УДК 621.317.799

Ю.Е. ГОРДИЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
А.Ю. ПАНЧЕНКО, канд. физ. - мат. наук, А.А. РЯБУХИН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАТОРНОГО СВЧ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ТОРОИДАЛЬНОГО ТИПА

Для измерения электрофизических параметров материалов применяются закрытые и открытые резонаторные измерительные преобразователи (РИП). В закрытых образец полностью помещается внутрь резонирующего объема, в открытых – связь с образцом осуществляется через измерительную апертуру. В данной работе рассматривается более простой закрытый тороидальный резонатор, являющийся удобной моделью более распространенного РИП с коаксиальной измерительной апертурой.

В работе [1] проведено исследование тороидального резонатора с целью оценки возможности его применения в измерителе диэлектрической проницаемости в СВЧ диапазоне. Теоретическое исследование основывается на методе частичных областей, при котором внутренний объем резонатора разбивается в продольном направлении на две области, как показано на рис. 1, *а*. Рассматривается возбуждение резонатора на E_{010} типе колебаний. Азимутальная составляющая магнитного поля в каждой из областей выражается через функции Грина и источники, расположенные на границе между областями. В качестве источников используется тангенциальная составляющая электрического поля на границе. Стенки резонатора считаются идеально поводящими, на них тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю. Из условия непрерывности полей на границе получается характеристическое уравнение резонатора. При переходе к практической реализации измерения диэлектрической проницаемости возникает необходимость вытачивания из исследуемого материала шайбы и помещение ее под центральным стержнем резонатора, что требует применения конструктивных элементов для ее фиксации, которые могут вызвать искажение электромагнитного поля. Более удобным является резонатор, в котором образец занимает весь объем под центральным стержнем (рис.1, *б*).

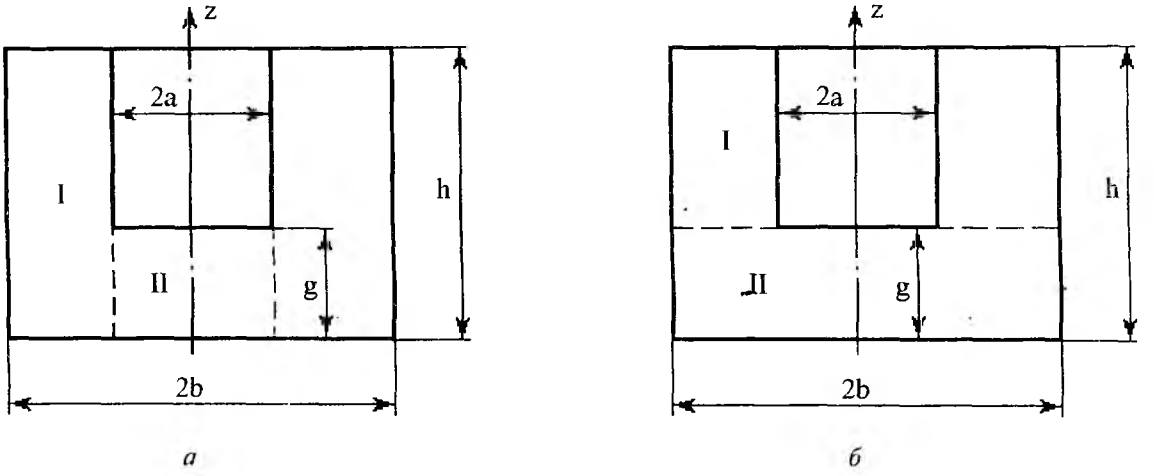

Рис. 1

В отличие от [1] разделим резонансную полость на две области поперечной поверхностью z = g. Магнитное поле в каждой из областей возбуждается магнитными токами, эквивалентными тангенциальной составляющей электрического поля в сечении

$$H_{\varphi}^{I}(g_{+0},r) = j\cdot\omega\cdot\varepsilon_0\cdot\int_a^b G^{I}(g,g,r,r')\cdot E_r(g,r')\cdot r'dr', \qquad g<z<h;$$

$$H_{\varphi}^{II}(g_{-0},r) = -j\cdot\omega\cdot\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}^{II}\cdot\int_a^b G^{II}(g,g,r,r')\cdot E_r(g,r')\cdot r'dr', \qquad 0<z<g, \tag{1}$$

где $G^{I}(g,g,r,r')$ и $G^{II}(g,g,r,r')$ – функции Грина соответствующих областей резонатора, $E_r(g,r')$ – радиальная составляющая электрического поля, тангенциальная сечению $z = g$, $\tilde{\varepsilon}^{II}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость среды (образца) в области II, ω – круговая частота.

