УДК 621.385

О. М. НІКІТЕНКО, канд. техн. наук

РОЗПОДІЛЕННЯ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОТЕНЦІАЛУ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ МАГНЕТРОНІ ОБЕРНЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Проектування та теоретичні дослідження систем зі схрещеними полями як класичної, так і оберненої конструкції вимагають сумісного розв`язання рівнянь руху заряджених частинок, рівняння збудження та Пуасона.

Однак, спочатку, коли просторового заряду ще немає, замість рівняння Пуасона розподілення потенціалу в системі описується рівнянням Лапласа [1].

Таким чином, у системах зі схрещеними полями оберненої конструкції для адекватного врахування статичних електричних полів та їх впливу на роботу системи в цілому необхідно вміти обчислювати такі поля, тобто вміти побудувати розв`язок рівняння Лапласа за складних межових умов.

З іншого боку, через форму анодного блока розподілення електростатичного поля у таких системах є просторово неоднорідним, найчастіше просторово-періодичним, що також впливає на роботу приладів зі схрещеними полями оберненої конструкції.

Формулювання задачі

Розглянемо рівняння Лапласа для системи, яка має форму, що наведена на рис. 1.

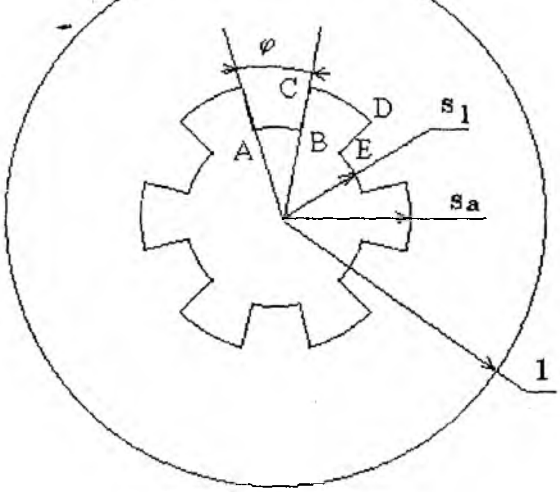

Рис. 1

Рівняння Лапласа для такої системи, і взагалі для будь-якої циліндричної системи, має вигляд (тут обмежемося двовимірним випадком)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0 .$$

Для узагальнення системи на будь-які розміри доцільніше перейти до безрозмірних координат, тоді матимемо рівняння

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial U}{\partial s}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=0 \qquad (1)$$

де $s = r/r_c$.

Таким чином, необхідно здобути розв'язок рівняння (1) за таких межових умов:

$$\begin{aligned}&1.\ U(1)=0;\\&2.\ U(\Gamma)=U_a,\end{aligned} \qquad (2)$$

де Г – поверхня анодного блоку.

Побудова розв'язку рівняння Лапласа за складних межових умов.

Для розв'язку рівняння (1) використаємо метод розділення змінних.

Отже, загальний розв`язок рівняння (1) з застосуванням методу розділення змінних для оберненої конструкції має вигляд

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n s^n + D_n s^{-n})(A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi)\,. \qquad (3)$$

Періодом анодної системи магнетрона, що сповільнюється, як наведено на мал. 1, є кут AOE, або в кутовому обчисленні $2\pi/N$, де N – кількість резонаторів анодної системи. Тоді вираз (3) матиме вигляд

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n s^n + D_n s^{-n})(A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi)\,, \qquad (4)$$

через те що $2\pi / \dfrac{2\pi}{N} = N$.

Для знаходження конкретного вигляду виразу (4) необхідно застосувати межові умови.

