

**РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД
НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА ДЛЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ
СВОЙСТВ СЛУЧАЙНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕГО
ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭЭГ**

ВОРОБЬЕВ С.А., ШИЛО А.В.

Анализ случайных последовательностей на небольших временных промежутках в целях определения их фрактальных свойств представляет сложную проблему. В то же время именно короткие промежутки характеризуют конечные функциональные состояния систем. Для преодоления этой проблемы можно использовать рекуррентный метод нормированного размаха. Статья посвящена разработке такого подхода и его применению к анализу электроэнцефаллограмм лабораторных животных (крыс линии Вистар).

Для прикладного анализа стохастических последовательностей важным является не только выяснить статистические характеристики измеряемого процесса, но и найти ответ на вопрос о его фрактальности. Так, во многих областях современного экспериментального естествознания (в эконометрии, социологии и т.д.), связанных с привлечением математических методов анализа случайных последовательностей, для более полного понимания происходящих явлений необходимо выяснить, основываясь на результатах измерений, насколько наблюдаемые процессы являются детерминированными, что обуславливает случайность измерений и в какой степени она присуща самому процессу.

Традиционные статистические подходы, хотя и позволяют добиться существенных результатов при анализе измеряемых случайных последовательностей, основаны на предположении о том, что случайная последовательность имеет чисто вероятностную природу с возможным наложением на неё каких-либо, обычно простых, детерминированных факторов. Чаще всего поиск детерминированных факторов сводится к определению тренда, присущего процессу [1-3], или выяснению сходства различных процессов при анализе комплексных явлений [4].

В то же время уже не вызывает сомнений, что кажущаяся случайность многих реальных физических, биологических, экономических, социальных и других процессов связана в первую очередь с заданием начальных условий развития (движения) этих систем. Кажущаяся случайность возникает не только из-за сложности организации систем, порождающих эти процессы, но и из-за нелинейности систем, имеющих, однако, весьма простую организацию. В свою очередь, сложная организация систем, если она является причиной кажущегося случайного поведения, является детерминированной. Если же сама организация системы подвержена изменениям, то их также нельзя считать полностью случайными. Поиск только трендовых детерминированных составляю-

щих в таких процессах зачастую не приводит к каким-либо результатам, поскольку в процессе могут и отсутствовать медленные, типа линейных, изменения, что, в свою очередь, не позволяет утверждать полную случайность процесса. В этом случае разумнее рассматривать изменения как следствия нелинейности системы, порождающей случайную последовательность.

Однако ясно, что на длинных промежутках функционирования таких систем, хотя каждое последующее состояние не может не зависеть от предыдущих, знание её ранних состояний не несёт никакой информации для текущих, более поздних, состояний. Это проявляется в отсутствии корреляции между реализациями процесса на длинных промежутках. Кроме того, в силу наложения и усложнения, действующих на систему причин, со временем теряется возможность проследить её детерминизм на достаточно малых промежутках. Это полностью соответствует закону увеличения энтропии системы. И только в этом случае можно говорить о случайности поведения.

В то же время большинство представляющих практический интерес процессов, например, электроэнцефаллограммы, не обладают столь большим временем жизни, за которое теряется их детерминированный характер. Чувство, мысль имеют конкретное содержание, прежде чем перестают влиять на поведение. Когда они "растворяются" и "исчезают", то уже не представляют интереса. Подобные примеры можно привести и для других функциональных состояний биологических, физических, экономических, социальных и других систем. Поэтому наиболее интересны те промежутки, когда процесс является ещё конкретным, детерминированным, т.е. не достаточно большие промежутки функционирования в том масштабе времени, который характерен для данной системы.

Мы так подробно остановились на этих вопросах, чтобы, во-первых, подчеркнуть скрытую детерминированность многих реальных процессов, а во-вторых – продемонстрировать особую важность анализа многих процессов на небольших промежутках времени. Выяснение фрактальной природы измеряемого случайного процесса позволяет утверждать его скрытый детерминированный характер. Как показал Херст [5, 6] на длинных промежутках фрактальность переходит в стохастичность. Это следует из того, что показатель Херста H на длинных проме-

жутках стремится к величине $1/2$: $\lim_{t \rightarrow \infty} H_t \rightarrow \frac{1}{2}$,

т.е. отсутствует корреляция $C(t)$ будущих приращений $y(t-t_0)$ процесса $y(t)$ с прошлыми $y(-t+t_0)$:

$$C(\tau) = \frac{E\{y(t-t_0)y(-t+t_0)\}}{E\{y^2(t-t_0)\}} = 2^{2H} - 1, \quad (1)$$

где $E\{\bullet\}$ – символ математического ожидания. Если же на конечной реализации показатель Херста

$H > (<) \frac{1}{2}$, это позволяет утверждать наличие фрактальных свойств у рассматриваемой случайной последовательности и заниматься поиском следствий этих свойств.