Функция Грина для первой области имеет вид [2, 3]

$$G^{I}(g,g,r,r') = \frac{1}{r\cdot r'\cdot \ln(b/a)}\cdot\frac{\mathrm{cth}(\gamma_0^{I}\cdot(h-g))}{\gamma_0^{I}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n^{I}(r)\cdot\chi_n^{I}(r')}{\Delta_n^{I}}\cdot\frac{\mathrm{cth}(\gamma_n^{I}\cdot(h-g))}{\gamma_n^{I}}, \tag{2}$$

где $\chi_n^{I}(r) = Y_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\cdot J_1(k_{0n}^{I}\cdot r) - Y_1(k_{0n}^{I}\cdot r)\cdot J_0(k_{0n}^{I}\cdot a)$;

$\gamma_0^{I} = \sqrt{-k_0^2}$, $\gamma_n^{I} = \sqrt{(k_{0n}^{I})^2 - k_0^2}$, $n = 1, 2 \ldots$;

$$\Delta_n^{I} = \frac{b^2}{2}\cdot\left[Y_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\cdot J_1(k_{0n}^{I}\cdot b) - Y_1(k_{0n}^{I}\cdot b)\cdot J_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\right]^2 -$$

$$-\frac{a^2}{2}\cdot\left[Y_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\cdot J_1(k_{0n}^{I}\cdot a) - Y_1(k_{0n}^{I}\cdot a)\cdot J_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\right]^2,$$

k_{0n}^{I} – n-й корень уравнения $Y_0(k_{0n}^{I}\cdot b)\cdot J_0(k_{0n}^{I}\cdot a) - Y_0(k_{0n}^{I}\cdot a)\cdot J_0(k_{0n}^{I}\cdot b) = 0$.

Для второй области

$$G^{II}(g,g,r,r') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k_{0n}^{II}\cdot r)\cdot J_1(k_{0n}^{II}\cdot r')}{\Delta_n^{II}}\cdot\frac{\mathrm{cth}(\gamma_n^{II}\cdot g)}{\gamma_n^{II}}, \tag{3}$$

где $\gamma_n^{II} = \sqrt{(k_{0n}^{II})^2 - \tilde{\varepsilon}^{II}\cdot k_0^2}$, $n = 1, 2 \ldots$;

$\Delta_n^{II} = \frac{b^2}{2}\cdot J_1^2(k_{0n}^{II}\cdot b)$;

k_{0n}^{II} – n-й корень уравнения $J_0(k_{0n}^{II}\cdot b) = 0$.

Тангенциальная составляющая электрического поля в сечении раскладывается в полный ортонормированный на интервале (a, b) ряд функций

$$E_r(g,r) = \frac{c_0}{r\cdot\sqrt{\ln(b/a)}} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot\frac{Y_0(k_{0k}^{I}\cdot a)\cdot J_1(k_{0k}^{I}\cdot r) - Y_1(k_{0k}^{I}\cdot r)\cdot J_0(k_{0k}^{I}\cdot a)}{\sqrt{\Delta_k^{I}}}. \tag{4}$$

Используя условие непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля на границе раздела областей

$$H_{\varphi}^{I}(g_{+0},r) - H_{\varphi}^{II}(g_{-0},r) = 0 \tag{5}$$

и осуществляя процедуру по схеме метода Галеркина и последующие преобразования, получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\cdot w_{k,j} = 0, \tag{6}$$