Межові умови на катоді

$$u(1,\varphi) = 0$$

Через це $C_n + D_n = 0$, звідси $D_n = - C_n$. Після визначення коефіцієнта D_n розв`язок (2) матиме вигляд

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})(A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi)\,. \qquad (5)$$

Межові умови на аноді:

1. Дуга AB

$s = s_L$

$-\theta \le \varphi \le \theta$

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s_L + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s_L^{Nn} - s_L^{-Nn})(A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi)$$

2. Відрізок BC

$s_a \le s \le s_L$

$\varphi = \theta$

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})(A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta)$$

3. Дуга CD

$s = s_a$

$\theta \le \varphi \le 2\pi/N - \theta$

$$u(s,\varphi)\Big|_{\substack{s_a \le s \le s_L \\ \varphi=\theta}} = -A_0 \ln s_a + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s_a^{Nn} - s_a^{-Nn})(A_n \sin Nn\varphi + B_n \cos Nn\varphi) = U_a$$

4. Відрізок DE

$s_a \le s \le s_L$

$\varphi = 2\pi/N - \theta$

$$u(s,\varphi)\Big|_{\substack{s_a \le s \le s_L \\ \varphi=\theta}} = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})[A_n \sin Nn(\frac{2\pi}{N} - \theta) + B_n \cos Nn(\frac{2\pi}{N} - \theta) =$$

$$= -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})(-A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta = U_a$$

Порівняємо умови для відрізків BC та DE:

$$-A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})(A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta) =$$

$$= -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (s^{Nn} - s^{-Nn})(-A_n \sin Nn\theta + B_n \cos Nn\theta)$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) \sin Nn\theta = 0 .$$

Позначимо $F_n = A_n C_n sin Nn\theta$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} F_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) = 0$, або $\sum_{n=1}^{\infty} F_n s^{Nn} = \sum_{n=1}^{\infty} s^{-Nn}$.

Для будь-якого фіксованого s це рівняння виконуватиметься за умови $F_n = 0$. Таким чином остаточно маємо

$$u(s,\varphi) = -A_0 \ln s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s^{Nn} - s^{-Nn}) \cos Nn\varphi . \tag{6}$$

Отже, залишилося визначити коефіцієнти A_0 та A_n.

Визначення коефіцієнтів у розв'язанні рівняння Лапласа.

Визначити коефіцієнти у виразі (6) можна за допомогою кількох методів: варіаційних, методу Л.В. Конторовича, методу Треффтца, методів Ритца та Гальоркіна, методу сіток тощо.

У низці випадків застосування методу Треффтца призводить до простіших обчислень у порівнянні з застосуванням методів Ритца та Гальоркіна, оскільки за методом Треффтца обчислюються лише інтеграли по межі області, а не по самій області.

Для визначення коефіцієнтів виразу (6) скористаємося методом Треффтца, який є дещо протилежним щодо методів Ритца та Гальоркіна. В останніх методах розв'язок задачі шукають у вигляді лінійної комбінації функцій, які задовольняють диференціальному рівнянню, а не межовим умовам.

Невизначені коефіцієнти, що входять до розв'язку задачі, за методом Треффтца визначаються таким чином, щоб найточніше виконувалися межові умови; у методах Ритца та Гальоркіна невизначені коефіцієнти визначаються за умов найточнішого задовольняння диференціального рівняння задачі.

Переходячи до опису методу Треффтца, розглянемо рівняння

$$\Delta U = f(x, y) \tag{7}$$

за межової умови: $U = \varphi$ на контурі C області.

Припустимо, що V є якимось окремим розв'язком неоднорідного рівняння (7), а V_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ – окремі розв'язки, які відповідають однорідному рівнянню

$$\Delta U = 0 \quad (\Delta V_k = 0) .$$

Тоді

$$\overline{U} = V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k \tag{8}$$

також буде розв'язком неоднорідного рівняння (7). Сталі A_k у наближеному розв'язку $\overline{U}$ необхідно підбирати таким чином, щоб найточніше виконувалася межова умова, якій задовольняє точний розв'язок задачі.

Для визначення коефіцієнтів A_k необхідно, аби інтеграл

$$I = \int_C (\overline{U} - U)^2 dl = \int_C (\overline{U} - \varphi)^2 dl$$

був би найменшим. Ця вимога призводить до умов

$$\frac{\partial I}{\partial A_m} = 2 \int_C (\overline{U} - \varphi) V_m dl = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots n)$$

або після підстановки виразу $\overline{U}$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_C V_k V_m dl = \int_C (\varphi - V) V_m dl \qquad (m = 1, 2, \ldots n) \tag{9}$$

Система рівнянь (9) й визначає коефіцієнти A_k.

