УДК 621.391

В. С. ПОПЕНКО, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СИГНАЛОВ

Разработка математической модели, адекватной системе сигналов, является весьма актуальной проблемой в задачах синтеза сигналов.

Для построения математической модели системы сигналов прежде всего необходимо разбить все сигналы на классы в соответствии с их математическими свойствами. Приведенные в работах [1—3] способы классификации сигналов не могут быть положены в основу построения модели, так как функции, обладающие одинаковыми математическими свойствами, относятся к разным классам, а имеющие разные математические свойства — к одному классу, в силу чего возникают сложности при определении натуральной математической структуры сигналов.

По мнению автора, наиболее естественными по математическим свойствам являются классы непрерывных, дискретных и кусочно-непрерывных на отрезке $[0;\ T]$ сигналов. При этом, сигнал $x(t)$ непрерывен на отрезке $[0;\ T]$, если в каждой точке этого отрезка выполняется равенство $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=x(t_0)$, а сигнал $x(t)$ дискретный, если он принимает конечное число значений.

Множества непрерывных и дискретных сигналов являются подмножествами кусочно-непрерывных сигналов. Кусочно-непрерывный сигнал — сигнал, для которого можно указать конечное покрытие отрезка $[0;\ T]$ — τ_k, и что на каждом элементе покрытия сигнал $x(t)$ непрерывен.

А. Модель систем непрерывных сигналов. Рассмотрим пространство моделей Ф, которое имеет вид

$$\Phi=\{\vec{\varphi}_1=(\varphi_1(t);\ \varphi_2(t);\ \dots\ \varphi_n(t))\}.$$

Элементами этого пространства являются все возможные наборы из n — нормированных функций пространства $C\ [0;\ T]$. $\varphi\in\Phi$ модель системы ортогональных сигналов, если $\int\limits_0^T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt=0$, если $i\neq j$ (1).

Пусть $\{\varphi_k(t)\}$ — множество собственных нормированных функций задачи Штурма — Лиувилля на отрезке $[0;\ T]$

$$\varphi''(t)+[\lambda-q(t)]\varphi(t)=0;\ \varphi(0)=\varphi(t)=0,$$

где $$q(t)\geqslant 0,\ q(t)\in C'[0;\ T].$$

Из работы [1] известно, что для функций-решений данной задачи выполняется условие (1). Следовательно, первые n собственных функций задачи (2) при каждом фиксированном $q(t)$ задают модель системы непрерывных ортогональных сигналов. Множество всех таких моделей обозначим Φ_0. Для каждого $\vec{\varphi}\in\Phi$ рассмотрим дискретную функцию двух переменных $\rho\vec{\varphi}(i,\ j)=$ $=\left|\int\limits_0^T \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt\right| \neq j$ (3). Эта функция характеризует величину переходной помехи, она имеет место в случае использования линейно-независимых сигналов. Назовем элемент $\vec{\varphi}_\varepsilon$ моделью системы ε — квазиортогональных сигналов, если переходная помеха элемента $\vec{\varphi}$ не превосходит заданной величины ε, т. е. $\rho_{\vec{\varphi}_\varepsilon}(i,\ j)\leqslant\varepsilon$ (4). Обозначим множество всех моделей систем ε — квазиортогональных сигналов через Φ_ε. Множество Φ_ε можно получить из первых n — собственных функций задачи Штурма — Лиувилля на полуоси при различных значениях $q(t)$