где элементы матрицы $[w]$ имеют следующий вид:

$$w_{0,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(k_{0n}^{II}\cdot a)\cdot \tilde{\varepsilon}^{II}}{\Delta_n^{II}\cdot (k_{0n}^{II})^2\cdot \ln(b/a)}\cdot \frac{\mathrm{cth}(\gamma_n^{II}\cdot g)}{\gamma_n^{II}} + \frac{\mathrm{cth}(\gamma_0^{I}\cdot (h-g))}{\gamma_0^{I}};$$

$$w_{0,j} = w_{j,0} = \frac{X_j^I}{\sqrt{\Delta_j^I}}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cdot J_0^2(k_{0n}^{II}\cdot a)\cdot \tilde{\varepsilon}^{II}}{\Delta_n^{II}\cdot \sqrt{\ln(b/a)}\cdot [(k_{0n}^{II})^2-(k_{0j}^{I})^2]}\cdot \frac{\mathrm{cth}(\gamma_n^{II}\cdot g)}{\gamma_n^{II}};$$

$$w_{k,j} = \frac{X_k^I\cdot X_j^I}{\sqrt{\Delta_k^I}\sqrt{\Delta_j^I}}\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^2\cdot (k_{0n}^{II})^2\cdot J_0^2(k_{0n}^{II}\cdot a)\cdot \tilde{\varepsilon}^{II}}{\Delta_n^{II}\cdot [(k_{0n}^{II})^2-(k_{0k}^{I})^2]\cdot [(k_{0n}^{II})^2-(k_{0j}^{I})^2]}\cdot \frac{\mathrm{cth}(\gamma_n^{II}\cdot g)}{\gamma_n^{II}} +$$

$$+\delta_{k,j}\cdot \frac{\mathrm{cth}(\gamma_j^{I}\cdot (h-g))}{\gamma_j^{I}};$$

$$X_k^I = Y_0(k_{0k}^I\cdot a)\cdot J_1(k_{0k}^I\cdot a) - Y_1(k_{0k}^I\cdot a)\cdot J_0(k_{0k}^I\cdot a).$$

Из равенства нулю определителя этой системы вытекает характеристическое уравнение тороидального резонатора