Экспериментальный закон Херста для произвольной случайной последовательности имеет вид

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{t}{2}\right)^H, \quad (2)$$

где

$$R = \max_{1 \leq i \leq t} X(i, t) - \min_{1 \leq i \leq t} X(i, t), \quad (3)$$

$$X(i, t) = \sum_{i=1}^t (y(i) - \bar{y}(i)), \quad (4)$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t y(i), \quad (5)$$

$$S = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (y(i) - \bar{y}(i))^2, \quad (6)$$

$t = 0, 1, 2, \dots$ – дискретное время.

В ряде случаев показатель H удобнее вычислять рекуррентно. Во-первых, это связано с уменьшением объема вычислений, что существенно при обработке больших числовых массивов, а во-вторых – рекуррентное вычисление позволит проследить динамику изменения показателя H во времени. Это, в свою очередь, дает возможность судить о том, существует ли для данной случайной последовательности установившееся значение показателя Херста, что особенно важно, когда рассматриваются конечные по времени функциональные состояния систем. Если установившееся значение показателя Херста H отлично

от $\frac{1}{2}$, то анализируемую случайную последовательность можно попытаться рассматривать как фрактальную.

Более того, если $H > \frac{1}{2}$, то случайная последовательность обладает свойством персистентности, т. е. в процессе сохраняется имеющаяся тенденция.

Если же $H < \frac{1}{2}$, то это говорит о наличии антиперсистентности.

Такие выводы об анализируемой случайной последовательности могут оказаться особенно важными при анализе эконометрических рядов, поскольку персистентность в этом случае означает сохранение роста или спада при его наличии в прошлом, а антиперсистентность свидетельствует об изменении роста на спад при наличии роста в прошлом или изменении спада на рост при наличии спада в прошлом. В некоторой степени этот показатель позволяет судить об устойчивости системы, порождающей анализируемую случайную последователь-

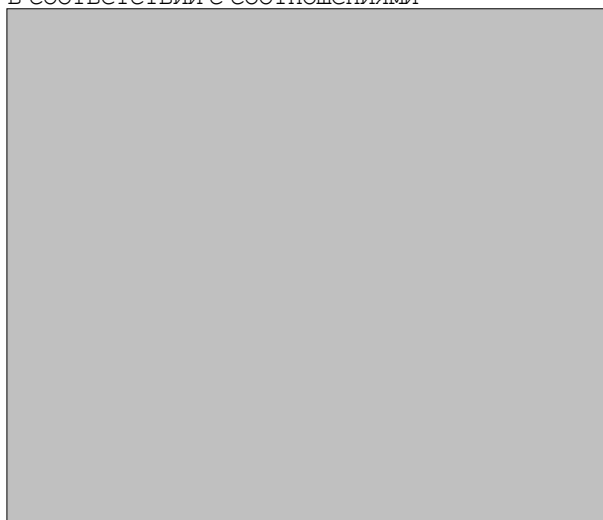
ность. При этом систему можно считать устойчивой,

если $H > \frac{1}{2}$.

Итак, рекуррентный метод нормированного размаха для определения фрактальности случайной последовательности можно записать следующим образом. Из (2) следует, что

$$H(t+1) = \lg\left(\frac{R(t+1)}{S(t+1)}\right) / \lg\left(\frac{t+1}{2}\right). \quad (7)$$

Здесь $R(t+1)$ – размах, вычисляемый рекуррентно в соответствии с соотношениями



$S(t+1)$ – среднеквадратическое отклонение случайной последовательности, вычисляемое по рекуррентной формуле

$$\begin{cases} S(t+1) = D^2(t+1), \\ D(t+1) = \frac{t}{t+1} D(t) + \\ + \frac{t^2}{(t+1)^3} (y(t+1) - \bar{y}(t))^2, \\ D(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В качестве примера мы решили рассчитать показатель Херста для биоэлектрической активности (БЭА) головного мозга лабораторных животных (крысы линии Вистар), находящихся в различных функциональных состояниях, и изучить его поведение на различных временных интервалах.