$$\psi''(t)+[\lambda-q(t)]\psi(t)=0;\ \psi(0)=0,\ \psi(t)\in L_2[0;\ \infty],$$

где $q(t)\geqslant 0$; $q(t)\in C'[0;\ \infty]$ (5). Так же, как и для задачи (2), множество собственных функций задачи (5) ортогонально на полуоси. Если $l>0$ некоторое число, то система собственных функций $\{\psi_k(t)\}$ нормирована в пространстве $L_2[0;\ e]$ и функции вида $\varphi_k(t)=\sqrt{\frac{l}{T}}\,\psi_k\left(\frac{l}{T}\cdot t\right)$ (6) будут ε — квазиортогональными $\rho_{\vec{\varphi}}(i,j)=$ $=\rho_{\vec{\psi}}(i,\ j)$. Это следует из рассмотрения соотношения (1). То есть при изменении длительности сигнала (6) величина переходной помехи не изменяется, при этом, если $\lim\limits_{\to\infty}\psi_k(t)=0$ для всех k, то при надлежащем выборе e, $\vec{\varphi}\in\Phi$.

Следует отметить, что задача (2) является частным случаем задачи (5), при $l=T$, где l — граничная точка, правее которой функции тождественно равны нулю.

Таким образом, моделью систем непрерывных сигналов является система функций, определяемых согласно (6) через собственные функции задачи (5).

Б. Модель систем дискретных сигналов. В общем случае, функция, задающая дискретный сигнал, является кусочно-постоянной $\theta(t)=A_k$ при $t\in\tau_k$, где A_k — некоторое число, а τ_k — конечное покрытие отрезка $[0;\ T]$, то есть $\tau_i \cap \tau_j = \Phi$ $i \neq j$ $\bigcap\limits_{k=1}^{m} \tau_k = [0;\ T]$, здесь m — число значений, которое принимает сигнал. Так как τ_k — конечное, то можно выбрать такой отрезок времени Δt, что на каждом элементе покрытия отрезок Δt укладывается целое раз, т. е. любой дискретный сигнал можно представить в виде суммы конечного числа прямоугольных импульсов длительностью Δt и амплитудами $\{A_k\}$. При $T = N\Delta t$ сигнал $\theta(t)$ однозначно определяется n-мерным вектором $\vec{\theta} = (\theta_1;\ \theta_2;\ \dots \theta_N)$, где $\theta_k = \theta(t)$ при $t \in [(k-1)\Delta t;\ k\Delta t]$. Для дискретного сигнала $\int\limits_0^T \theta(t)\,dt = \Delta t \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k$ энергия сигнала $E_c = \Delta t \sum\limits_{k=1}^{N} \theta_k^2$ (7), скалярное произведение $\int\limits_{\tau} x(t)\,y(t)\,dt = \Delta t \sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k = \Delta t\,(\vec{x}\,\vec{y})$ (8), где Δt — общий отрезок для двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Рассмотрим систему функций $\{\theta_1(t);\ \theta_2(t)\ \dots\ \theta_N(t)\}$, задающих систему дискретных сигналов. Для этой системы можно задать минимальный отрезок Δt так, что он будет общим для всех сигналов, тогда каждый сигнал моделируется точкой арифметического N-мерного пространства R^N.

Система сигналов однозначно определяется матрицей порядка $n \otimes N$.

$$\|\theta_{ki}\| = \begin{pmatrix} \theta_{11};\ \theta_{12}\ \dots\ \theta_{1N} \\ \theta_{21};\ \theta_{22}\ \dots\ \theta_{2N} \\ \vdots\quad \vdots\quad \vdots\ \vdots \\ \theta_{n1};\ \theta_{n2}\quad \theta_{nN} \end{pmatrix} \begin{matrix} \theta_{ik} = \theta_i(t);\ i = 1, 2 \dots n; \\ t \in [\Delta t\,(k-1);\ \Delta t_k], \end{matrix}$$

Из (7), (8) следует, что матрица $A = \Delta t \|\theta\| \cdot \|\theta\|^{\mathrm{T}}$ (где $\|\theta\|^{\mathrm{T}}$ — транспонированная матрица), задающая энергии всех сигналов системы (по главной диагонали) и все скалярные произведения (шумы неортогональности) сигналов.

Таким образом, матрица $\|\theta\| = \vec{\theta}$ является моделью системы дискретных сигналов. Для этой модели задаются все операции, необходимые для исследования системы.

