad (3.16)$$

Скорочуючи рівність на  $m$ , отримуємо:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g. \quad (3.18)$$

Інтегруючи рівняння (3.17), знаходимо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C_1. \quad (3.19)$$

За теоремою про проекцію швидкості на координатну вісь

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = C_1. \quad (3.20)$$

Отже, проекція швидкості точки  $M$  на вісь  $x$  весь час залишається величиною постійною, і дорівнює

$$v_x = v_0 \cos \alpha. \quad (3.21)$$

З останніх двох рівностей маємо

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v_0 \cos \alpha. \quad (3.22)$$

Інтегруючи це рівняння, отримуємо

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_2. \quad (3.23)$$

За умови при  $t=0$   $x=0$ , отже, довільна постійна  $C_2=0$ . Остаточно

$$x = v_0 t \cos \alpha. \quad (3.24)$$

Інтегруючи рівняння (3.18), знаходимо

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -gt + C_3. \quad (3.25)$$

Підставивши в це рівняння значення  $t=0$ , знайдемо довільну сталу

$$C_3 = v_y = v_0 \sin \alpha. \quad (3.26)$$

Отже,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (3.27)$$

Інтегруючи ще раз, отримуємо

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4. \quad (3.28)$$

За умови при  $t=0$   $y=0$ , отже, довільна постійна  $C_4=0$ . Остаточно

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (3.29)$$

Таким чином, матеріальна точка  $M$ , кинута зі швидкістю  $v_0$  під кутом  $\omega$  до горизонту, рухається згідно з рівняннями

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для визначення траєкторії точки  $M$  виключаємо з отриманих рівнянь руху час. Визначимо час з першого рівняння руху

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (3.31)$$

і підставимо його вираз у друге рівняння, внаслідок чого отримаємо рівняння траєкторії

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3.32)$$

Траєкторія точки  $M$  є параболою з вертикальною віссю симетрії.

Визначимо час польоту точки  $M$ , для чого в друге рівняння руху підставимо значення  $y=0$ . Тоді це рівняння набуде вигляду

$$v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = 0. \quad (3.33)$$

Звідси знаходимо два значення часу, за яких ордината дорівнює нулю:

$$t_0 = 0, t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.34)$$

Перше значення часу відповідає початку польоту, друге – його кінцю.  
Тривалість польоту

$$t_2 - t_0 = t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (3.35)$$

Визначимо дальність польоту, для чого в перше рівняння руху підставимо значення часу  $t^2$ :

$$x_2 = v_0 t_2 \cos \alpha = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (3.36)$$

або

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3.37)$$

З цього рівняння видно, що максимальна дальність польоту  $x_{\max}$  має місце при  $\sin 2\alpha = 1$ , тобто при  $\alpha = \pi/4$  рад:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (3.38)$$

Визначимо найбільшу висоту підйому точки  $M$ , тобто в той момент, коли проекція її швидкості на вісь ординат виявиться рівною нулю:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0. \quad (3.39)$$

З рівності визначимо  $t_1$ :

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_2}{2}. \quad (3.40)$$

Отже, найбільший підйом точки має місце в середині шляху польоту, тобто при

$$x_1 = x_2/2. \quad (3.41)$$

Підставивши значення  $t_1$  у друге рівняння руху, отримаємо

$$y_1 = \frac{v_0 \sin \alpha v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{g v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g^2}, \quad (3.42)$$

звідки

$$y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.43)$$

З цього рівняння видно, що максимальної висоти точка досягає при  $\sin\alpha=1$  або при  $\alpha=\pi/2$  рад, тобто коли точка кинута вертикально вгору:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3.44)$$

**Приклад 13.5.** При аварії обід маховика парової машини розірвався на декілька частин, які відлетіли від місця аварії на різні відстані, залишаючись в площині обертання маховика. Найбільша відстань, на яку відлетіли знайдені шматки, виявилася рівною 280 м. Діаметр маховика  $D=3,5$  м. Визначити кутову швидкість маховика у момент розриву.

*Розв'язання.* При розгляді питання про рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, була отримана формула, що визначає максимальну дальність польоту:

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

З цієї формули визначимо колову швидкість маховика у момент розриву:

$$v_0 = \sqrt{gx_{\max}} = \sqrt{9,8 \cdot 280} = 52,4 \text{ м/с}.$$

При діаметрі маховика  $D=3,5$  м його кутова швидкість у момент розриву дорівнювала

$$\omega = \frac{v_0}{0,5D} = \frac{52,4}{1,75} \approx 30 \text{ рад/с}.$$

Слід зауважити, що насправді кутова швидкість маховика у момент розриву була дещо більше, тому що в розрахунках опором повітря нехтували.

## 3.2 Основи кінетостатики

### 3.2.1 Метод кінетостатики

Уявімо собі матеріальну точку масою  $m$ , що рухається з прискоренням  $a$  під дією якоїсь системи активних і реактивних сил, рівнодійна яких дорівнює  $F$ .

Скористаємося однією з відомих нам формул (основним рівнянням динаміки) для того, щоб рівняння руху записати у формі рівнянь рівноваги (метод кінетостатики):

$$F=ma. \quad (3.45)$$

Перепишемо це рівняння у такому вигляді:

$$F+(-ma)=0. \quad (3.46)$$

Вираз, що стоїть в дужках, позначається  $F^{in}$  і називається силою інерції:

$$F^{in} = -ma. \quad (3.47)$$

Сила інерції є вектор, що дорівнює добутку маси точки на її прискорення і направлений убік, протилежний до прискорення. Тоді

$$F + F^{IH} = 0 \quad \text{або} \quad \Sigma(F, F^{IH}) = 0. \quad (3.48)$$

Цю рівність, що є математичним виразом принципу, який носить ім'я французького вченого Д'Аламбера, можна розглядати як рівняння рівноваги матеріальної точки. Слід підкреслити, що отримана рівність, хоча і називається рівнянням рівноваги, насправді є видозміненим рівнянням руху матеріальної точки.

*Принцип Д'Аламбера формулюється так:* активні та реактивні сили, що діють на матеріальну точку, разом з силами інерції утворюють систему взаємно урівноважених сил, що задовольняє всі умови рівноваги.

Слід пам'ятати, що сила інерції прикладена до даної матеріальної точки, умовна, але для зв'язку, що викликає прискорення, вона в певному значенні є реальною. Володіючи властивістю інерції, будь-яке тіло прагне зберігати свою швидкість за модулем і напрямом незмінною, внаслідок чого воно діятиме на зв'язок, що викликає прискорення, з силою, рівною силі інерції. Як приклад дії сил інерції можна навести випадки руйнування маховиків при досягненні ними критичної кутової швидкості. У будь-якому тілі, що обертається, діють сили інерції, оскільки кожна частка цього тіла має прискорення, а сусідні частки є для неї зв'язками.

Пояснимо це на прикладі (рис. 3.4, а).

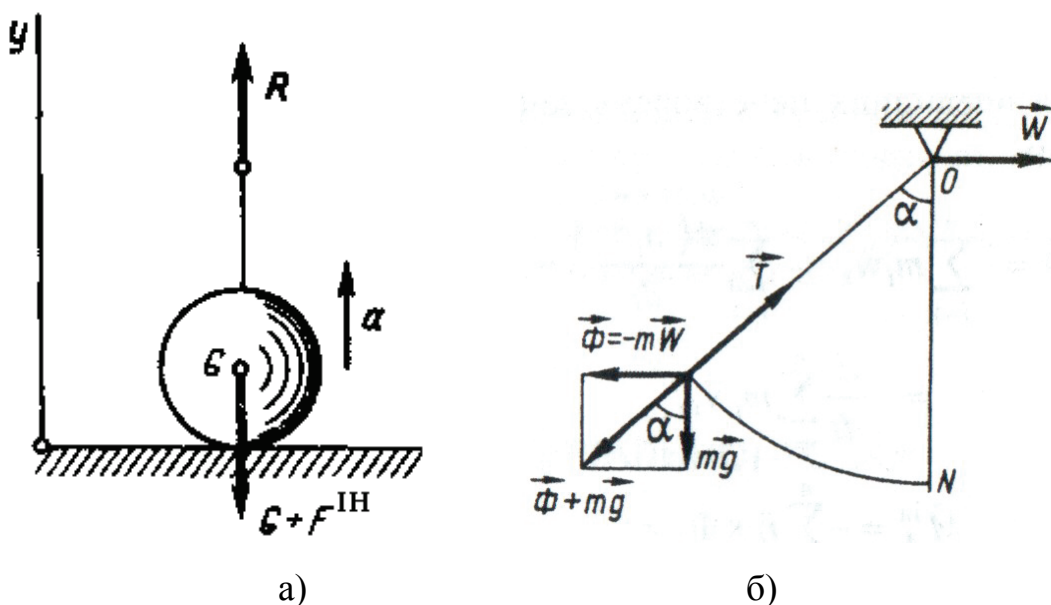


Рисунок 3.4

Нехай до тіла, розташованого на горизонтальній поверхні, прив'язана нитка, здатна витримувати силу тяжіння  $G$  цього тіла. Якщо до нитки прикласти силу  $R$  статично (поступово), то тіло буде піднято вгору і нитка не

обірветься; якщо силу  $R$  прикласти динамічно (раптово, ривком), то нитка обірветься. Це явище пояснюється таким чином.

Щоб підняти вантаж, потрібно надати йому будь-яке прискорення  $a$ . Для визначення величини натягнення нитки застосуємо принцип Д'Аламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; R - G - F^{In} = 0. \quad (3.49)$$

Звідки

$$R = G + F^{In} = G + ma. \quad (3.50)$$

У першому випадку вантажу повідомляється невелике прискорення і сила інерції, що збільшує натягнення нитки, невелика; у другому випадку прискорення, що надається тілу, значне і сила інерції відповідно зростає. В обох випадках сила інерції не збільшує тиск на опору, оскільки прикладена до тіла умовно.

Зазначимо, що вагою тіла називається сила, з якою тіло внаслідок тяжіння Землі діє на опору (або підвіс), що утримує його від вільного падіння. Якщо тіло і опора нерухомі, то вага тіла дорівнює його силі тяжіння.

**Приклад 3.6.** Визначити кут  $\alpha$ , на який відхилиться маятник від вертикалі  $ON$  під час руху горизонтальної основи з прискоренням  $\vec{w}$ , що лежить у горизонтальній площині.

*Розв'язання.* Замінімо дію нитки на маятник її реакцією  $\vec{T}$ .

При цьому задані: вага маятника  $m\vec{g}$ , реакція нитки  $\vec{T}$  і сила інерції  $\vec{\Phi} = m\vec{w}$  (рис. 3.4, б).

У відхиленому положенні на кут  $\alpha$  сума моментів усіх сил відносно точки підвішування  $O$  має дорівнювати нулю.

Оскільки  $\vec{T}$  завжди проходить через  $O$ , то очевидно, що вектор  $\vec{\Phi} + m\vec{g}$  також має бути напрямлений по нитці.

З рис. 3.4, б випливає  $\operatorname{tg}\alpha = w/g$ . Звідси видно, що кут  $\alpha$  не залежить від вертикалі в разі руху точок їх підвішування з однаковим прискоренням.

### 3.2.2 Сили інерції під час криволінійного руху

У криволінійному русі точки повне прискорення дорівнює векторній сумі дотичного і нормального прискорень (рис. 3.5).

Дотичне прискорення  $a_t = \partial v / \partial t$ , нормальне прискорення  $a_n = v^2 / \rho$ , повне прискорення  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ .



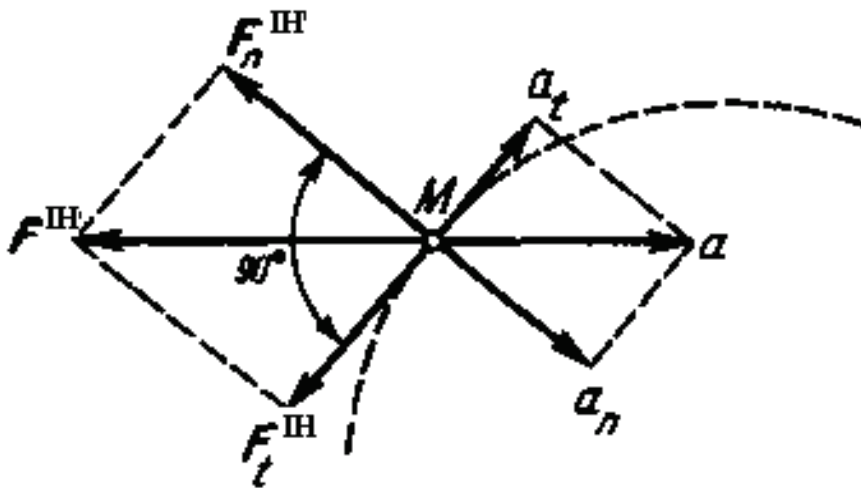


Рисунок 3.5

Кожному прискоренню відповідає своя сила інерції:

$$F_t^{IH} = m \frac{\partial v}{\partial t} \text{ – дотична, або тангенціальна;}$$

$$F_n^{IH} = \frac{mv^2}{\rho} \text{ – нормальна, або відцентрова;}$$

$$F^{IH} = ma \text{ – повна.}$$

Як приклад розглянемо рівномірний рух по колу, що розташоване на горизонтальній площині, виробу силою тяжіння  $G$ , прив'язаного до невагомої нитки завдовжки  $r$ , розташованою в тій самій площині (рис. 3.6, а). Щоб нитка залишалася в площині руху каменя, передбачається, що він ковзає по ідеальній гладенькій горизонтальній площині. Швидкість виробу позначимо  $v$ . Тоді

$$F_n^{IH} = \frac{mv^2}{r} \text{ – відцентрова сила інерції (ця сила натягує нитку); } R = \frac{mv^2}{r} \text{ –}$$

доцентрова сила, прикладена до виробу (ця сила утримує виріб на колі).

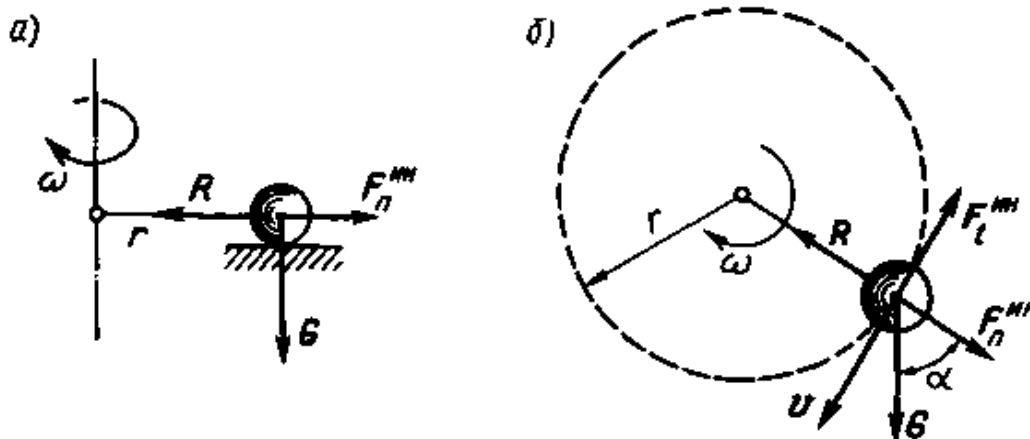


Рисунок 3.6

Відцентрова і доцентрова сили (дія і протидія) за третім законом Ньютона рівні за модулем і направлені в протилежні сторони. Очевидно, що дотична сила інерції  $F_t^{IH}$  в цьому випадку дорівнює нулю, оскільки  $v = \text{const}$ .