Численные данные, использованные нами для расчетов показателя Херста, представляли собой 30-секундные отрезки БЭА, снятые с поверхности сомато-сенсорной коры с частотой дискретизации 50 Гц (1536 точек). На основании поведенческих критериев и анализа спектра мощности были отобраны отрезки БЭА, соответствующие следующим функциональным состояниям: свободное поведение (рис. 1, кривая 1), поисковая активность (рис. 1, кривая 2), дремота (рис. 1, кривая 3), наркотизация (рис. 2., кривая 1), влияние ритмического холодового воздействия (РХВ) на каудальные рецепторы (рис. 2, кривые 2, 3), сенсорная депривация (рис. 3, кривые 1, 2)

(введение блокатора АХ-ергической синаптической передачи – тубокурарина) и периферическое введение норадреналина (НА) (рис. 3, кривая 3). Выбор функциональных состояний обусловлен необходимостью набора достаточного количества точек для проведения анализа.

Чтобы определить показатель Херста H , были построены функции $\lg(R/S)$ в зависимости от $\lg(T)$. Как видно из рис. 1-3 и таблицы, показатель Херста, рассчитанный для БЭА головного мозга крысы во всех исследованных функциональных состояниях, ведет себя приблизительно одинаково. Можно выделить две области: 1-я – с количеством точек 300–500 (6–10 с.), где показатель Херста несколько выше среднего по реализации, и 2-я, где показатель Херста выходит на плато и имеет приблизительно одно и то же значение $\sim 0,3$ до конца исследованного временного диапазона. Это разделение особенно выявляется при наркотизации животного (рис. 2), где показатель Херста достигает значения 0,42, и блокаде синаптической передачи (рис. 3) – $H = 0,32$. Исключение составляют временные интервалы, соответствующие свободному поведению (рис. 1, кривая 1), поисковой активности (рис. 1, кривая 2) и дремоте (рис. 1, кривая 3). Тем не менее, это позволяет подтвердить наличие внутренней структуры в БЭА, ее отличие от случайного процесса и дать ее математическое описание как фрактального временного ряда. Показатель Херста $\sim 0,3$ свидетельствует об антиперсистентности поведения системы в выбранных функциональных состояниях. Более того, изменение функционального состояния с помощью различных химических (введение наркотических веществ (смесь тиопентала и оксибутирата натрия (рис. 2)), введение блокатора синаптической передачи тубокурарина (рис. 3, кривая 1), периферическое введение НА (рис. 3, кривые 2, 3) и физического методов (воздействие холодом на терморепцепторы хвоста крысы (рис. 2, кривые 2, 3)), судя по показателю Херста, не изменяет динамической структуры работы мозга. По нашему мнению, это может свидетельствовать, с одной стороны, об устойчивости механизмов, обеспечивающих функционирование центральной нервной системы при данных воздействиях. Значит, любое воздействие, выводящее систему из равновесия, с достаточной вероятностью будет нивелироваться в течение интервала времени, приблизительно равного интервалу воздействия, сохраняя тем самым базовый (рабочий) уровень функционирования системы. С другой стороны, $H \sim 0,3$, свидетельствующий об антиперсистентности, может указывать на неустойчивость, быструю смену функциональных состояний, что в принципе характерно для функционирования ЦНС.

Таким образом, активность головного мозга устроена иначе, чем просто случайный гауссовский процесс. Это позволяет промоделировать БЭА как фрактальную случайную функцию в виде

$$y_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \times \sum_{i=n(t-M)}^{nt} \left(t - \frac{i}{n}\right)^{H-\frac{1}{2}} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} y(i), \quad (10)$$