За Треффтцем, одначе, коефіцієнти A_k знаходять дещо по-іншому. Позначимо через F різницю

$$F = \overline{U} - U .$$

Через те, що обидві функції $\overline{U}$ та U задовольняють рівнянням

$$\Delta\overline{U} = f \quad \text{та} \quad \Delta U = f \, ,$$

функція F відповідає рівнянню $\Delta F = 0$.

Визначення функції, що задовольняє рівнянню $\Delta F = 0$, еквівалентне визначенню функції, яка призводить до мінімуму інтеграла

$$I = \int_S \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] dS \; ,$$

або

$$I = \int_S \left[\left(\frac{\partial(\overline{U} - U)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\overline{U} - U)}{\partial y} \right)^2 \right] dS .$$

Умови обернення у мінімум останнього інтеграла стають

$$\frac{\partial f}{\partial A_m} = 2 \int_S \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial V_k}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial V_m}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial V_k}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{\partial V_m}{\partial y} \right] dS = 0$$

Коротше останні співвідношення можна записати таким чином:

$$\int_S \nabla \left(V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k - U \right) \nabla V_m dS = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots n) \tag{10}$$

Для подальших перетворень скористаємося формулою Грина, котру переписано для площинного випадку:

$$\int_S (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \nabla \varphi) dS = \int_C \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \, .$$

Припускаючи в цій формулі $\varphi = V_m$, $\psi = V + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k V_k - U$,

знайдемо

$$\int_S \left(V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k - U \right) \Delta V_m dS + \int_S \nabla \left(V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k - U \right) \nabla V_m dS =$$
$$\int_C \left(V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k - U \right) \frac{\partial V_m}{\partial n} dl$$

Перший з інтегралів у лівій частині рівняння, що отримано, зникає через те, що $\Delta V_m = 0$, а другий – через формулу (10). Таким чином, знаходимо

$$\int_C \left(V + \sum_{k=1}^{n} A_k V_k - U \right) \frac{\partial V_m}{\partial n} dl = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots n),$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_C V_k \frac{\partial V_m}{\partial n} dl = \int_C (U - V) \frac{\partial V_m}{\partial n} dl \quad (m = 1, 2, \ldots n).$$

Через те, що вздовж області функція U є відомою й дорівнює φ, ми отримаємо таке рівняння Треффтца для визначення коефіцієнтів A_k:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_C V_k \frac{\partial V_m}{\partial n} dl = \int_C (\varphi - V) \frac{\partial V_m}{\partial n} dl \qquad (m = 1, 2, \ldots n)\ [2].$$

Застосуємо цей метод для знаходження розв'язків рівняння (1). Оскільки у даному випадку потенціал електростатичного поля визначається однорідним рівнянням $\Delta U = 0$, то необхідно припустити, що $V = 0$. Окремі розв'язки рівняння $\Delta U = 0$ треба вибрати таким чином, щоб вони задовільняли умовам симетрії задачі та межовим умовам (2).

Цим умовам задовільняють структурні функції, що отримані в виразі (6):

$$\begin{aligned} V_1 &= \ln s \\ V_n &= \left(s^{(n-1)N} - s^{-(n-1)N}\right)\cos(n-1)N\varphi \end{aligned} \qquad (11)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$\overline{U} = \sum_{k=1}^{n} A_k V_k$$

й для визначення коефіцієнтів A_k скористаємося першим способом, для чого складемо рівняння типу (9).

У цих рівняннях під контуром C розуміємо повний контур області, який утворюється контурами анода та катода, й такий, який обходить у напрямку, таким чином, що область, яка знаходиться між ними, залишається ліворуч від спостерігача, котрий рухається вздовж контуру.