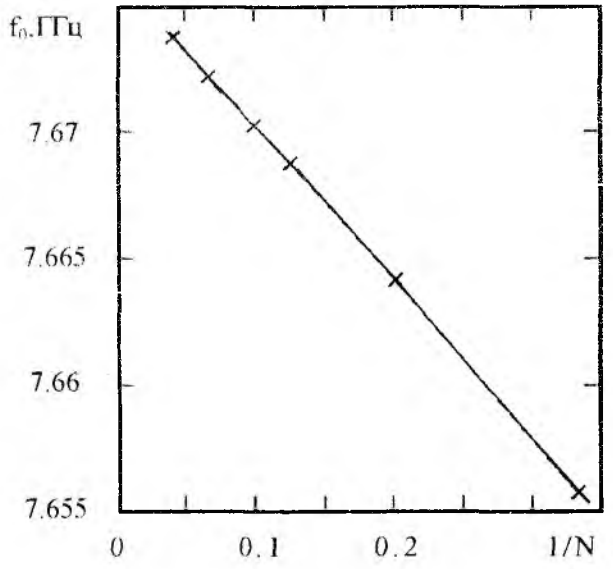

Рис. 2

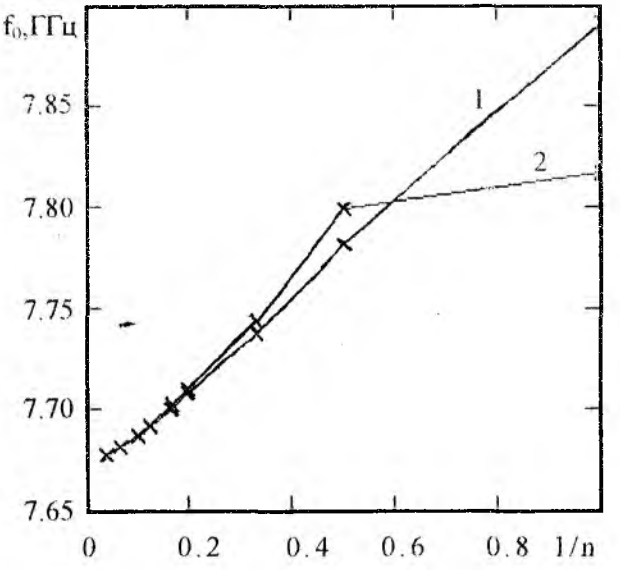

Рис. 3

На рис. 2 приведены графики расчетных значений частот для представленных на рис. 1 обоих разбиений резонатора в зависимости от числа уравнений при постоянном количестве собственных функций $n = 50$. Как и в [1] зависимость $f_0(1/N)$ для поперечного разбиения, согласно вариационному методу Вайнштейна монотонно стремится к конечному пределу. Причем для обоих вариантов разбиения совпадение результатов настолько хорошее, что показать их различие в данном масштабе невозможно. Однако при этом необходимо, чтобы число собственных функций было достаточно большим, что составляет существенные вычислительные трудности. На рис. 3 показаны зависимости расчетного значения резонансной частоты от числа собственных функций n для резонатора с a = 5 мм, b = 10 мм, g = 5 мм, h = 10 мм при условии, что число уравнений N равно числу собственных функций *n*, поскольку в этом случае существенно минимизируется объем вычислений. Серия точек 1 – для продольного разбиения, серия 2 – для поперечного. В отличие от зависимостей, показанных на рис.

2, эти зависимости убывают при увеличении n, так как не учитываются высшие типы волн, которые существуют на границах раздела и запасают часть реактивной энергии. При их исключении эквивалентное значение индуктивности и емкости резонатора будет меньше, что приводит к более высокому значению резонансной частоты. При n =1 расчет для поперечного разбиения дает более точное значение, так как поле в поперечном сечении более точно совпадает с распределением в ТЕМ волне. С ростом n результаты для обоих разбиений так же стремятся к одному значению. Скорость приближения к конечному значению в этом случае выше. Численный метод расчета заслуживает более глубокого анализа, но в первом приближении можно предположить, что его эффективность будет максимальной при N = n.

На рис. 4 представлены графики расчетного значения резонансной частоты пустого резонатора в зависимости от соотношений геометрических размеров.