При достатній швидкості нитка може розірватися і виріб полетить по дотичній до кола, тобто за напрямом швидкості, що є у момент розриву. Це доводить, що відцентрова сила інерції є реальна сила для зв'язку, але до тіла вона прикладена умовно.

Всередині тіл, рухомих з прискоренням, також виникають внутрішні сили інерції, оскільки для кожної частки тіла сусідні частки є зв'язками.

Знайдемо, чому дорівнює натягнення нитки, якщо виріб рухається по колу, що лежать у вертикальній площині (рис. 3.6, б). Для визначення натягнення  $R$  нитки застосуємо принцип Д'Аламбера, тобто прикладемо до виробу нормальну силу інерції  $F_n^{IH}$  і дотичну силу інерції  $F_t^{IH}$ .

Спроекуємо всі сили на напрям нитці, внаслідок чого отримаємо

$$R - G \cos \alpha - F_n^{IH} = 0, \quad (3.51)$$

звідки

$$R = F_n^{IH} + G \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} + G \cos \alpha. \quad (3.52)$$

Натягнення нитки максимальне при  $\alpha=0$ , тобто коли виріб знаходиться в нижньому положенні:

$$R_{\max} = \frac{mv^2}{r} + G. \quad (3.53)$$

Натягнення нитки мінімальне при  $\alpha=\pi$  рад, тобто коли виріб у верхньому положенні:

$$R_{\min} = \frac{mv^2}{r} - G. \quad (3.54)$$

Під впливом сили тяжіння виробу модуль його швидкості  $v$  змінюватиметься і досягатиме найменшого значення у верхньому положенні і найбільшого – в нижньому.

Якщо виразити лінійну швидкість виробу через кутову швидкість нитки

$$v = \omega r, \quad (3.55)$$

то формула відцентрової сили інерції матиме вигляд

$$F_n^{IH} = m\omega^2 r. \quad (3.56)$$

**Приклад 3.7.** Вантаж  $G=10$  Н, підвішений на нитці завдовжки  $l=0,3$  м у нерухомій точці  $O$ , є конічним маятником, тобто описує коло в горизонтальній

площині, причому нитка складає з вертикаллю кут  $60^\circ$  (рис. 3.7). Визначити швидкість  $v$  вантажу і натягнення  $R$  нитки.

*Розв'язання.* Оскільки нитка складає з вертикаллю постійний кут, то швидкість вантажу постійна, дотичне прискорення вантажу і дотична сила інерції дорівнюють нулю. Застосуємо принцип Д'Аламбера, тобто прикладемо до вантажу відцентрову силу інерції  $F_n^{IH}$ , реакцію  $R$  нитки і складемо два рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; R \sin 60^\circ + F_t^{IH} = 0,$$

$$\sum Y = 0; R \cos 60^\circ - G = 0,$$

$$\text{де } F_t^{IH} = ma_n = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} + \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ}.$$

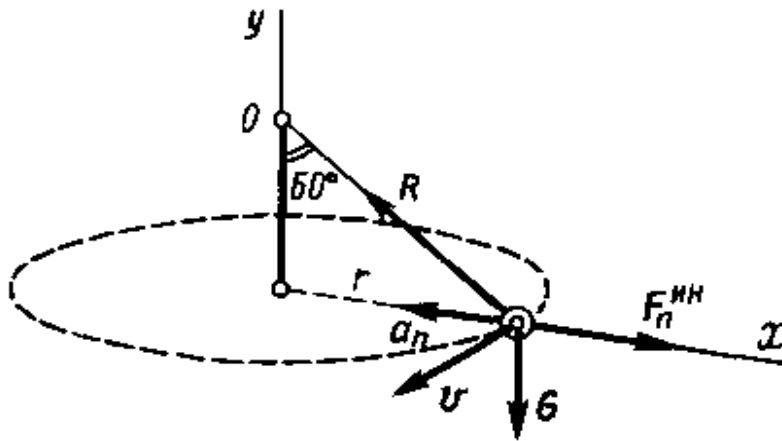


Рисунок 3.7

З другою рівняння визначимо

$$R = \frac{G}{\cos 60^\circ} = \frac{10}{0,5} = 20 \text{ Г } 10 \text{ Н}$$

і підставимо в перше рівняння

$$-\frac{G}{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ + \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{l \sin 60^\circ} = 0;$$

звідси

$$v^2 = -gl \frac{\sin^2 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 9,8 \cdot 0,3 \cdot \frac{0,866^2}{0,5}; v = 2,1 \text{ м/с.}$$

**Приклад 3.8.** Визначити швидкість  $v$  штучного супутника Землі, рухомого по круговій орбіті на висоті  $h=230$  км від поверхні Землі.

Зміною прискорення вільного падіння і опором повітря нехтувати. Радіус Землі вважати рівним  $R=6370$  км.

*Розв'язання.* Після того, як ракета вивела супутник масою  $m$  на задану орбіту і надала йому швидкість  $v$ , дотичну до орбіти, супутник продовжує рух під дією однієї лише сили тяжіння Землі. Для визначення швидкості  $v$  супутника застосуємо принцип Д'Аламбера, тобто прикладемо до супутника відцентрову силу інерції і складемо рівняння рівноваги, спроектувавши сили на вісь, що проходить через супутник і центр Землі:

$$mg - F_t^{IH} = 0.$$

Оскільки

$$F_t^{IH} = \frac{mv^2}{R+h},$$

то

$$mg - \frac{mv^2}{R+h} = 0.$$

Скоротивши рівність на  $m$ , визначимо швидкість супутника:

$$v = \sqrt{g(R+h)}.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$v = \sqrt{9,81 \cdot (6370 + 230) \cdot 1000} \approx 8000 \text{ м/с} = 8 \text{ км/с}.$$

Ця швидкість, при якій супутник Землі тримається на круговій орбіті на відносно невеликій висоті, називається першою космічною швидкістю.

**Приклад 3.9.** На яку висоту  $h$  треба запустити штучний супутник Землі, призначений для наддалеких телепередач, щоб він здавався нерухомим по відношенню до Землі? Орбіту супутника приблизно вважати колом, концентричним екватору.

Радіус  $R$  Землі прийняти рівним 6370 км, а кутову швидкість обертання Землі довкола своєї осі  $\omega=0,7 \cdot 10^{-4}$  рад/с (рис. 3.8).

*Розв'язання.* Введемо такі позначення:  $m$  – маса супутника;  $G$  – сила тяжіння супутника на поверхні Землі;  $M$  – маса Землі;  $v$  – швидкість руху супутника.

На підставі закону всесвітнього тяжіння сила  $F$ , з якою супутник притягується до Землі, на висоті  $h$  дорівнює

$$F = \frac{\gamma mM}{(R+h)^2},$$

де  $\gamma$  – гравітаційна стала.

При  $h=0$

$$F_1 = G = \frac{\gamma m M}{R^2}.$$

Відцентрова сила інерції  $F_n^{IH}$  супутника на висоті  $h$  дорівнює

$$F_n^{IH} = \frac{m v^2}{R+h}.$$

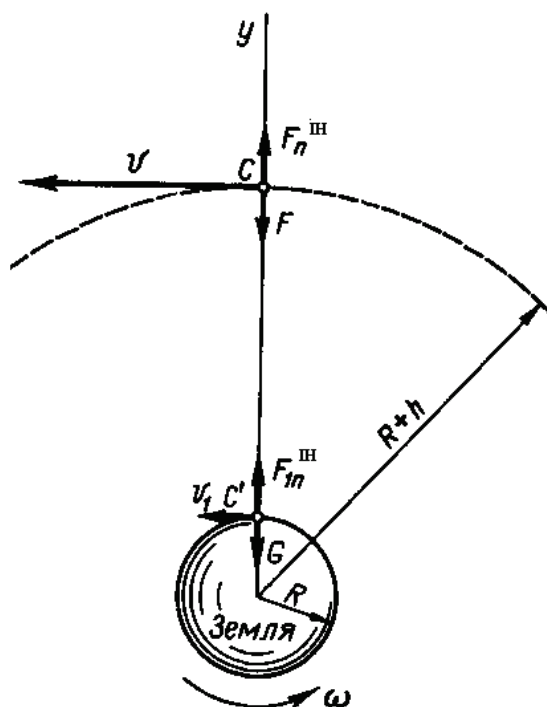


Рисунок 3.8

На підставі принципу Д'Аламбера

$$\sum Y = 0; F_i^{IH} - F = 0,$$

отже,

$$F_i^{IH} = F \text{ або } \frac{m v^2}{R+h} = \frac{\gamma m M}{(R+h)^2}.$$

Оскільки  $v = \omega(R+h)$ , то після підстановки і скорочень отримаємо

$$\omega^2 (R+h)^3 = \gamma M. \quad (3.57)$$

Якби супутник летів на невеликій відстані від поверхні Землі, то цією відстанню можна було б нехтувати і тоді

$$G = F_1$$

або

$$mg = \frac{\gamma m M}{R^2}.$$

Звідси

$$gR^2 = \gamma M. \quad (3.58)$$

З рівностей (3.57) і (3.58) отримаємо

$$\omega(R+h)^3 = gR^2,$$

звідки

$$h^3 \sqrt{\frac{gR^2}{\omega^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{9,81 \cdot 6370^2 \cdot 10^6}{(0,7 \cdot 10^{-4})^2}} - 6370 \cdot 10^3 \approx 35800 \cdot 10^3 \text{ м} = 35800 \text{ км.}$$

### 3.3 Робота і потужність

#### 3.3.1 Робота постійної сили на прямолінійній ділянці шляху

Розглянемо матеріальну точку  $M$ , до якої прикладена сила  $F$ . Нехай точка перемістилася прямолінійно з положення  $M_0$  у положення  $M_1$ , пройшовши шлях  $s$  (рис. 3.9).

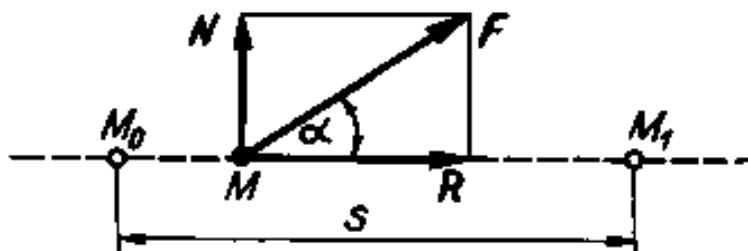


Рисунок 3.9

Щоб встановити кількісну міру дії сили  $F$  на шляху  $s$ , розкладемо цю силу на складові  $N$  і  $R$ , направлені відповідно перпендикулярно напрямку переміщення і уздовж нього. Оскільки складова  $N$  не може рухати точку або чинити опір її руху в напрямі  $s$ , то дію сили  $F$  на шляху  $s$  можна визначити добутком  $Rs$ . Ця нова величина називається роботою і позначається  $W$ . Отже,

$$W = Rs = Fs \cos \alpha, \quad (3.59)$$

тобто робота сили дорівнює добутку її модуля на шлях і на косинус кута між напрямом сили і напрямом переміщення.

Таким чином, робота є мірою дії сили, прикладеної до матеріальної точки при деякому її переміщенні.

Робота – величина скалярна. Розглянемо три окремі випадки обчислення роботи:

- $\alpha=0$ , у цьому випадку  $W=Fs$ ;
- $\alpha=90^\circ$ , у цьому випадку  $W=0$ ;

–  $\alpha=180^\circ$ , у цьому випадку  $W = -Fs$ .

Отже, робота позитивна, якщо напрям сили і напрям переміщення збігаються (або  $\alpha < 90^\circ$ ); робота від'ємна, якщо напрям сили і напрям переміщення протилежні (або  $\alpha > 90^\circ$ ); робота дорівнює нулю, коли напрям сили і напрям переміщення взаємно перпендикулярні. Так, наприклад, при підйомі тіла вгору робота сили тяжіння від'ємна, під час руху вниз – додатна; під час руху по горизонтальній поверхні робота сили тяжіння дорівнює нулю.

Сили, що здійснюють додатну роботу, називаються рушійними силами, сили, що здійснюють негативну роботу, – силами опору.

### 3.3.2 Робота змінної сили на криволінійній ділянці шляху

На нескінченно малій ділянці  $\partial s$  криволінійний шлях можна вважати прямолінійним, а силу – постійною. Тоді елементарна робота  $\partial W$  на шляху  $\partial s$  дорівнює

$$\partial W = F \partial s \cos(F, \nu). \quad (3.60)$$

Робота на кінцевому переміщенні дорівнює сумі елементарних робіт:

$$W = \int_0^s F \cos(F, \nu) \partial s. \quad (3.61)$$

Побудуємо графік, що виражає залежність між  $F \cos(F, \nu)$  і пройденою відстанню  $s$  (рис. 3.10, а).

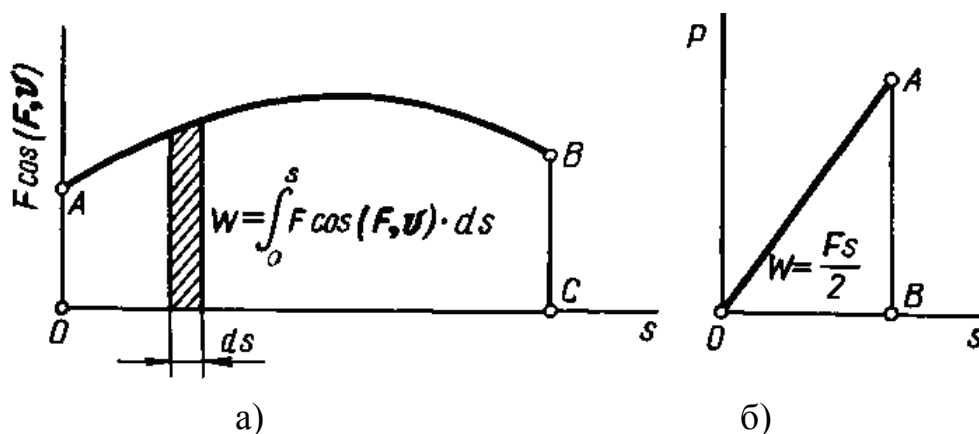


Рисунок 3.10

Площа заштрихованої смужки, яку можна прийняти за прямокутник, дорівнює елементарній роботі на шляху  $\partial s$ :

$$\partial W = F \cos(F, \nu) \partial s, \quad (3.62)$$

а робота сили  $F$  на кінцевому шляху  $s$  графічно виражається площею фігури  $OABC$ , обмеженою віссю абсцис, двома ординатами і кривою  $AB$ , яка називається кривою сил.

Якщо сила збігається з напрямом переміщення і зростає від нуля пропорційно шляху, то робота графічно виражається площею трикутника  $OAB$  (рис. 3.10, б) і дорівнює половині добутку сили на шлях:

$$W = \frac{Fs}{2}. \quad (3.63)$$

### 3.3.3 Теорема про роботу рівнодійної

Теорема. Робота рівнодійної сили на якійсь ділянці шляху дорівнює алгебраїчній сумі сил складових на тій самій ділянці шляху.