Враховуючи, що у випадку, котрий розглядають, $V = 0$, й розуміючи під C_2 внутрішній контур області, де $U = 0$, маємо

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \int_C V_k V_m dl = U_0 \int_C V_m dl \qquad (m = 1, 2, \ldots n)$$

У розгорнутому вигляді система рівнянь, що отримано, можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &A_1 \int_C V_1^2 dl + A_2 \int_C V_1 V_2 dl + A_3 \int_C V_1 V_3 dl + \ldots A_n \int_C V_1 V_n dl = U_0 \int_{C_1} V_1 dl \\ &A_1 \int_C V_2 dl + A_2 \int_C V_2^2 dl + A_3 \int_C V_2 V_3 dl + \ldots A_n \int_C V_2 V_n dl = U_0 \int_{C_1} V_2 dl \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &A_1 \int_C V_1 V_n dl + A_2 \int_C V^2 V_n dl + A_3 \int_C V_3 V_n dl + \ldots A_n \int_C V_n^2 dl = U_0 \int_{C_1} V_n dl \end{aligned} \qquad (12)$$

Підставляючи у цю систему замість V_i значення структурних функцій з рівнянь (11) та розв'язуючи отриману систему, визначемо коефіцієнти A_i, значення яких наведено в таблиці.

Таблиця

A_i	Кількість резонаторів			
	6	8	10	12
A_1	1,338983936	1,309797184	1,249865869	1,221390006
A_2	$-1{,}8141\ 10^{-3}$	$-2{,}1178\ 10^{-4}$	$-1{,}8616\ 10^{-5}$	$-1{,}9584\ 10^{-6}$
A_3	$4{,}7263\ 10^{-6}$	$6{,}7276\ 10^{-7}$	$5{,}6258\ 10^{-10}$	$6{,}8108\ 10^{-12}$
A_4	$-1{,}1489\ 10^{-8}$	$-1{,}8067\ 10^{-11}$	$-1{,}3741\ 10^{-14}$	$-1{,}8824\ 10^{-17}$
A_5	$2{,}3765\cdot\ 10^{-11}$	$3{,}8425\ 10^{-15}$	$2{,}551\ 10^{-19}$	$3{,}9278\ 10^{-23}$
A_6	$-4{,}1002\ 10^{-14}$	$-6{,}42346\ 10^{-19}$	$-3{,}5193\ 10^{-24}$	$-6{,}072\ 10^{-29}$
A_7	$5{,}8477\ 10^{-17}$	$8{,}3411\ 10^{-22}$	$3{,}3927\ 10^{-29}$	$6{,}5494\ 10^{-35}$
A_8	$-6{,}8103\ 10^{-20}$	$-8{,}1522\ 10^{-27}$	$-1{,}8738\ 10^{-34}$	$-4{,}0437\ 10^{-41}$

Як ілюстрацію на рис. 2 наведено розподілення електростатичного потенціалу в 6-резонаторному магнетроні оберненої конструкції.

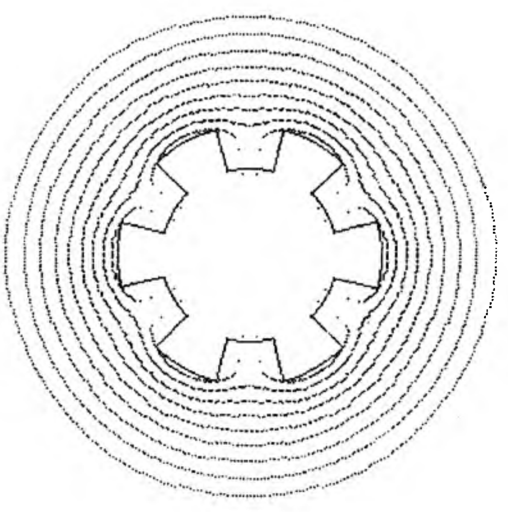

Рис. 2

Провисання еквіпотенціалей електростатичного потенціалу в щілині, що обумовлено сталою напругою аноду, призводить до зниження потенціалу в області щілини, а, отже, й ефективного анодного потенціалу, котрий діє на електронний потік.

Список літератури: [1] *Morishita Y.* CAD of Microwave Tubes // Теребідзьон гаккай ші. – 1978. – 32 – №3. – С.182-188. – Яп. [2] *Методы расчета электростатических полей.* / Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходеев Н.Н. – М.: Высшая школа, 1963. – 415 с.

Харьковский государственный технический
університет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 18.01.2000