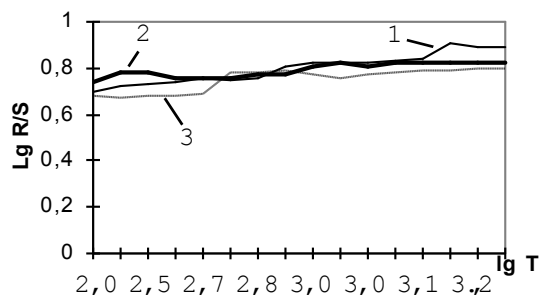


Рис. 1. График зависимости $\lg R/S$ от $\lg T$ при свободном поведении (1), поисковой активности (2) и дремоте (3)

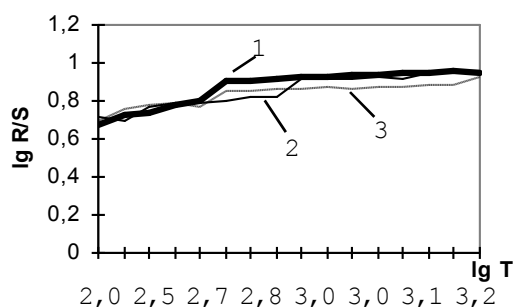


Рис. 2. График зависимости $\lg R/S$ от $\lg T$ при наркотизации (1), ритмическом холодовом воздействии 5 мин (2) и ритмическом холодовом воздействии 70 мин (3)

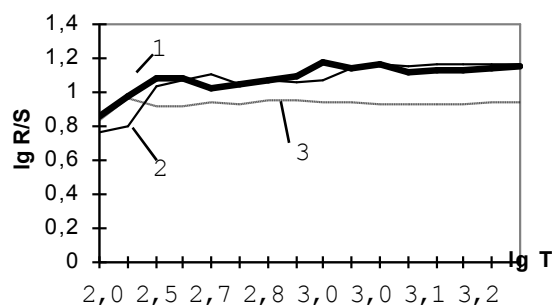


Рис. 3. График зависимости $\lg R/S$ от $\lg T$ при введении тубокурарина (1), введении норадреналина на фоне тубокурарина (2) и через 5 мин после введения норадреналина (3)

Значения показателя Херста для различных функциональных состояний ЦНС

The content of this table is obscured by a grey box in the original image

где $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция; $i = 1, 2, \dots, M$. Показатель Херста H , равный примерно 0,3, свидетельствует об антиперсистентности поведения системы в широком временном интервале для выбранных функциональных состояний и, следовательно, о неустойчивости соответствующих функциональных состояний. Рассчитанный с помощью предложенного рекуррентного метода характеристический показатель Херста отличается от результата, полученного в [7].

Литература: 1. Чуев Ю.В., Михайлов Ю.Б., Кузьмин В.И. Прогнозирование количественных характеристик процессов. М.: Сов. радио, 1975. 400 с. 2. Кобринский Н.Е. Информационные фильтры в экономике. М.: Статистика, 1978. 287 с. 3. Кашьяп Р.Л., Рао А.Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983. 384 с. 4. Ивахненко А.Г., Мюллер Й.А. Самоорганизация прогнозирующих моделей. К.: Техніка, 1985. Берлин: ФЭБ Ферлаг Техник, 1984. 223 с. 5. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с. 6. Чирков Б.В. Природа и свойства динамического хаоса // Тр. междунар. симпозиума "Теоретико-групповые

методы в физике". М., С. 389. 7. Джунушалиев В.Д., Сороко С.И. Использование фрактальных методов для исследования внутренней структуры ЭЭГ // Физиология человека и животных. 1993. С. 137–140.

Поступила в редколлегию 15.09.98

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Ваврив Д.М.

Воробьев Сергей Анатольевич, канд. техн. наук, старший научный сотрудник ПНИЛАСУ ХТУРЭ. Научные интересы: искусственные нейронные сети, фильтрация и прогнозирование нестационарных процессов, фракталы и фрактальная размерность. Хобби: психология, иностранные языки, музыка. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14; тел. (0572) 40-98-90. e-mail: svor@kture.kharkov.ua

Шило Александр Владимирович, канд. биол. наук, старший научный сотрудник отдела криофизиологии ИПК и К НАНУ. Научные интересы: нейрофизиология головного мозга, хаос в физиологии, фракталы и фрактальная размерность. Хобби: философия, китайская гимнастика, аквариумные рыбки. Адрес: Украина, 310015, Харьков, ул. Переяславская, 23, тел. (0572) 70-29-35; e-mail: avshilo@lincom.kharkov.ua.