Нехай до матеріальної точки  $M$  прикладена система сил  $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n)$ , рівнодійна яких дорівнює  $F_\Sigma$  (рис. 3.11).

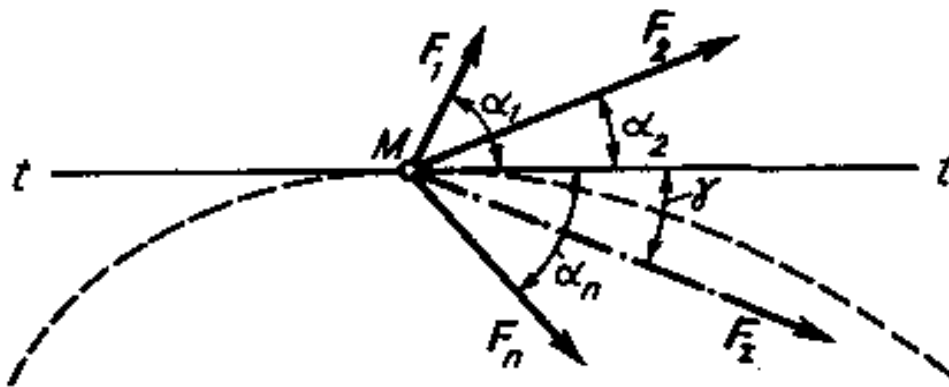


Рисунок 3.11

Система сил, прикладених до матеріальної точки, є системою сил, що збігаються, отже,

$$F_\Sigma = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n. \quad (3.64)$$

Спроектуємо цю векторну рівність на дотичну до траєкторії, тоді

$$F_\Sigma \cos \gamma = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 + \dots + F_n \cos \alpha_n. \quad (3.65)$$

Помножимо обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення  $\partial s$  і проінтегруємо цю рівність в межах якогось кінцевого переміщення  $s$ :

$$\int_0^s F_\Sigma \cos \gamma \partial s = \int_0^s F_1 \cos \alpha_1 \partial s + \int_0^s F_2 \cos \alpha_2 \partial s + \dots + \int_0^s F_n \cos \alpha_n \partial s. \quad (3.66)$$

що дає рівність

$$W_\Sigma = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots + W_{F_n}, \quad (3.67)$$

або скорочено

$$W_\Sigma = \sum W_{F_i}. \quad (3.68)$$

Теорема доведена.



**Приклад 3.10.** Обчислити роботу, яка виконується під час рівномірного підйому вантажу  $G=200$  Н по похилій поверхні на відстань  $s=6$  м, якщо кут, що утворюється поверхнею з горизонтом,  $\alpha=30^\circ$ , а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f=0,01$  (рис. 3.12).

*Розв'язання.* Розкладемо силу тяжіння  $G$  вантажу на дві взаємно перпендикулярні складові  $G_1$  і  $G_2$  – відповідно паралельну і перпендикулярну похилій поверхні. Згідно з другим законом тертя ковзання, сила тертя  $F_{\text{тр}}$  дорівнює

$$F_{\text{тр}} = fG_2 = fG \cos \alpha.$$

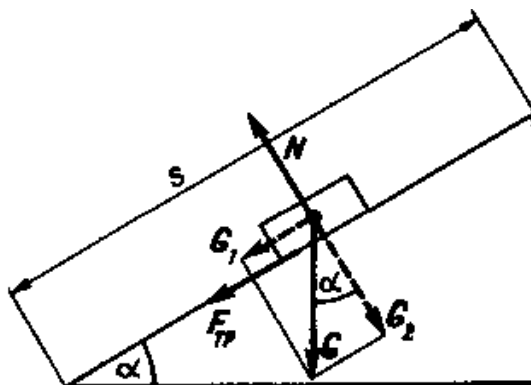


Рисунок 3.12

Застосувавши теорему про роботу рівнодійної, обчислимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили  $G_2$  і нормальній реакції  $N$  дорівнює нулю, оскільки ці сили перпендикулярні напрямку переміщення  $s$ ):

$$W_{\Sigma} = G_1 s + F_{\text{тр}} s = Gs \sin \alpha + fGs \cos \alpha.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$W_{\Sigma} = 200 \cdot 6 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0,866 = 610,4 \text{ Дж.}$$

### 3.3.4 Теорема про роботу сили тяжіння

**Теорема.** Робота сили тяжіння не залежить від вигляду траєкторії і дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладення.

Нехай матеріальна точка  $M$  рухається під дією однієї лише сили тяжіння  $G$  і за якийсь проміжок часу переміщується з положення  $M_1$  у положення  $M_2$ , пройшовши шлях  $s$  (рис. 3.13).

На траєкторії точки  $M$  виділимо нескінченно малу ділянку  $\delta s$ , яку вважаємо прямолінійною, і з її кінців проведемо прямі, паралельні осям координат, одна з яких вертикальна, а інша горизонтальна. Із заштрихованого трикутника отримаємо, що

$$\delta y = \delta s \cos \alpha. \tag{3.69}$$

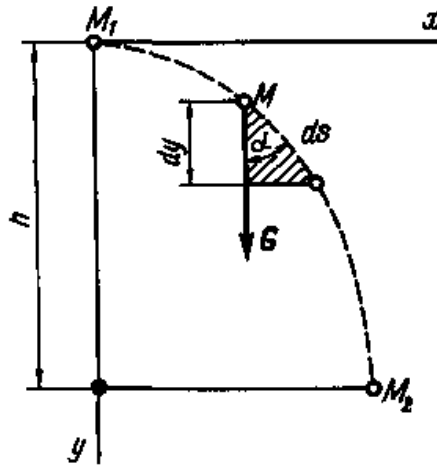


Рисунок 3.13

Елементарна робота сили  $G$  на шляху  $\partial s$  дорівнює

$$\partial W = G \partial s \cos \alpha . \quad (3.70)$$

Повна робота на шляху  $s$  дорівнює

$$W = \int_0^s G \partial s \cos \alpha = \int_0^h G \partial y = G \int_0^h \partial y = Gh . \quad (3.71)$$

Отже,

$$W = Gh . \quad (3.72)$$

Теорема доведена.

Сили, робота яких не залежить від вигляду траєкторії, називаються потенційними. До таких сил належать, наприклад, сила тяжіння.

**Приклад 3.11.** Однорідний масив  $ABCD$  масою  $m=4080$  кг має розміри, вказані на рис. 3.14. Визначити роботу, яку необхідно витратити на перекидання масиву довкола ребра  $D$ .

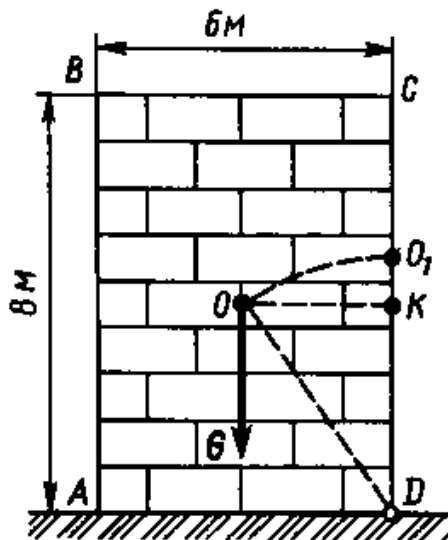


Рисунок 3.14

*Розв'язання.* Визначимо силу тяжіння  $G$  масиву:

$$G = mg = 4080 \cdot 9,81 = 40 \cdot 10^3 \text{ Н} = 40 \text{ кН.}$$

Робота, яку необхідно витратити на перекидання масиву, дорівнює роботі сили опору, тобто сили тяжіння. Для того, щоб перевернути масив, необхідно його центр тяжіння  $O$  (що знаходиться в геометричному центрі, оскільки масив однорідний) перевести в положення  $O_1$ , після чого масив продовжить перевертатися під дією сили тяжіння, яке перетвориться з сили опору в рушійну силу.

Шукану роботу визначимо, застосувавши теорему про роботу сили тяжіння:

$$\begin{aligned} W = GKO_1 &= G(OD - KD) = G\left(\sqrt{OK^2 + KD^2} - KD\right) = \\ &= 40 \cdot 10^3 \left(\sqrt{3^2 + 4^2} - 4\right) = 40 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 40 \text{ кДж.} \end{aligned}$$

### 3.3.5 Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається

Уявімо собі диск, що обертається довкола нерухомої осі під дією постійної сили  $F$  (рис. 3.15), точка прикладення якої переміщається разом з диском.

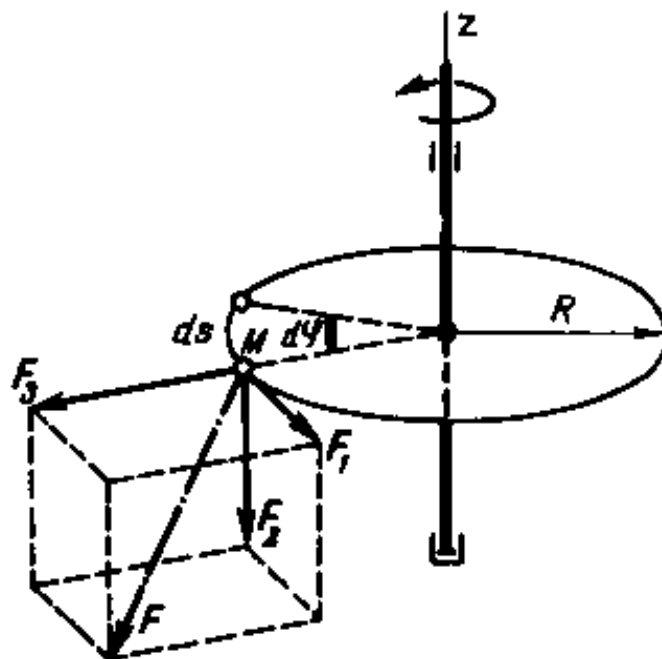


Рисунок 3.15

Розкладемо силу  $F$  на три взаємно перпендикулярні складові:  $F_1$  – колова сила,  $F_2$  – вісьова сила,  $F_3$  – радіальна сила. При повороті диска на нескінченно малий кут  $\partial\phi$  сила  $F$  зробить елементарну роботу, яка на підставі теореми про роботу рівнодієюю дорівнюватиме сумі робіт складових. Робота

складових  $F_2$  і  $F_3$  дорівнює нулю, оскільки вектори цих сил перпендикулярні нескінченно малому переміщенню  $\delta s$  точки прикладання  $M$ , тому елементарна робота сили  $F$  дорівнює роботі складової  $F_1$ :

$$\partial W = F_1 \delta s = F_1 R \delta \phi. \quad (3.73)$$

При повороті диска на кінцевий кут  $\phi$  робота сили  $F$  дорівнює

$$W = \int_0^\phi F_1 R \delta \phi = F_1 R \int_0^\phi \delta \phi = F_1 R \phi, \quad (3.74)$$

де кут  $\phi$  виражається в радіанах.

Оскільки моменти складових  $F_2$  і  $F_3$  відносно осі  $z$  дорівнюють нулю, то на підставі теореми Варіньона момент сили  $F$  відносно осі  $z$  дорівнює

$$M_z(F) = F_1 R. \quad (3.75)$$

Момент сили, прикладеної до диска відносно осі обертання, називається обертальним моментом і позначається  $T$ :

$$T = M_z(F), \quad (3.76)$$

отже,

$$W = T \phi. \quad (3.77)$$

Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює добутку обертального моменту на кутове переміщення.

**Приклад 3.12.** Робітник обертає рукоятку лебідки з силою  $F=200$  Н, перпендикулярною радіусу обертання. Знайти роботу, витрачену протягом 25 с, якщо довжина рукоятки  $r=0,4$  м, а кутова швидкість її  $\omega=\pi/3$  рад/с.

*Розв'язання.* Перш за все визначимо кутове переміщення  $\phi$  рукоятки лебідки за 25 с:

$$\phi = \omega t = \frac{\pi}{3} 25 = 26,18 \text{ рад.}$$

Далі скористаємося формулою для визначення роботи сили при обертальному русі:

$$W = T \phi = Fr \phi.$$

Підставивши числові значення, отримаємо

$$W = 200 \cdot 0,4 \cdot 26,18 \approx 2100 \text{ Дж} = 2,1 \text{ кДж.}$$

### 3.3.6 Потужність

Робота, що здійснюється якоюсь силою, може бути здійснена за різні проміжки часу. Щоб охарактеризувати, наскільки швидко здійснюється робота, в механіці існує поняття потужності, що позначається  $P$ .

Потужністю сили називається робота, що здійснюється в одиницю часу.

Якщо робота здійснюється рівномірно, то потужність обчислюють за формулою

$$P = W/t. \quad (3.78)$$

Якщо напрям сили і напрям переміщення збігаються, то цю формулу можна переписати в іншій формі:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} \quad \text{або} \quad P = Fv. \quad (3.79)$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість точки її застосування.

Якщо робота здійснюється силою, прикладеною до тіла, що обертається, і притому рівномірно, то потужність в цьому випадку обчислюють за формулою

$$P = W/t = T\phi/t \quad \text{або} \quad P = T\omega. \quad (3.80)$$

Потужність сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює добутку обертового моменту на кутову швидкість.

**Приклад 3.13.** За допомогою ремня передається потужність  $P=14,72$  кВт. Діаметр ремінного шківів  $D=1000$  мм, кутова швидкість  $\omega=5\pi$  рад/с. Передбачаючи натягнення  $S_1$  ведучої гілки ремня удвічі більшим натягнення  $S_2$  веденої гілки, визначити  $S_1$  і  $S_2$  (рис. 3.16).

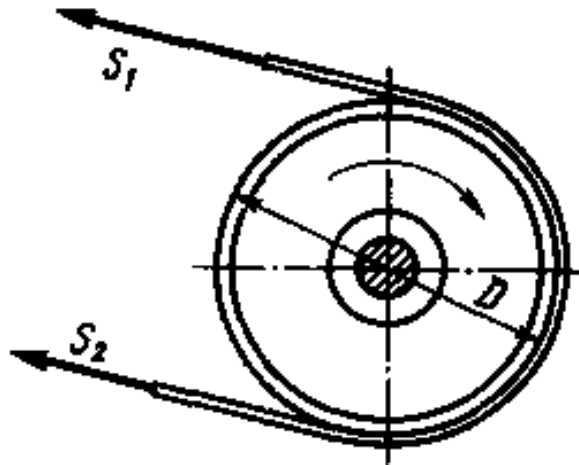


Рисунок 3.16

*Розв'язання.* Різниця натягнення гілок дорівнює силі тертя, що діє між ремнем і шківом, і в даному випадку є коловою силою. Обертальний момент, що діє на шків, дорівнює

$$T = \frac{(S_1 - S_2)D}{2} = \frac{S_2 D}{2}.$$

З іншого боку, обертальний момент можна обчислити, знаючи потужність, що передається, і кутову швидкість

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{14720}{5\pi} = 936 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Тепер можна визначити натягнення  $S_2$  веденої гілки ременя:

$$S_2 = \frac{2T}{D} = \frac{2 \cdot 936}{1} = 1872 \text{ Н}.$$

За умовою натягнення ведучої гілки вдвічі більше натягнення веденою, отже,

$$S_1 = 2S_2 = 2 \cdot 1872 = 3744 \text{ Н}.$$

### 3.3.7 Коефіцієнт корисної дії

Здатність тіла при переході з одного стану в інший здійснювати роботу називається енергією. Енергія є загальна міра різних форм руху матерії.