В. Модель систем кусочно-непрерывных сигналов. Кусочно-непрерывный сигнал в граничных точках элементов покрытия может иметь разрывы как первого, так и второго рода.

Реальные сигналы ограничены по амплитуде, поэтому необходимо в C_1 $[0;\ T]$ выделить подмножество с разрывами только первого рода. Это подмножество образует пространство C' $[0;\ T]$ — пространство кусочно-гладких сигналов. Сигнал $x(t)$ гладкий, если функция, описывающая его, непрерывна на отрезке $[0;\ T]$ вместе со своей первой производной. Множество гладких сигналов образует линейное пространство $C^{(1)}$ $[0;\ T]$. Сигнал $x(t)$ — кусочно-гладкий, если можно указать такое конечное покрытие отрезка $[0;\ T]$ — $\{\tau_k\}$, что на каждом элементе этого покрытия функция, описывающая его, гладкая, т. е.

$\bigcup_{k=1}^{m} \tau_k = [0;\ T];\ \tau_i \cap \tau_j = \varnothing\ (i \neq j),\ x(t) \in C'\,[\tau_k]$. Ясно, что $C_1^{(1)}[0;\ T] \subset \subset L_2\,[0;\ T]$. Пусть $\{e_i(t)$ — базис $L_2\,[0;\ T]$, тогда согласно теореме Дирихле любой кусочно-гладкий сигнал можно представить в виде ряда $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e_i(t)$ (9), Такое задание является естественным, если $\{e_i(t)\}$ собственные функции линейного фильтра, правая часть соотношения (9) задает непрерывный сглаженный сигнал, который равен частичной сумме ряда (9), сходящегося в среднем $k\,x(t)$, т. е. $\lim \| x(t) - \sum_{i=1}^{n} C_i e_i(t) \| = 0$.

Исходя из (9), каждый кусочно-гладкий сигнал при выбранном базисе однозначно определяется коэффициентами обобщенного ряда Фурье, т. е. задается бесконечномерным вектором — $(C_1;\ C_2 \ldots C_n \ldots)$. Такое представление сигнала используется для анализа свойств сигналов при обработке (4). При синтезе системы сигналов задание в виде бесконечного вектора — одного сигнала и, следовательно, в виде бесконечномерной матрицы — модели системы сигналов не может быть использовано, поскольку построение регуляризатора для бесконечномерной матрицы весьма сложно.

Возможен другой подход к построению модели кусочно-гладких сигналов, который в основном совпадает с методом построения математической модели системы непрерывных сигналов. В этом случае модель системы кусочно-гладких сигналов может быть задана первыми n-собственными функциями краевой задачи Штурма — Лиувилля, только для $q(t) \in L_2\,[0;\ T]$. Для построенной таким образом модели сложным будет выбор множества U_0, т. е. с точки зрения синтеза такая модель является неудобной. В реальных системах передачи дискретной информации кусочно-непрерывный сигнал формируется последовательно (вначале как дискретный, в кодере, а затем как кусочно-гладкий — в модуляторе), поэтому вполне естественно представить кусочно-гладкий сигнал в виде произведения двух сигналов дискретного $\theta(t)$ и непрерывного $\varphi(t)$, т. е. $x(t) = \theta(t)\,\varphi(t)$ и модель системы кусочно-гладких сигналов может быть задана парой моделей $\vec{x} = (\vec{\theta};\ \vec{\varphi})$. Такая модель позволяет свести синтез систем кусочно-гладких сигналов к синтезу систем непрерывных и дискретных сигналов в отдельности.

Список литературы: 1. *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. М., 1970. 250 с. 2. *Варакин Л. Е.* Теория систем сигналов. М., 1978. 208 с. 3. *Трахман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М., 1972. 120 с. 4. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистичекой радиотехники. М., 1974. 356 с.

Поступила в редколлегию 03.10.88