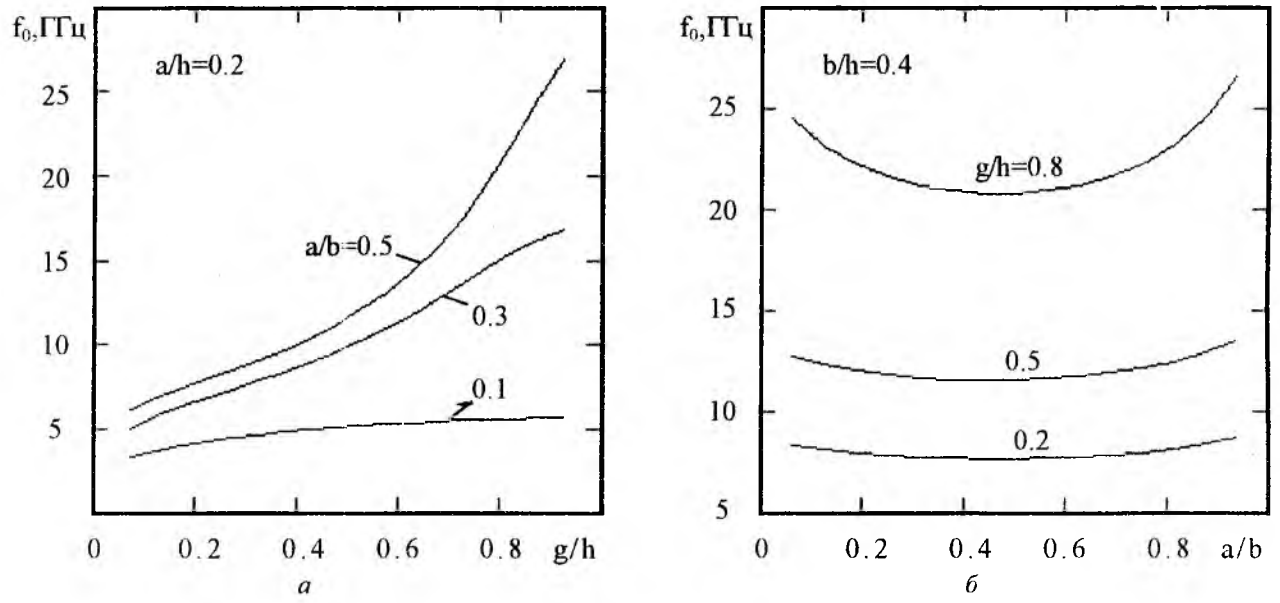

Рис. 4

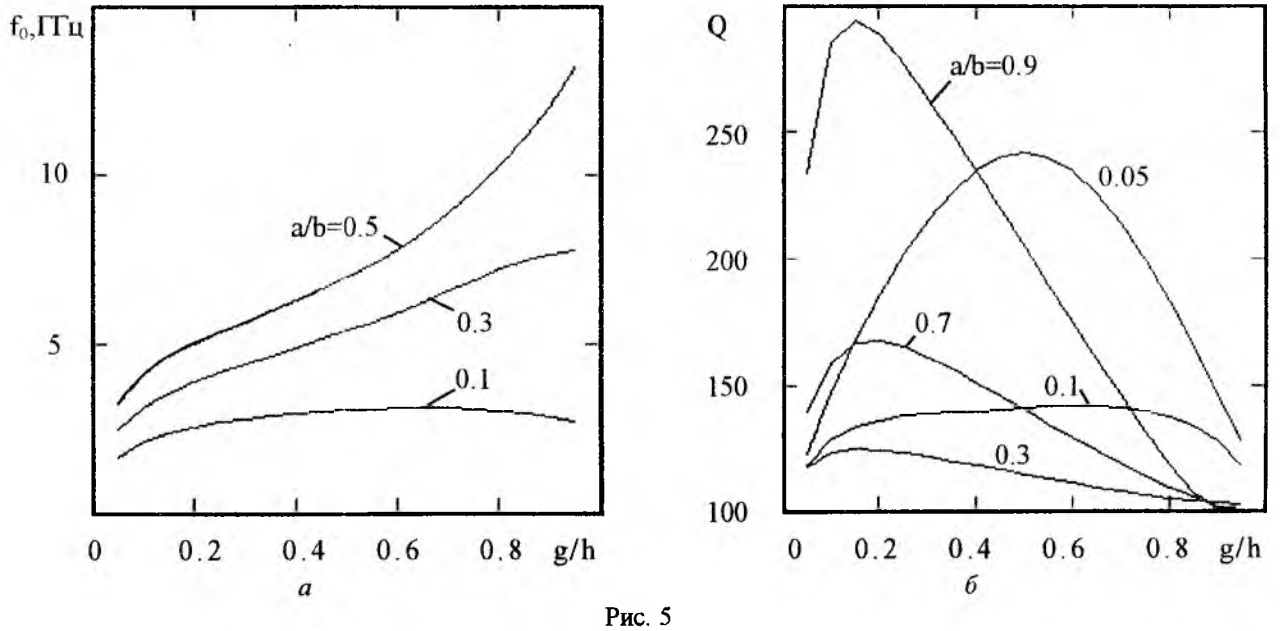

Рис. 5

Зависимости расчетного значения резонансной частоты и добротности резонатора с a = 2мм, h = =10 мм от толщины образца для диэлектрика с $\varepsilon^{II} = 5$, $tg\delta^{II} = 10^{-3}$ показаны на рис. 5. Поведение резонансной частоты, в этом случае, соответствует ее поведению для пустого резонатора (рис. 4, *а*).

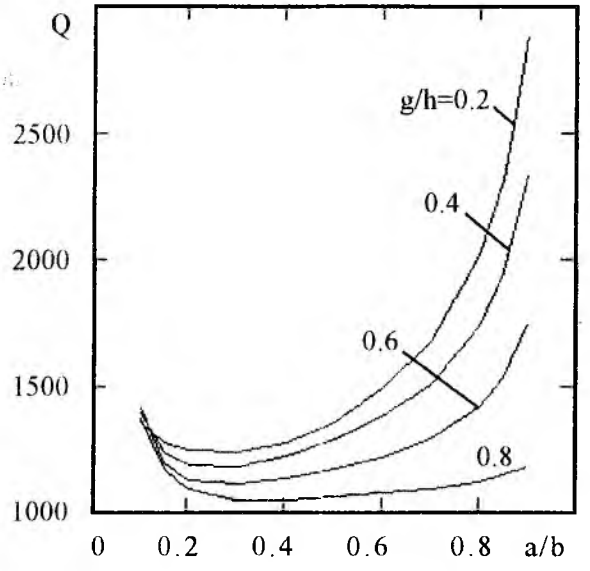

Рис. 6

Добротность резонатора (рис. 5, *б*) при всех отношениях a/b имеет максимум. Уменьшение добротности при малой толщине образца обусловлено тем, что электрическое поле сосредоточивается под центральным стержнем, в объеме, занимаемом образцом с потерями. По мере увеличения толщины большая часть линий электрического поля замыкается на стенках, поэтому добротность максимальна. Дальнейшее увеличение толщины образца приводит к перераспределению поля, при заполнении образцом большей части резонатора электромагнитное поле перемещается в диэлектрик, что снова приводит к уменьшению добротности.