Відносна кількість енергії, використовуваної в машині за прямим призначенням, характеризується коефіцієнтом корисної дії (к.к.д.), який позначається  $\eta$ . Коефіцієнтом корисної дії називається відношення корисної роботи (або потужності) до витраченої:

$$\eta = \frac{W_n}{W_z} = \frac{P_n}{P_z}. \quad (3.81)$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує лише механічні втрати, то він називається механічним к.к.д.

$$\eta\% = \frac{W_n}{W_z} \cdot 100. \quad (3.82)$$

Наведемо орієнтовні значення к.к.д. для найбільш поширених механізмів і машин:

Металообробні верстати .....	0,8
Кривошипно-повзунний механізм .....	0,95
Черв'ячна передача .....	до 0,92
Теплові двигуни .....	до 0,40
Турбіни .....	0,95
Електродвигуни .....	0,92

Якщо ряд механізмів з'єднаний послідовно, тобто кожен подальший механізм отримує рух від веденої ланки попереднього механізму, то тоді загальний к.к.д.  $\eta$  дорівнює добутку к.к.д. усіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n, \quad (3.83)$$

де  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  – к.к.д. кожного механізму окремо.

Як приклад визначимо *к.к.д.* шорсткої похилої площини з кутом підйому  $\alpha$ , коли тіло силою тяжіння  $G$  рівномірно піднімається по цій площині на висоту  $h$  під дією горизонтальної сили  $F$ .

Якщо шлях, що було пройдено тілом, позначити  $s$ , то корисна робота  $W_n = Gh = Gs \sin \alpha$ , а витрачена робота  $W_s = Fs \cos \alpha = Gtg(\alpha + \phi)s \cos \alpha$ , тоді

$$\eta = \frac{W_n}{W_s} = \frac{Gs \sin \alpha}{Gtg(\alpha + \phi)s \cos \alpha} = \frac{tg \alpha}{tg(\alpha + \phi)}. \quad (3.84)$$

Отже, *к.к.д.* похилої площини, коли рушійна сила горизонтальна, дорівнює

$$\eta = \frac{tg \alpha}{tg(\alpha + \phi)}, \quad (3.85)$$

де  $\alpha$  – кут, який складає похила площина з горизонтом;  $\phi$  – кут тертя.

Як правило *к.к.д.* похилої площини зростає зі збільшенням кута її нахилу.

За такою самою формулою визначається *к.к.д.* під час роботи гвинта і гайки з прямокутною різью (наприклад, у домкраті). *К.к.д.* гвинтової пари з трапецеїдальною або трикутною різью

$$\eta = \frac{tg \psi}{tg(\psi + \phi')}, \quad (3.86)$$

де  $\psi$  – кут підйому гвинтової лінії різі;  $\phi'$  – приведений кут тертя.

### 3.4 Загальні теореми динаміки матеріальної точки

#### 3.4.1 Теорема про зміну кількості руху

Кількістю руху  $mv$  матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси точки на її швидкість і який має напрям швидкості. Кількість руху є динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху

$$mv = \text{кг} \cdot \text{м/с}. \quad (3.87)$$

Імпульсом  $Ft$  постійної сили  $F$  називається вектор, рівний добутку сили на час її дії. Імпульс сили є міра її дії в часі.

Одиниця імпульсу сили

$$Ft = mat = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}. \quad (3.88)$$

Кількість руху й імпульс сили виражаються в однакових одиницях, зв'язок між ними встановлює теорема про зміну кількості руху, формульована так: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.

Доведемо цю теорему для випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили  $F$ , у цьому випадку рух буде рівнозмінім, формула швидкості якого записується так:

$$v = v_0 + at. \quad (3.89)$$

Перенесемо  $v_0$  у ліву частину і помножимо обидві частини рівності на масу  $m$  матеріальної точки:

$$mv - mv_0 = mat. \quad (3.90)$$

Але добуток маси точки на її прискорення є сила, під дією якої точка рухається; отже,

$$mv - mv_0 = Ft. \quad (3.91)$$

У лівій частині рівності маємо зміну кількості руху за час  $t$ , а в правій – імпульс сили за той самий проміжок часу, що і потрібно було довести.

Якщо рух сповільнений ( $v < v_0$ ), то вектор сили направлений убік, протилежний до вектора швидкості, і, отже, в останню формулу силу треба підставляти з негативним знаком.

В разі криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної з модуля і напрямку сили весь проміжок часу  $t$  можна розбити на нескінченно малі проміжки, в межах яких вектор сили можна вважати постійним, а шлях – прямолінійним, тоді імпульс сили за кінцевий проміжок часу  $t$  дорівнюватиме сумі елементарних імпульсів. У цьому випадку математичний вираз теореми про зміну кількості руху набуває такого вигляду:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F \partial t. \quad (3.92)$$

Якщо до матеріальної точки прикладені декілька постійних сил, то зміна кількості руху дорівнюватиме сумі (алгебраїчно, якщо сили діють по одній прямій, або векторною, якщо сили діють під кутом один до одного) імпульсів даних сил:

$$mv - mv_0 = \sum(F_i t). \quad (3.93)$$

**Приклад 3.14.** Тіло спускається без початкової швидкості по похилій поверхні, що утворює з горизонтом кут  $\alpha=30^\circ$  (рис. 3.17). Визначити час  $t$ , протягом якого швидкість руху тіла досягне 13,9 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання  $f=0,25$ .

*Розв'язання.* Розглянемо тіло як матеріальну точку, рухому під дією сили тяжіння  $G$ , сили тертя  $F_{\text{тер}}$  і нормальної реакції  $N$  похилої поверхні.



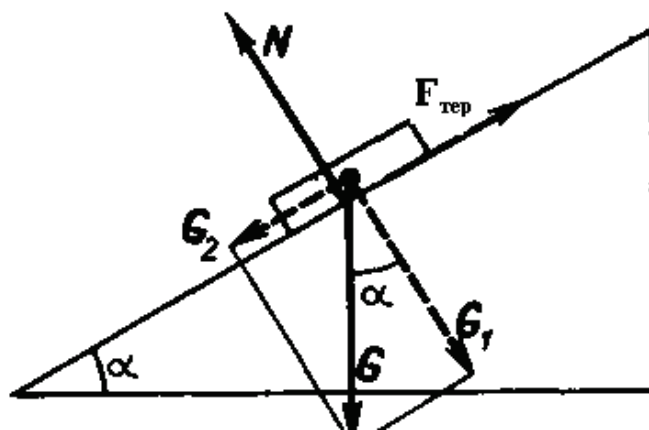


Рисунок 3.17

Розкладемо силу тяжіння  $G$  на складові  $G_1$  і  $G_2$ , одна з яких перпендикулярна, а інша паралельна похилій поверхні, і застосуємо теорему про зміну кількості руху:

$$mv - mv_0 = \sum (F_i t).$$

Спроекуємо цю векторну рівність на напрям похилої поверхні, внаслідок чого отримаємо

$$mv - mv_0 = G_2 t - F_{mp} t.$$

Застосувавши другий закон тертя ковзання і підставивши значення, отримаємо

$$\frac{Gv}{g} = (G \sin \alpha - fG \cos \alpha) t,$$

звідки

$$t = \frac{v}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)} = \frac{13,9}{9,81(0,5 - 0,25 \cdot 0,866)} = 5 \text{ с.}$$

### 3.4.2 Теорема про зміну кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення і взаємодії тіл. Механічна енергія буває двох видів: кінетична і потенціальна.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називається енергія, якою володіє будь-яка матеріальна точка під час руху. Кінетична енергія є динамічна міра руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.94)$$

*Кінетична енергія – величина скалярна і завжди позитивна.*

Кінетична енергія має розмірність роботи. Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює теорема про зміну кінетичної енергії, сформульована так: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж шляху.

Доведемо цю теорему для найзагальнішого випадку руху матеріальної точки, тобто для випадку криволінійного руху під дією змінної сили (рис. 3.18). Запишемо для цієї точки основне рівняння динаміки:

$$ma = F, \quad (3.95)$$

де  $F$  – сила, що діє на точку;  $a$  – повне прискорення точки;  $m$  – маса точки.

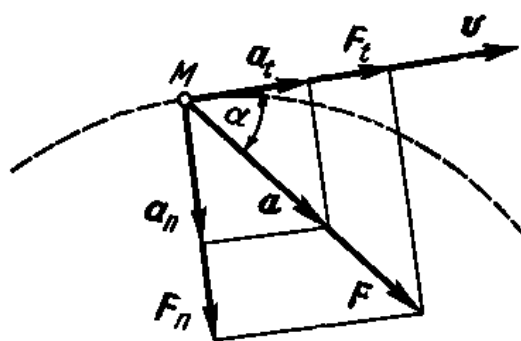


Рисунок 3.18

Спроектуємо цю векторну рівність на напрям швидкості  $v$  точки:

$$ma \cos \alpha = F_t = F \cos \alpha. \quad (3.96)$$

Як відомо з кінематики,

$$a \cos \alpha = a_t = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (3.97)$$

отже,

$$m \frac{\partial v}{\partial t} = F \cos \alpha. \quad (3.98)$$

Помноживши обидві частини рівності на нескінченно мале переміщення  $\delta s$ , отримаємо

$$m \frac{\partial v}{\partial t} \delta s = F \cos \alpha \delta s. \quad (3.99)$$

Вираз, що стоїть в лівій частині рівності, перетворимо так:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} \delta s = m \delta v \frac{\delta s}{\delta t} = m v \delta v, \quad (3.100)$$

отже,

$$m v \delta v = F \cos \alpha \delta s. \quad (3.101)$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах для швидкості від  $v_0$  до  $v$  і для шляху від 0 до  $s$ :

$$m \int_{v_0}^v v \partial v = \int_0^s F \cos \alpha \partial s . \quad (3.102)$$

Отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W , \quad (3.103)$$

де  $W$  – робота сили  $F$  на шляху  $s$ . Теорема доведена.

При сповільненому русі ( $v < v_0$ ) складова  $F_t$ , що викликає дотичне прискорення  $a_t$ , буде направлена убік, протилежний до напрямку вектора швидкості  $v$ , і робота сили  $F$  буде негативною.

Складова  $F_n$ , що викликає нормальне прискорення  $a_n$ , роботи не здійснює, оскільки ця складова в кожен даний момент перпендикулярна елементарному переміщенню точки прикладення сили  $F$ .

Якщо до матеріальної точки прикладені декілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнює алгебраїчній сумі цих сил:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum W_i . \quad (3.104)$$

**Приклад 3.15.** Головну частину приладу для випробування матеріалів ударом складає сталеві важка відливка  $M$ , прикріплена до стрижня, який може обертатися майже без тертя довкола нерухокої горизонтальної осі  $O$  (рис. 3.19). Нехтуючи масою стрижня, розглядаємо відливку  $M$  як матеріальну точку, для якої відстань  $MO = 0,918$  м. Визначити швидкість  $v$  цієї точки в найнижчому положенні  $B$ , якщо вона падає з найвищого положення  $A$  з дуже малою початковою швидкістю.

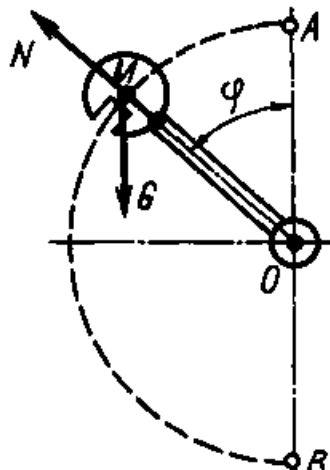


Рисунок 3.19

*Розв'язання.* Позначимо силу тяжіння відливки  $G$ . Застосувавши принцип звільненості і теорему про зміну кінетичної енергії і розглядаючи відливку як матеріальну точку, на яку діють сила тяжіння  $G$  і реакція  $N$  стрижня, направлена уздовж стрижня, отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W_G + W_N.$$

Згідно з теоремою про роботу сили тяжіння, маємо

$$W_G = G \cdot AB = G \cdot 2MO.$$

Робота реакції  $N$  дорівнює нулю, оскільки момент цієї сили відносно осі обертання стрижня дорівнює нулю. Силою тертя, за умовою, нехтуємо.

Підставимо цей вираз роботи в першу формулу і, враховуючи, що  $v_0=0$ , отримаємо

$$\frac{Gv^2}{2g} = G \cdot 2MO.$$

Скоротимо обидві частини рівності на  $G$  і підставимо числові значення, тоді

$$v = \sqrt{2MO \cdot 2g} = 2\sqrt{0,981 \cdot 9,81} = 6,2 \text{ м/с.}$$

**Приклад 3.16.** По рейках, прокладених по дорозі  $AB$  і створюючи потім петлю радіуса  $r$ , рухається транспортний засіб  $M$ , силою  $d$  тяжіння  $G$  (рис. 3.20). З якої висоти  $H$  потрібно пустити вагонетку без початкової швидкості, щоб вона могла пройти все коло кільця, не відокремитися від рейок?

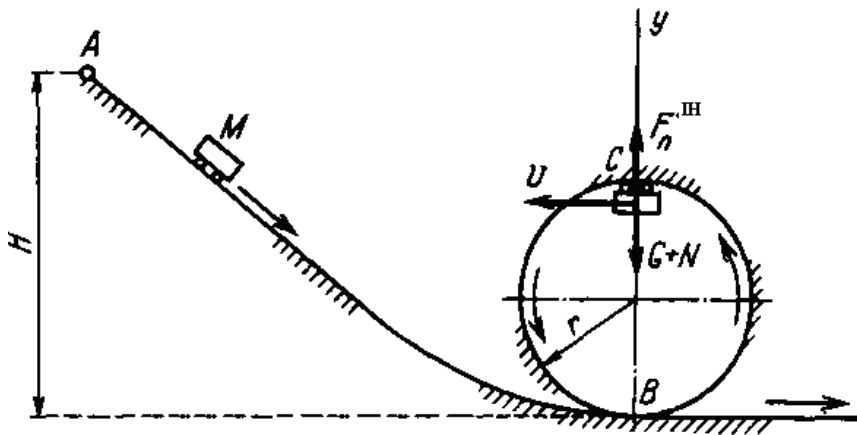


Рисунок 3.20

*Розв'язання.* Розглянемо транспортний засіб як матеріальну точку. Для розв'язання завдання застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії на шляху  $ABC$ :

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = W_G + W_N,$$

причому робота  $W_N$  нормальної реакції  $N$  рейок дорівнює нулю. На підставі теореми про роботу сили тяжіння

$$W_G = G(H - 2r).$$

Оскільки, за умовою,  $v_0=0$ , а  $m=G/g$ , то, підставивши ці вирази в першу формулу, отримаємо

$$\frac{Gv^2}{2g} = (H - 2r)G,$$

Звідки

$$v^2 = 2g(H - 2r). \quad (3.105)$$

Далі застосуємо принцип Д'Аламбера. Прикладемо до транспортного засобу відцентрову силу інерції  $F_n^{IH} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$ , спроектуємо сили, що діють на транспортний засіб, на вісь  $y$  і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0, F_n^{IH} - G - N = 0,$$

де  $N$  – реакція рейок.

Очевидно, що найменше значення відцентрової сили  $F_n^{IH}$ , при якому транспорт не відокремитися від рейок, буде при  $N=0$ . При цьому

$$F_n^{IH} - G = 0 \quad \text{або} \quad \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = G.$$

Звідси

$$v^2 = gr. \quad (3.106)$$

Порівнюючи вирази (3.105) і (3.106) і прирівнявши їх праві частини, отримаємо

$$2g(H - 2r) = gr,$$

звідки

$$H = 2,5r.$$

Очевидно, що значення висоти  $H$ , знайдене з цього виразу, мінімальне.

Звертаємо увагу на те, що під час розв'язання не беруться до уваги сили тертя і опору повітря. Тому для виконання мертвої петлі практично необхідно, щоб  $H > 2,5r$ .

### 3.4.3 Закон збереження механічної енергії

*Енергію взаємодії між тілами називають потенціальною.*

Будь-яка матеріальна точка, піднята на певну висоту  $h$ , також має деяку енергію, яка називається енергією положення і є потенціальною енергією.

Мірою потенціальної енергії в цьому випадку служить робота, яку виконає точка при вільному падінні.

Вважаючи величину  $h$  невеликою порівняно з розмірами Землі, а тому вважаючи постійною силу тяжіння  $G$ , отримаємо вираз для потенціальної енергії  $\Pi$ :

$$\Pi = Gh. \quad (3.107)$$

Потенціальна енергія тіла, піднятого на певну висоту, є величина відносна, залежна від системи відліку, по відношенню до якої обчислюється ця енергія.

Нехай матеріальна точка масою  $m$ , падаючи під дією однієї лише сили тяжіння  $G$ , у положенні  $M_1$  знаходилася на висоті  $h_1$ , мала швидкість  $v_1$  і мала потенціальна енергія  $\Pi_1$  (рис. 3.21). У положенні  $M_2$  точка потенціальна виявилася на висоті  $h_2$ , причому її швидкість стала  $v_2$ , а потенціальна енергія  $\Pi_2$ .

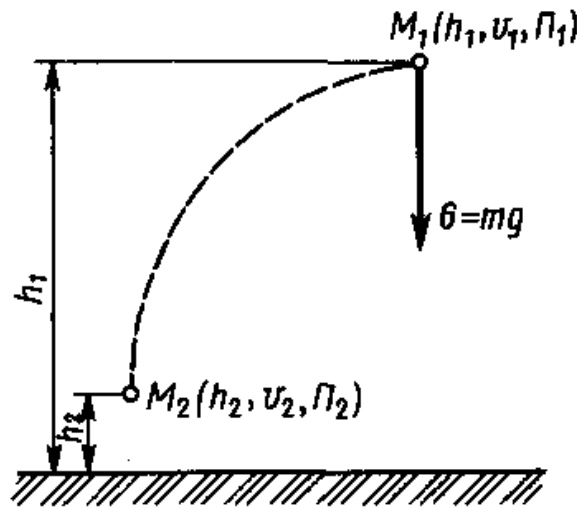


Рисунок 3.21

Під час падіння точки під дією однієї лише сили тяжіння здійснюється робота

$$W = G(h_1 - h_2) = Gh_1 - Gh_2 = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (3.108)$$

Ця робота дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$W = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = K_2 - K_1, \quad (3.109)$$

або

$$\Pi_1 - \Pi_2 = K_2 - K_1, \quad (3.110)$$

отже,

$$\Pi_1 + K_1 = \Pi_2 + K_2, \quad (3.111)$$

або

$$\Pi + K = \text{const.} \quad (3.112)$$

Ця рівність є математичним виразом закону збереження механічної енергії, який формулюється так: під час руху матеріальної точки під дією однієї лише сили тяжіння сума потенціальної і кінетичної енергій є величина постійна.

Цей закон справедливий під час руху під дією будь-якої потенціальної сили; під час не потенціальних сил (наприклад, сили тертя) механічна енергія переходить в інші види енергії.

Одним з найважливіших висновків теорії відносності є закон пропорційності енергії і маси тіла. Математичний вираз цього закону має такий вигляд:  $E = mc^2$ , де  $E$  – повний запас енергії тіла (що включає механічну, теплову, хімічну, електромагнітну, ядерну енергію, а також енергію часток, що входять до складу атома);  $m$  – маса тіла;  $c$  – швидкість світла.

На підставі наведеної вище рівності, яка називається формулою Ейнштейна, неважко підрахувати, що одному граму маси відповідає 25 млн. кВт·ч енергії ( $1 \text{ кВт}\cdot\text{ч} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ ).

**Приклад 3.17.** Матеріальна точка кинута із Землі вертикально вгору з початковою швидкістю  $v_0$ . Нехтуючи опором повітря, визначити:

- висоту  $h$  максимального підйому точки;
- швидкість  $v$ , яку матиме точка на висоті  $h/2$  при падінні.

*Розв'язання.* Для розв'язання першої частини завдання запишемо вирази кінетичної і потенціальної енергії у момент початку руху:

$$K_1 = \frac{mv_0^2}{2}, \quad \Pi_1 = 0$$

і у момент максимального підйому:

$$K_2 = 0, \quad \Pi_2 = mgh,$$

де  $m$  – маса матеріальної точки.

Згідно із законом збереження механічної енергії,

$$K_1 + \Pi_1 = K_2 + \Pi_2$$

або

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh.$$

Звідси, скоротивши обидві частини рівності на  $m$ , визначимо висоту  $h$  максимального підйому точки

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Для розв'язання другої частини завдання запишемо вирази кінетичної і потенціальної енергій на висоті  $h/2$ :

$$K_3 = \frac{mv^2}{2}, \quad \Pi_3 = \frac{mgh}{2}.$$

Згідно із законом збереження механічної енергії,

$$K_2 + \Pi_2 = K_3 + \Pi_3$$

або

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgh}{2}.$$

Звідси, скоротивши обидві частини рівності на  $m$  і зробивши зведення подібних членів, визначимо швидкість:

$$v = \sqrt{gh}.$$

Підставивши знайдене раніше значення  $h$ , отримаємо

$$v = \sqrt{\frac{gv_0^2}{2g}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}.$$

### 3.5 Основи динаміки системи матеріальних точок

#### 3.5.1 Рівняння поступального руху твердого тіла

Механічною системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, якимось чином зв'язаних між собою. Будь-яке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок.

Сили взаємодії точок даної системи називаються внутрішніми; сили, з якими діють на дану систему інші точки, що не входять в цю систему, – зовнішніми.

Нехай тверде тіло масою  $m$  рухається під дією сили  $F$  поступально з прискоренням  $a$  (рис. 3.22).

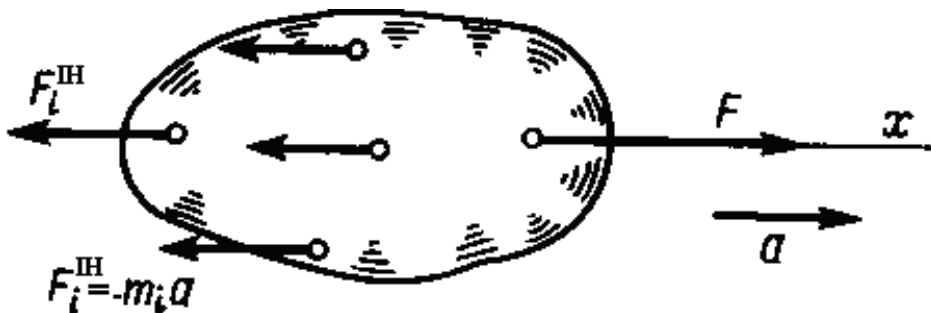


Рисунок 3.22



Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок з масами  $m_i$  і застосуємо принцип Д'Аламбера (відмітимо, що внутрішні сили в рівняння рівноваги не входять, оскільки на підставі третього закону Ньютона їх сума для системи в цілому дорівнює нулю). До кожної матеріальної точки прикладемо силу інерції  $F_i^{ин} = -m_i a$  і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0, F - \sum F_i^{ин} = 0. \quad (3.113)$$

Звідки

$$F = \sum F_i^{ин} = \sum (m_i a). \quad (3.114)$$

Оскільки при поступальному русі всі точки тіла мають однакові прискорення, то  $a$  можна винести за знак суми, тобто

$$F = a \sum m_i = am. \quad (3.115)$$

Згідно з другим законом Ньютона, вектори сили  $F$  і прискорення  $a$  збігаються за напрямом, тому можна записати

$$F = ma. \quad (3.116)$$

Це і є рівняння поступального руху твердого тіла.

Це рівняння нічим не відрізняється від основного рівняння динаміки точки, отже, всі формули динаміки точки застосовні для тіла, яке рухається поступально.

### 3.5.2 Рівняння обертального руху твердого тіла

Нехай тверде тіло під дією системи сил обертається довкола нерухомої осі  $z$  з кутовим прискоренням  $\alpha$  (рис. 3.23).

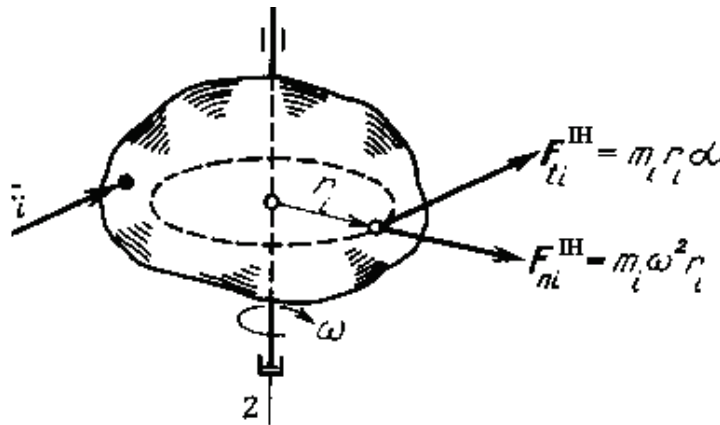


Рисунок 3.23

Розіб'ємо тіло на ряд матеріальних точок з масами  $m_i$  і застосуємо принцип Д'Аламбера. До кожної матеріальної точки прикладені дотична і нормальна сили інерції. Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum M_z = 0, \sum M_z (F_i) - \sum M_z (F_i^{ин}) = 0. \quad (3.117)$$

Моменти реакцій підшипника і підп'ятника, а також сили  $F_{ii}^{IH}$  відносно осі  $z$  дорівнюють нулю, оскільки лінії дії цих сил перетинають вісь; сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання називається обертальним моментом. Тоді

$$\sum M_z(F_i) = T = \sum M_z(F_{ii}^{IH}) = \sum (m_i r_i^2 \alpha) = \alpha \sum (m_i r_i^2). \quad (3.118)$$

Вираз  $\sum (m_i r_i^2)$  називають моментом інерції тіла відносно осі і позначають  $J$ :

$$J = \sum (m_i r_i^2). \quad (3.119)$$

Момент інерції тіла відносно осі є сума добутків мас матеріальних точок, що складають це тіло, на квадрат відстаней їх до цієї осі.

В результаті отримуємо формулу

$$T = J\alpha, \quad (3.120)$$

яка називається рівнянням оберտального руху твердого тіла. У цій формулі  $J$  – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Одиниця моменту інерції:

$$J = mr^2 = \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

Розглянемо наступний приклад.

Необхідно надати двом однаковим кулям (рис. 3.24) однакове кутове прискорення  $\alpha$ . Оскільки  $r_1 > r_2$ , то  $J_1 > J_2$ . Дослідним шляхом, а також за допомогою рівняння оберտального руху можна переконатися в тому, що для надання цим системам однакового кутового прискорення  $\alpha$  потрібно буде прикласти різні обертальні моменти:

$$T' = J_1 \alpha, T'' = J_2 \alpha. \quad (3.121)$$

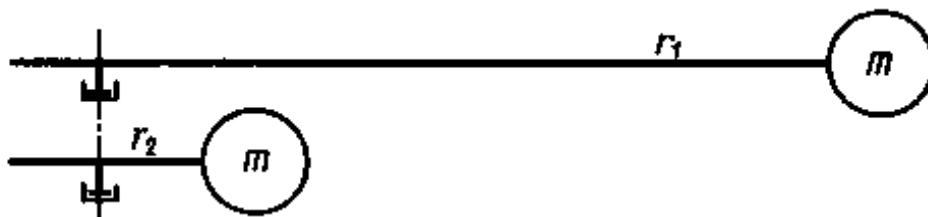


Рисунок 3.24

Розділимо перше рівняння на друге:

$$\frac{T'}{T''} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (3.122)$$

Отже, чим більше момент інерції тіла, тим більший обертальний момент треба прикласти, щоб надати тілу задане кутове прискорення.

З викладеного зрозуміло, що момент інерції відіграє в обертальному русі таку саму роль, яку маса відіграє в поступальному русі, отже, момент інерції є міра інертності тіла, що обертається.

Як приклад обчислимо момент інерції тонкого однорідного суцільного диска радіусом  $R$ , завтовшки  $s$ , масою  $m$  відносно осі, перпендикулярній поверхні диска і, що проходить через його центр  $O$  (рис. 3.25).

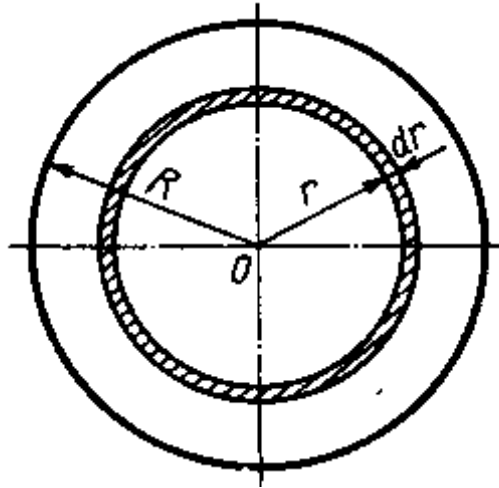


Рисунок 3.25

Розіб'ємо диск на елементарні кільця змінного радіусу  $r$ , шириною  $\partial r$  і завтовшки  $s$ . Згідно з визначенням, момент інерції такого кільця дорівнює

$$\partial J = \partial \sum (m_i r^2) = r^2 \partial \sum m_i = r^2 \partial m = r^2 2\pi r \partial r s \rho = 2\pi s \rho r^3 \partial r, \quad (3.123)$$

де  $\rho$  – щільність матеріалу диска.

Підсумувавши моменти інерції всіх елементарних кілець, отримаємо момент інерції  $J$  всього диска:

$$J = \int_0^R 2\pi s \rho r^3 \partial r = 2\pi s \rho \int_0^R r^3 \partial r = 2\pi s \rho \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \pi s \rho \frac{R^4}{2}. \quad (3.124)$$

Оскільки маса диска  $m = \pi R^2 s \rho$ , то

$$J = \frac{mR^2}{2}, \quad (3.125)$$

що і потрібно було довести.

Неважко зрозуміти, що момент інерції однорідного суцільного прямого кругового циліндра радіусом  $R$  і масою  $m$  будь-якої висоти обчислюватиметься за такою ж формулою. Щоб переконатися в цьому, достатньо уявно розбити весь циліндр поверхнею, паралельною основі, на тонкі диски і підсумувати моменти інерції всіх дисків.

Моменти інерції для деяких інших однорідних тіл мають такі вигляди, які наводяться без виводів:

– куля масою  $m$ , радіусом  $R$  відносно діаметра

$$J = \frac{2}{5}mR^2; \quad (3.126)$$

– тонка сферична оболонка масою  $m$ , радіусом  $R$  відносно діаметра

$$J = \frac{ml^2}{3}; \quad (3.127)$$

– порожній вал масою  $m$ , зовнішнім радіусом  $R$  і радіусом отвору  $r$  відносно осі

$$J = m \frac{R^2 + r^2}{2}. \quad (3.128)$$

Момент інерції  $J$  тіла відносно будь-якої осі  $r$ , паралельної центральній (тобто тяжінню, що проходить через центр  $C$  тіла), дорівнює центральному моменту інерції  $J_C$  плюс добуток маси  $m$  тіла на квадрат відстані  $a$  тіла на квадрат відстані

$$J_z = J_C + ma^2. \quad (3.129)$$

З цієї формули випливає, що зі всіх моментів інерції тіла відносно паралельних осей найменшим буде момент інерції відносно центральної осі, тобто центральний момент інерції.

Інколи момент інерції визначають за формулою

$$J = mr_u^2, \quad (3.130)$$

де  $r_i$  – радіус інерції тіла;

$$r_i = \sqrt{\frac{J}{m}}. \quad (3.131)$$

Фізичний сенс радіусу інерції полягає у тому, що: якщо масу тіла зосередити в одній точці (така маса називається зведеною) і розмістити її від осі обертання на відстані, що дорівнює радіусу інерції, то момент інерції зведеної маси дорівнюватиме моменту інерції даного тіла відносно тієї ж осі.

Подвоєний радіус інерції називається діаметром інерції:  $D_i = 2r_i$ .

У практиці інколи замість моменту інерції користуються поняттям махового моменту  $GD_i^2$ .

Маховим моментом називається добуток сили тяжіння  $G$  тіла, що обертається, на квадрат його діаметра інерції.

Одиниця махового моменту

$$GD_i^2 = H \cdot m^2.$$

Між маховим моментом і моментом інерції існує проста залежність

$$GD_i^2 = mg(2r_i)^2 = 4gmr_i^2$$

або

$$GD_i^2 = 4gJ = 39,24J.$$

**Приклад 3.18.** Тонкий однорідний стрижень з силою тяжіння  $G$ , довжиною  $l=150$  мм здійснює коливальний рух у вертикальній площині під дією сили тяжіння; точка підвісу збігається з кінцем стрижня (рис. 3.26). Визначити кутове прискорення стрижня в той момент, коли він складає з вертикаллю кут  $\gamma=\pi/6$  рад.

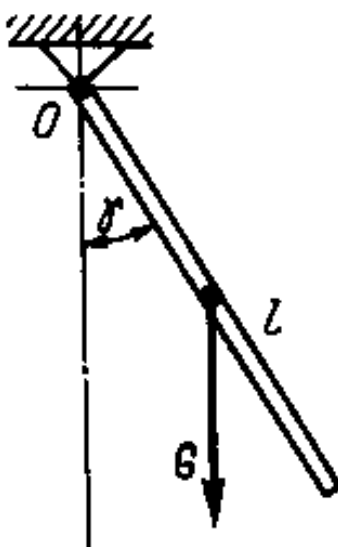


Рисунок 3.26

*Розв'язання.* За умовами завдання стрижень однорідний, отже, його центр тяжіння знаходиться посередині. Застосуємо рівняння обертального руху тіла

$$T = J\alpha.$$

Обертальний момент дорівнює моменту сили тяжіння відносно осі обертання стрижня:

$$T = \frac{Gl}{2} \sin \gamma.$$

Момент інерції стрижня обчислюється за формулою

$$J = \frac{ml^2}{3} = \frac{G}{g} \cdot \frac{l^2}{3}.$$

Підставимо вирази обертального моменту і моменту інерції в рівняння обертального руху:

$$\frac{Gl}{2} \sin \gamma = \frac{G}{g} \cdot \frac{l^2}{3}$$

і визначимо кутове прискорення:

$$\alpha = \frac{3g \sin \gamma}{2l} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,15} = 49,05 \text{ рад/с}^2.$$

**Приклад 3.19.** Маховий момент ротора електродвигуна дорівнює  $2,7 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ . Обертальний момент  $T=40 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Визначити час розгону, якщо кінцева швидкість обертання ротора  $\omega=30\pi \text{ рад/с}$ .

*Розв'язання.* Оскільки на ротор діє постійний обертальний момент, то й рух ротора буде рівноприскореним. Запишемо рівняння кутової швидкості цього руху, враховуючи, що  $\omega_0=0$ :

$$\omega = \alpha t = 30\pi,$$

звідки

$$\alpha = 30\pi/t \text{ рад/с}^2.$$

Далі застосуємо рівняння обертального руху ротора

$$T = J\alpha = J \cdot 30\pi/t.$$

З цієї рівності визначимо час розгону, виразивши момент інерції ротора через маховий момент, який дорівнює  $4gJ$ :

$$t = J \cdot 30\pi/T = \frac{4gJ}{4gT} 30\pi = \frac{2,7}{4 \cdot 9,81 \cdot 40} 30\pi = 0,162 \text{ с}.$$

### 3.5.3 Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, що складають це тіло:

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (3.132)$$

Обчислимо вираз для кінетичної енергії твердого тіла в трьох випадках руху.

1. *Тіло рухається поступально.* Враховуючи, що в разі поступального руху всі точки тіла мають однакові швидкості, запишемо

$$K_{\text{пост}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i, \text{ або } K_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Отже, в разі поступального руху твердого тіла його кінетична енергія обчислюється за тією ж формулою, що і кінетична енергія матеріальної точки.

2. Тіло обертається довкола нерухомої осі.

Запишемо

$$K_{об} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum (m_i r_i^2),$$

або

$$K_{об} = \frac{J \omega^2}{2}.$$

Кінетична енергія твердого тіла, що обертається довкола нерухомої осі, дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат його кутової швидкості.

3. Тіло рухається плоскопаралельно. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух твердого тіла в кожен даний момент можна вважати простим обертальним рухом довкола миттєвої осі (метод миттєвих центрів швидкостей). Допустимо, що відома швидкість  $v_C$  центру тяжіння тіла, тоді миттєва кутова швидкість

$$\omega = \frac{v_C}{OC}, \quad (3.133)$$

де  $OC$  – відстань центру тяжіння  $C$  тіла від миттєвої осі обертання  $O$ . Момент інерції  $J_O$  відносно миттєвої осі обертання обчислюють за формулою

$$J_O = J_C + mOC^2, \quad (3.134)$$

де  $J_C$  – момент інерції відносно центральної осі, або центральний момент інерції.

Кінетичну енергію тіла, рухомого плоскопаралельно, визначають так:

$$K_{mn} = \frac{J_O \omega^2}{2} = (J_C + mOC^2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{mOC^2}{2} \cdot \frac{v_C^2}{OC^2}, \quad (3.135)$$

або

$$K_{mn} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}. \quad (3.136)$$

Кінетична енергія твердого тіла, рухомого плоскопаралельно, дорівнює сумі кінетичних енергій в поступальній ході разом з центром тяжіння і обертальному русі довкола центральної осі, перпендикулярній основній площині.

Сформулюємо теорему про зміну кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл при деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх (активних і реактивних) і внутрішніх сил, що діяли на систему при вказаному переміщенні:

$$\sum K - \sum K_0 = \sum W. \quad (3.137)$$

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій кожного тіла окремо. Якщо тіло тверде, то сума робіт його внутрішніх сил дорівнює нулю. Якщо зв'язки рахувати ідеально гладенькими, то сума робіт реакцій цих зв'язків також дорівнюватиме нулю.

### 3.5.4 Порівняння формул динаміки для поступального і обертального руху твердого тіла

Порівнюючи формули динаміки точки або поступально рухомого тіла з формулами обертального руху тіла, легко відмітити, що ці формули за структурою аналогічні. Щоб з формул поступального руху отримати формули обертального руху, необхідно замість сили підставити обертальний момент, замість лінійного переміщення – кутове переміщення, замість лінійної швидкості – кутову швидкість, замість лінійного прискорення – кутове прискорення, а замість маси – момент інерції тіла відносно осі обертання.

Порівняння формул поступального і обертального руху зручно провести за допомогою табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Порівняння формул поступального і обертального руху

Порівняльні рівняння і динамічні заходи	Види руху	
	поступальний	обертальний
Рівняння руху	$F=ma$	$T=J\alpha$
Робота	$W=Fs$	$W=T\varphi$
Потужність	$P=Fv$	$P=T\omega$
Кінетична енергія	$K=mv^2/2$	$K=J\omega^2/2$

**Приклад 3.20.** Обчислити кінетичну енергію колеса радіусом  $r$ , масою  $m$ , що котиться по прямолінійній рейці без ковзання, якщо швидкість центру тяжіння колеса дорівнює  $v_C$ . Колесо вважати суцільним однорідним циліндром (рис. 3.27).

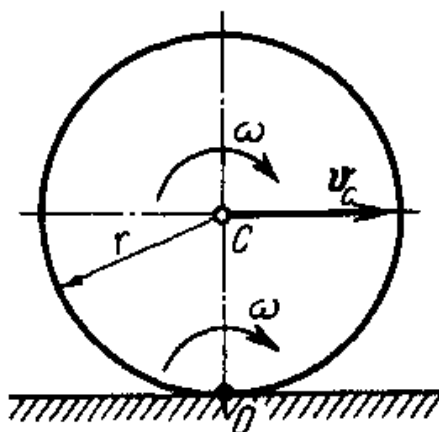


Рисунок 3.27



*Розв'язання.* Розв'яжемо даний приклад двома способами. Як відомо з кінематики, складний плоскопаралельний рух колеса можна розглядати або як простий обертальний рух довкола миттєвої осі  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega$  (метод миттєвих центрів швидкостей), або як складний рух, що складається з поступальної ходи зі швидкістю  $v_C$  і відносного обертального руху довкола осі  $C$  (метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний). Нагадаємо, що абсолютна (миттєва) і відносні кутові швидкості колеса завжди рівні між собою.

1. *Метод миттєвих центрів швидкостей.* У цьому випадку кінетична енергія колеса обчислюється за формулою

$$K = \frac{J_0 \omega^2}{2},$$

де  $J_0$  – момент інерції колеса відносно миттєвої осі обертання  $O$ .

Момент інерції відносно осі  $O$  дорівнює

$$J_0 = J_C + mr^2.$$

Момент інерції суцільного однорідного циліндра відносно його геометричної осі обчислюють за формулою

$$J_C = mr^2/2,$$

отже,

$$J_0 = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2.$$

Тепер обчислимо кінетичну енергію колеса:

$$K = \frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{3}{2}mr^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

2. *Метод розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний.* В цьому випадку кінетична енергія колеса дорівнює сумі кінетичних енергій в поступальному і обертальному русі:

$$K = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{v_C}{r} \right)^2 = \frac{3}{4}mv_C^2.$$

**Приклад 3.21.** Вантаж  $Q$ , опускаючись, обертає однорідний циліндр, сила тяжіння якого  $G$ , а радіус  $r$  (рис. 3.28). Нехтуючи тертям на осі циліндра, знайти натягнення  $S$  нитки, кутову швидкість  $\omega$  і прискорення  $\alpha$  циліндра, коли вантаж  $Q$  опуститься на відстань  $h$ . Спочатку система знаходилася у спокої.

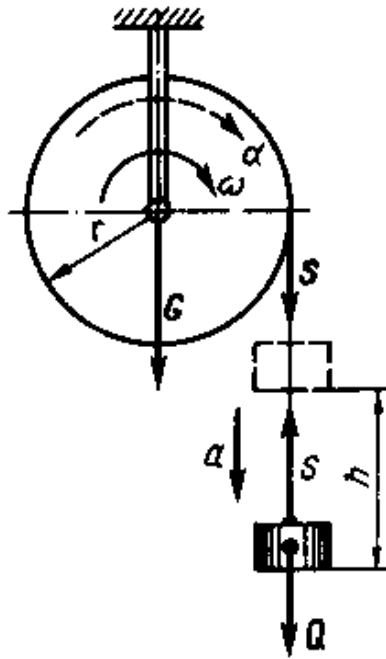


Рисунок 3.28

*Розв'язання.* Для розв'язання завдання розділимо систему на дві частини і розглянемо окремо поступальний рух вантажу і обертальний рух циліндра. Оскільки на систему діють постійні сили, то і циліндр рухатимуться з постійними прискореннями  $a$  (вантаж) і  $\alpha$  (циліндр).

Лінійне прискорення  $a$  вантажу дорівнює дотичному прискоренню точок, що лежать на поверхні циліндра:

$$a = \alpha r = \text{const},$$

де  $\alpha$  – кутове прискорення циліндра.

За умовою початкова швидкість  $v_0=0$ , а кінцеву швидкість вантажу, що пройшов шлях  $h$  з постійним прискоренням  $a$ , визначимо з формули кінематики:

$$h = \frac{v^2 v_0^2}{2f},$$

звідки

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\alpha rh}.$$

Далі скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і застосуємо її до вантажу, що рухається поступально:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = W.$$

Підставивши вирази маси, швидкості та роботи, отримаємо

$$\frac{Q}{g} \cdot \frac{2\alpha rh}{2} = (Q - S)h.$$

Звідси реакція  $S$  нитки дорівнює

$$S = Q - \frac{Q\alpha r}{g}.$$

Далі запишемо рівняння обертального руху циліндра

$$T = J\alpha.$$

Обертальний момент

$$T = Sr = \left( Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r,$$

а момент інерції циліндра обчислимо за формулою

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{Gr^2}{2g}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння обертального руху, отримаємо

$$\left( Q - \frac{Q\alpha r}{g} \right) r = \frac{Gr^2\alpha}{2g}.$$

Звідси визначимо кутове прискорення циліндра:

$$\alpha = \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}.$$

Тепер можна визначити кутову швидкість циліндра:

$$\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{2\alpha r h}{r}}.$$

Підставивши значення кутового прискорення, отримаємо

$$\omega = \frac{1}{r} \sqrt{2rh \frac{2Qg}{r(G + 2Q)}},$$

звідки

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G + 2Q}}.$$

Визначимо кутову швидкість циліндра за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії системи тіл. Враховуючи, що спочатку система знаходилася у спокої, що робота сили тяжіння циліндра дорівнює нулю (точка її застосування не переміщається), і нехтуючи тертям, матимемо

$$K_G + K_Q = W_Q,$$

де

$$K_G = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{Gr^2}{g \cdot 2} \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad K_Q = \frac{Q(\omega r)^2}{g \cdot 2}, \quad W_Q = Qh.$$

Підставивши значення, отримаємо

$$\frac{Gr^2\omega^2}{4g} + \frac{Qr^2\omega^2}{2g} = Qh.$$

Звідки

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{Qgh}{G+2Q}}.$$

### 3.5.5 Поняття про балансування тіл, що обертаються

Балансуванням називається урівноваження мас механізмів, що обертаються, або поступально рухомі, з тим щоб знищити вплив сил інерції. У даному підрозділі розглядається лише балансування деталей машин, що обертаються.

Неврівноваженістю ротора (тіла, що обертається в опорах) називається його стан, що характеризується таким розподілом мас, який за час обертання викликає змінні навантаження на опорах. Ці навантаження є причиною струсів і вібрацій, передчасного зносу, знижують к.к.д. і продуктивність машин. Особливо небажана неуврівноваженість у швидкохідних машинах.

Розглянемо випадок статичної неуврівноваженості, коли центр тяжіння тіла не лежить на осі обертання.

Уявімо собі маховик масою  $m$ , що обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Припустимо, що центр тяжіння  $C$  маховика не лежить на осі обертання, а зміщений на величину  $e_{ст}$ , що називається ексцентриситетом маси (рис. 3.29).

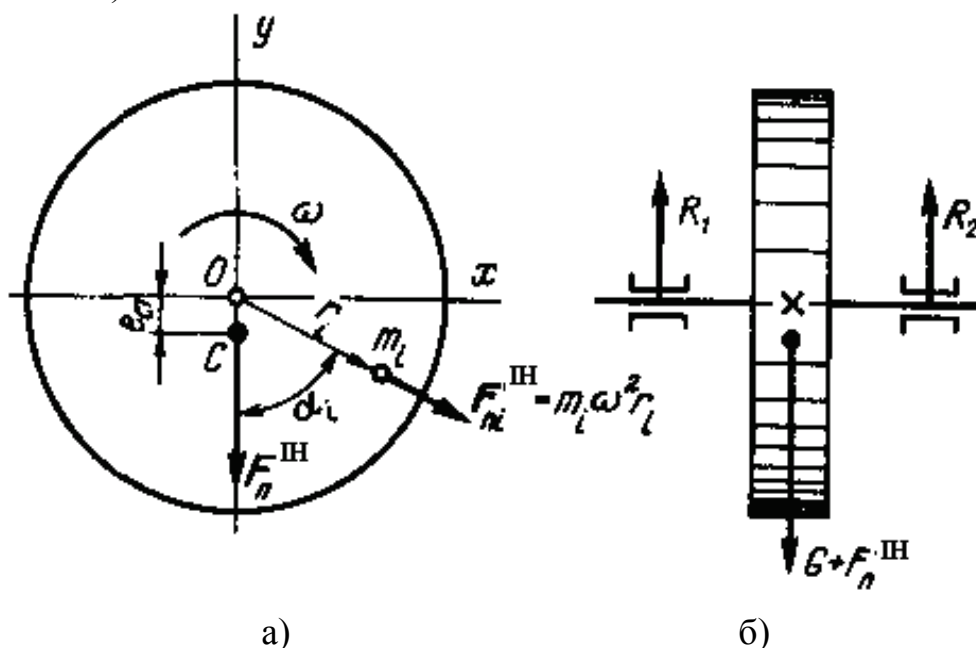


Рисунок 3.29

Силу тяжіння маховика позначимо  $G$ , масою осі нехтуємо. Розіб'ємо маховик на ряд матеріальних точок з масами  $m_i$  і визначимо рівнодійну відцентрових сил інерції  $F_n^{IH}$ . Проекція цієї рівнодійної на вісь  $x$  унаслідок симетрії маховика відносно осі  $y$  дорівнює нулю, тобто

$$F_{nx}^{IH} = \sum (F_{ni}^{IH} \sin \alpha_i) = 0.$$

Отже, рівнодійна  $F_n^{IH}$  сил  $F_{ni}^{IH}$  проектується на вісь  $y$  в натуральну величину. Тоді

$$F_n^{IH} = F_{ny}^{IH} \sum (F_{ni}^{IH} \cos \alpha_i) = \sum (m_i \omega^2 r_i \cos \alpha_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 \sum (m_i y_i) = \omega^2 m e_{cm},$$

оскільки із статки відомо, що

$$\sum (m_i y_i) = m y_C = m e_{cm}.$$

Таким чином, рівнодійна сил інерції всього маховика направлена по лінії  $OC$  і дорівнює

$$F_n^{IH} = m \omega^2 e_{cm}$$

( $F_i^{IH} = 0$ , оскільки  $\omega = \text{const}$ ).

Застосуємо принцип Д'Аламбера і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum Y = 0; R_1 + R_2 - G - F_n^{IH} = 0.$$

Оскільки сила інерції  $F_n^{IH}$  під час обертання міняє своє положення, то максимальна сила тиску на підшипники буде при нижньому положенні центру тяжіння

$$F_{\max} = R_1 + R_2 = G + F_n^{IH}.$$

Визначимо силу тиску  $F_{\max}$  на підшипники, якщо маса маховика  $m=102$  кг, його частота обертання  $3000$  хв<sup>-1</sup>, а ексцентриситет маси  $e^{ct}=1$  мм.

При  $\omega = \pi n / 30 = \pi 3000 / 30 = 100\pi$  рад/с

$$F_n^{IH} = m \omega^2 e_{cm} = 102 (100\pi)^2 0,001 \approx 10000 \text{ Н};$$

$$F_{\max} = mg + F_n^{IH} = 102 \cdot 9,8 + 10000 = 11000 \text{ Н}.$$

Як видно з прикладу, динамічні навантаження можуть у багато разів перевищувати силу тяжіння рухомих частин машини.

Статичну нерівноваженість легко виявити шляхом статичного балансування на двох горизонтальних паралельних ножах балансувань. Деталь, що не має статичної нерівноваженості, знаходитиметься на ножах в стані байдужої рівноваги.

Нерівноваженість ротора характеризується величиною дисбалансу. Добуток нерівноваженої маси на її ексцентриситет називається значенням дисбалансу і виражається в г·мм.

Сформульована вище умова урівноваження тіла, що обертається, не є достатньою, оскільки динамічні навантаження можуть виникати і у тому випадку, коли центр тяжіння лежить на осі обертання. Розглянемо колінчастий вал двоциліндрового двигуна (рис. 3.30).

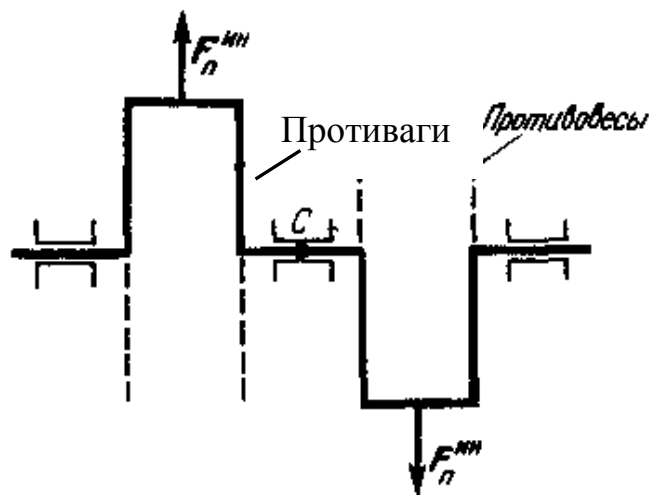


Рисунок 3.30

В цьому випадку, навіть якщо центр тяжіння  $C$  лежить на осі обертання, виникає пара сил інерції  $F_n^{ин}$ , що викликає вигин валу і додатковий тиск на опори, змінні за напрямом.

Така невірноваженість називається миттєвою, і її можна виявити при достатньо швидкому обертанні, але не у спокої. Якщо статична і миттєва невірноваженості існують одночасно, то така невірноваженість називається динамічною.

Причинами невірноваженості можуть бути неточності у виготовленні і складанні деталей, нерівномірність розподілу матеріалу, деформація деталей, великі зазори в обертальних парах тощо.

При значній невірноваженості ставлять противаги (рис. 3.30), маса яких інколи досягає десятків тисяч кілограмів.

### 3.5.6 Деякі відомості про механізми

Закони і методи теоретичної механіки знаходять своє практичне застосування перш за все в теорії механізмів, оскільки механізми є кінематичною основою всіх машин, механічних приладів і промислових роботів.

Кінематичні пари в ланцюзі можуть бути плоскими і просторовими. Ланки плоских механізмів здійснюють плоскопаралельний рух.

Основні плоскі механізми з нижчими парами. Ланки нижчих пар стикаються по поверхнях (поступальні, обертальні і гвинтові пари).

Основним типом плоского механізму є шарнірний чотириланник, принципова схема якого змальована на рис. 3.31, а. У цьому механізмі чотири обертальні кінематичні пари і чотири ланки: 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромисло, 4 – стійка. Такий механізм називається кривошипно-коромисловим і є однокривошипним; крайні положення ланок показані на рисунку.

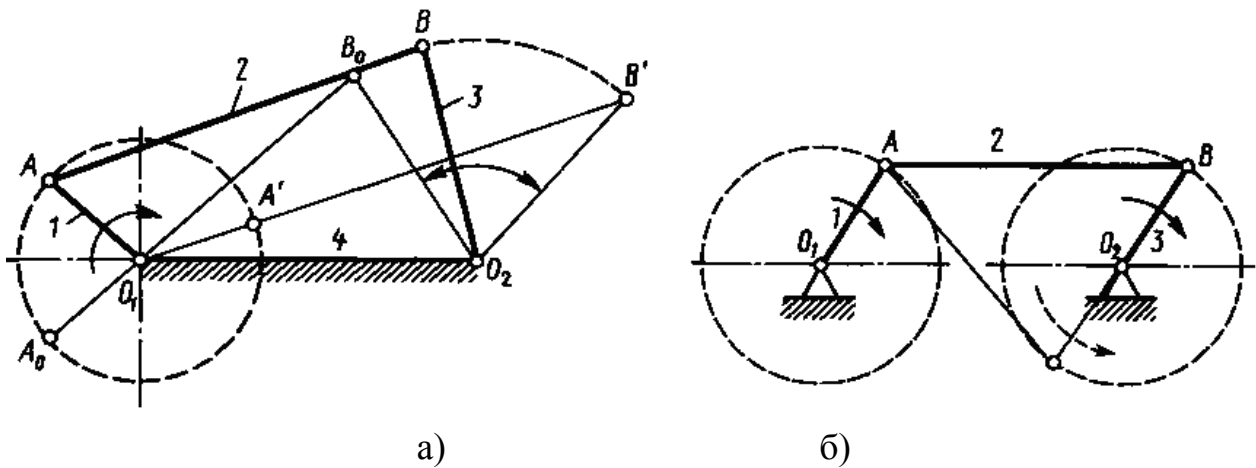


Рисунок 3.31

Якщо стійка шарнірного чотириланника найкоротша ланка або, якщо ланки 1 і 3 рівні по довжині, то механізм стає двокривошипним, оскільки ланка 3 так само, як і кривошип 1, отримає можливість здійснювати повний зворот.

На рис. 3.31, б показана схема двокривошипного механізму, який називається шарнірним паралелограмом; в такого механізму обидва кривошипи обертаються в одному напрямі з однаковою кутовою швидкістю, а шатун 2 рухається поступально. На рис. 3.31, б тонкими лініями показаний шарнірний антипаралелограм, кривошипи якого обертаються в протилежних напрямках.

На рис. 3.32 показані схеми застосування шарнірного чотириланника в пастозмішувальних машинах.

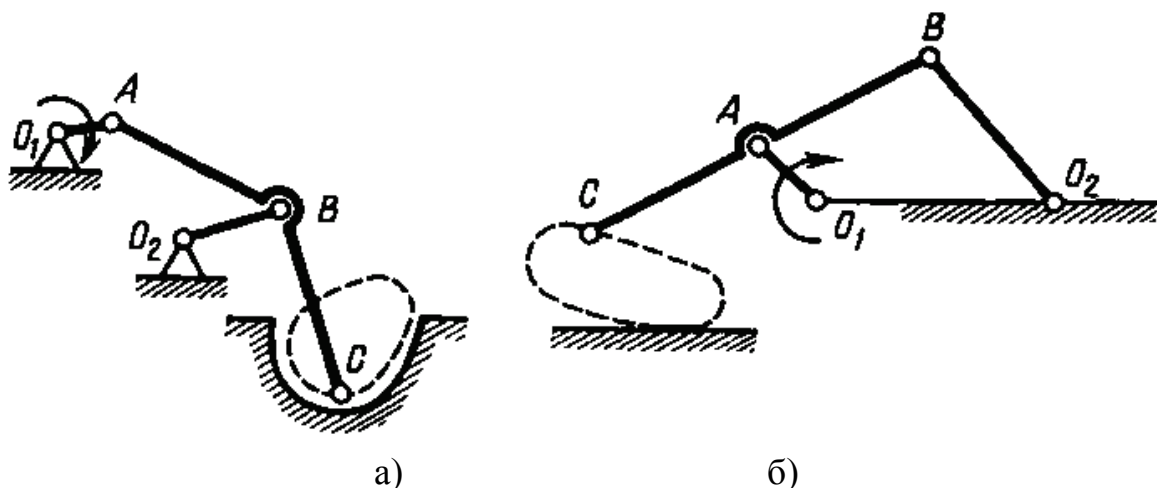


Рисунок 3.32

Якщо в шарнірному чотириланнику перетворити одну обертальну пару в поступальну, то вийде широко поширений кривошипно-повзунний механізм. Такий механізм є центральним, оскільки вісь повзуна пересікає вісь кривошипа. Якщо вісь повзуна зміщена від осі кривошипа на величину ексцентриситету  $e$  (рис. 3.33), то кривошипно-повзунний механізм називається нецентральним. На цьому рисунку показано тонкими лініями крайні положення ланок механізму і видно, що кут повороту кривошипа при прямому (зазвичай робочому) русі більший, ніж при зворотному (зазвичай холостому) русі. Отже, в нецентральному механізмі холостий хід здійснюється з більшою швидкістю, ніж робочий.

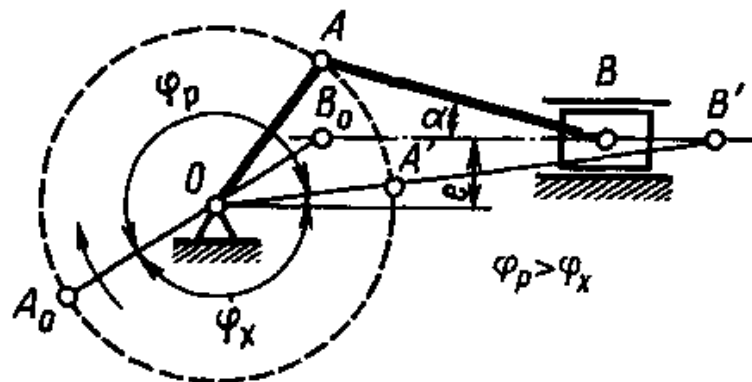


Рисунок 3.33

За рахунок ексцентриситету кут тиску  $\alpha$  шатуна на повзун ( $\alpha$  отже, і тиск повзуна на направляючі) під час робочого руху буде менший, ніж при холостому. Це сприятливо позначається на к.к.д. і довговічності машини, оскільки зазвичай навантаження на механізм при робочому русі значно більше, ніж при холостому.

На рис. 3.34 змальована схема шестиланкового кривошипно-кулісного механізму, застосованого, наприклад, у поперечно-стругальних верстатах. Такий механізм перетворить безперервний обертальний рух кривошипа  $OA$  у зворотно-поступальний рух повзуна  $M$  за допомогою куліси, що коливається  $O'B$  і поступально рухомої куліси  $MB$ . З рис. 3.34 видно, що кут повороту кривошипа при робочому русі повзуна помітно більше, ніж при холостому, отже, швидкість робочого руху буде менше швидкості холостого руху.

Швидкість руху повзуна  $M$  при будь-якому положенні механізму легко визначається за допомогою теореми про складання швидкостей, згідно з якою абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей. Прямокутники швидкостей точок  $A$  і  $B$  показано на рис. 3.34.



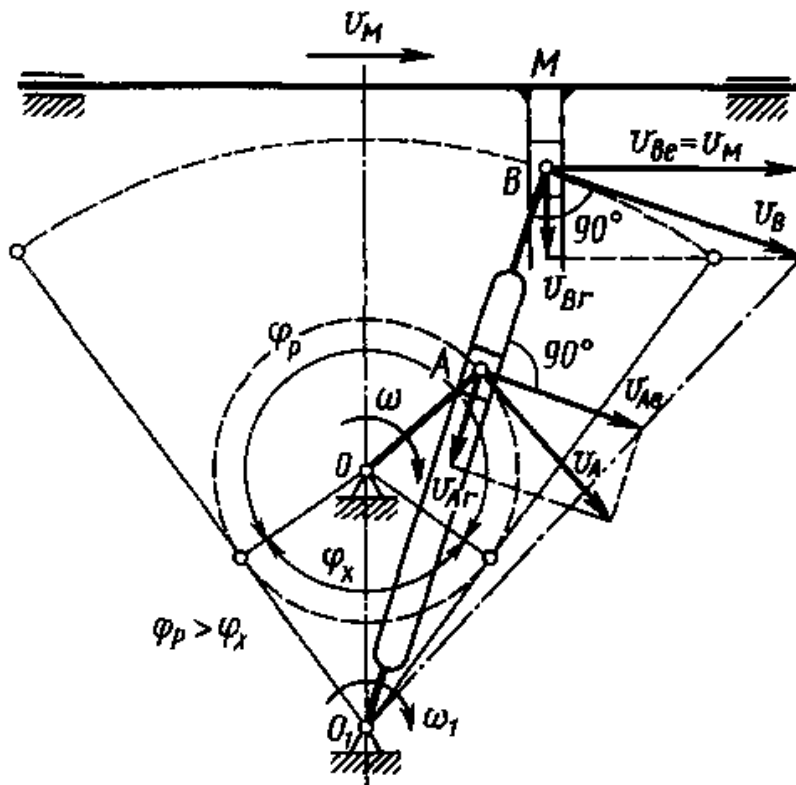


Рисунок 3.34

Деякі механізми з вищими парами. Ланки вищих пар стикаються по лініях і точках. Вищі кінематичні пари є, наприклад, у механізмах переривчастого руху і кулачкових механізмах.

У зубчастих передачах контакт зубів – вища кінематична пара.

На рис. 3.35, а змальований мальтійський механізм, що перетворює безперервне обертання провідної ланки, – кривошипа 1 з пальцем або роликом В на кінці в переривчасте обертання веденої ланки – мальтійського хреста 2, що має радіальні пази (назва механізму виникла від схожості веденої ланки з емблемою духовно-рицарського Мальтійського ордена).

Обертання мальтійського хреста відбувається при повороті кривошипа на кут  $\varphi_p$ ; остання частина оберту кривошипа на кут  $\varphi_x$  відповідає зупинці веденої ланки 2. Нерухоме положення мальтійського хреста фіксується його сегментними вирізами А, по яких ковзає диск 3, жорстко пов'язаний з кривошипом 1.

Кількість пазів мальтійського хреста знаходиться в межах від 3 до 12. При нескінченно великій кількості пазів і радіусі мальтійський хрест перетвориться на рейку, яка здійснюватиме поступальний рух.

На вказаному рисунку зображено мальтійський механізм зовнішнього зчеплення, коли ведуча і ведена ланки обертаються в протилежних напрямках.

Для передачі обертання в одному напрямі застосовують механізми з внутрішнім зчепленням.

Мальтійські механізми застосовують в металообробних верстатах, приладах точної механіки.

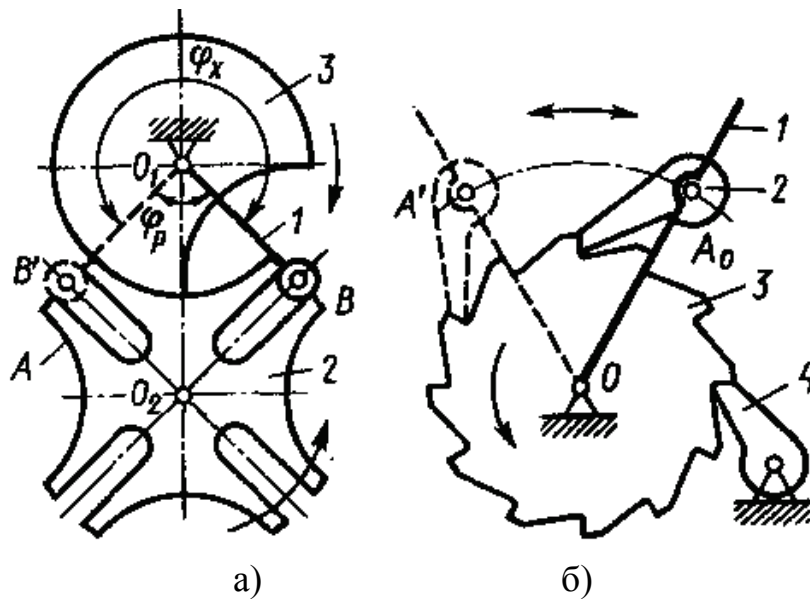


Рисунок 3.35

На рис. 3.35, б показаний один з видів храпового механізму. Такий механізм перетворить зворотно-коливальний рух ведучої ланки, – важеля 1 з робочою собачкою 2 в переривчастий однобічний обертальний рух веденої ланки 3, яку називають храповим колесом. Під час обертання важеля і робочої собачки у вихідне положення храпове колесо залишається нерухомим. Для запобігання його повороту у зворотному напрямі передбачена стопорна собачка 4.

При великій кількості зубів храпового колеса воно перетвориться на рейку, яка здійснюватиме переривчастий поступальний рух або переміщення.

Храпові механізми застосовують, наприклад, у вантажопідйомних машинах, механізмах подачі автоматичних ліній, механізмах заводу пружин, друкуючих машинках тощо.

У техніці широке застосування мають кулачкові механізми, за допомогою яких можна здійснити майже будь-який заздалегідь заданий закон руху веденої ланки.

Простий кулачковий механізм – триланковий (рис. 3.36) складається з кулачка  $B$ , штовхача 2 і стійки 3. Механізм перетворить обертальний рух кулачка в зворотно-поступальний або коливальний рух штовхача. На рисунку показані плоскі кулачкові механізми зі штовхачами різної конструкції: голковим (а), тарілчастим (б), роликівим (в) і сферичним (г).

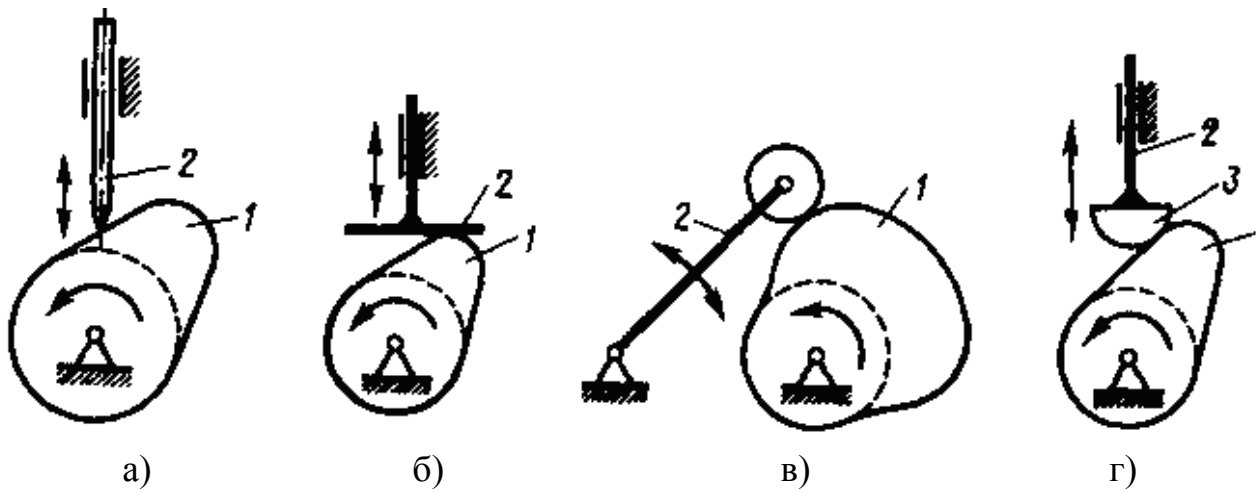


Рисунок 3.36

Існують механізми з поступально рухомими копірами.

Кулачкові механізми застосовують, наприклад, у двигунах внутрішнього згорання, металоріжучих верстатах, приладобудуванні тощо.

На рис. 3.37 показаний складний розгалужений кінематичний ланцюг одноциліндрового двигуна внутрішнього згорання.

Ланцюг складається з кривошипно-повзунного механізму 1 – 2 – 3 і двох кулачкових механізмів 4 – 5 клапанного газорозподілу. Колінчастий вал (кривошип 1) і розподільний вал з копірами 4 з'єднані між собою зубчастими колесами.

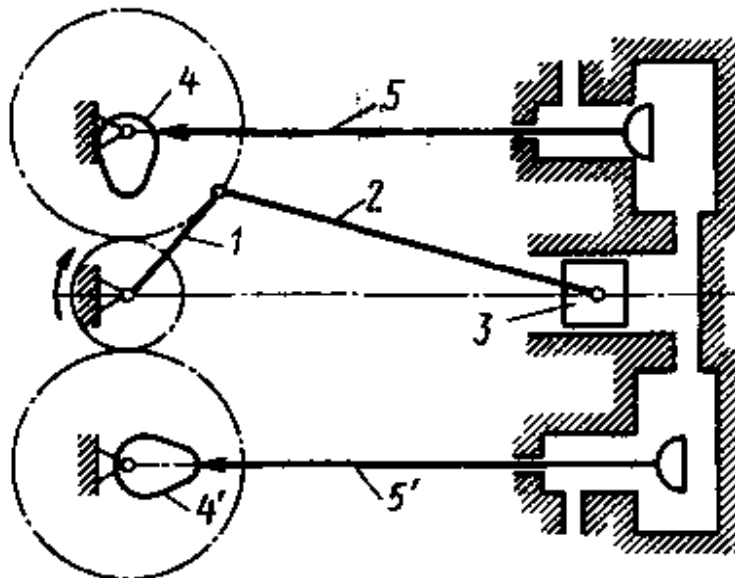


Рисунок 3.37

Всі розглянуті раніше механізми є пласкими.

На рис. 3.38 зображено схему просторового кулачкового механізму з циліндровим кулачком (барабаном).

Такий механізм застосовується, наприклад, у металоріжучих автоматах і напівавтоматах.

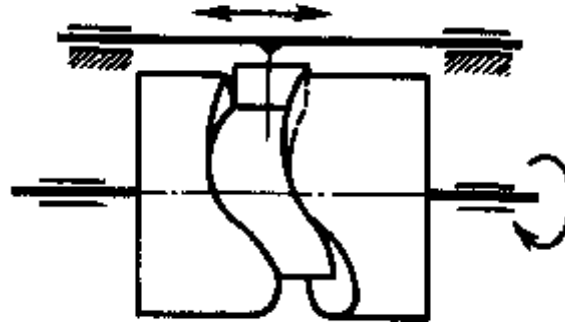


Рисунок 3.38

## Запитання та завдання для самоперевірки

1. Якими трьома параметрами визначається сила, що діє на тверде тіло?
2. Які особливості розкладання сили на дві складові?
3. Чому дія і протидія не є зрівноваженою системою сил?
4. Як визначається напрям моменту сили відносно точки і коли він дорівнює нулю?
5. Чому пара сил не має рівнодійної?
6. Які властивості має пара сил?
7. Що називається моментом сили відносно точки?
8. Що таке пара сил і момент пари сил?
9. Які основні властивості пари сил?
10. Які операції над силами, що прикладені до твердого тіла, є еквівалентними?
11. Що таке тертя ковзання?
12. Які особливості методів знаходження центру тяжіння;
13. Які змінні в кінематиці розглядають як незалежні?
14. Поясніть особливості прискорення точки в прямолінійному русі.
15. Які обмеження накладаються на функції, що описують закон руху точки?
16. Що таке кривина кривої в даній точці?
17. Які існують види руху точки?
18. У чому суть прямої та оберненої задач динаміки точки?
19. Що таке інертна та динамічна маси?
20. Які закони ньютонів лежать в основі динаміки?
21. Як можна визначити реакції в системі за допомогою основних теорем динаміки?

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Павловський М.А. Теоретична механіка: підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
2. Сапрыкин В.Н. Техническая механика: учеб. пособие/ В.Н. Сапрыкин. – Харьков: Торсинг, 2003. – 560 с.
3. Омаров М.А., Роменський В.І., Яшков І.О. Основи прикладної механіки: навч. посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2016. – 416 с.
4. Лошак Т.В. Прикладна механіка та основи конструювання / Т.В. Лошак. – К.: НУХТ, 2004. – 77 с.
5. Крайнев А.Ф. Механика от греческого *mechanice (techne)* – искусство построения машин. Фундаментальный словарь. – М.: Машиностроение, 2000. – 904 с.
6. Гаркавенко О.М. Прикладна механіка: навч. посібник для вищ. навч. закладів / О.М. Гаркавенко, Л.Є. Пелевін, В.М. Смірнов. – К.: КНУБА, 2006. – 194 с.
7. Прикладна механіка: навч. посібник / О.Ф. Коляда, В.Г. Шевченко. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2004. – 182 с.
8. Прикладна механіка: навч. посібник / Д. Коновалюк, Р. Ковальчук, В. Шваб'юк та ін. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 771 с.

Навчальне видання

ОМАРОВ Мурад Анверович

ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ  
Частина 1  
ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Відповідальний випусковий І.Ш. Невлюдов

Редактор Б.П. Косіковська  
Комп'ютерна верстка Л.Ю. Светайло

План 2017 (друге півріччя), поз. 9.

Підп. до друку 27.03.17.	Формат 60x84 <sub>1/16</sub> .	Спосіб друку – ризографія.
Умов. друк. арк. 10,7.	Облік. вид. арк. 9,8.	Тираж 100 прим.
Ціна договірна	Зам № 1-9.	

---

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

---

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ  
61166, Харків, просп. Науки, 14