Зависимость добротности от отношения внешнего радиуса резонатора к радиусу центрального стержня представляет практический интерес. На рис.6 показана эта зависимость для $\varepsilon^{II} = 5$, $tg\delta^{II} = 10^{-3}$, h =10 мм. Максимальное влияние образца на поле резонатора достигается при a/b = 0,2– 0,4. В этом случае наибольшая часть линий Е-поля проходит через образец. При a/b ~ 1 поле сосредоточивается в узкой области, непосредственно у края центрального стержня. При уменьшении радиуса стержня электрическое поле смещается в коаксиальную часть, что вновь приводит к росту добротности. Зависимости расстройки резонансной частоты и добротности резонатора с a = 2 мм, h = 10 мм, a/b = 0,5 от тангенса угла диэлектрических потерь образца с $\varepsilon^{II} = 5$ представлены на рис. 7.

Для практической реализации резонансного измерителя диэлектриков с tgδ <1 можно использовать простые асимптотические зависимости. Расчеты в более широком диапазоне tgδ показывают, что при tgδ >1 поведение кривых существенно меняется и устройство теряет резонансные свойства.

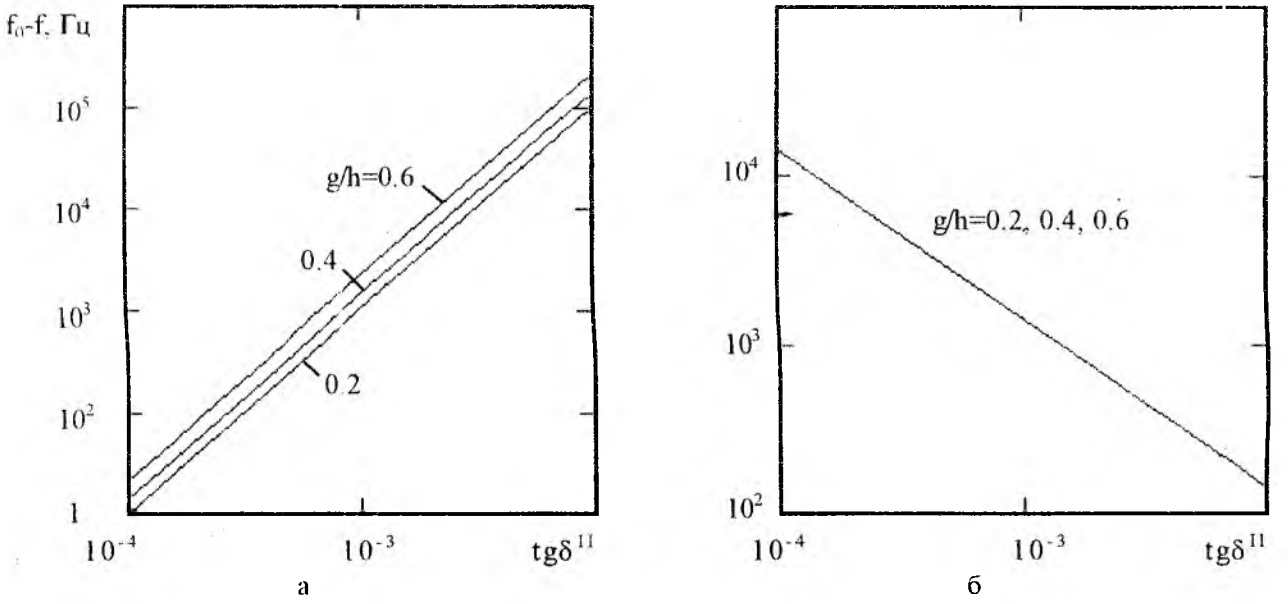

Рис. 7

Графики зависимостей добротности резонатора с a =2 мм, h = 10 мм от диэлектрической проницаемости образца приведены на рис. 8.

Для различных отношений a/b и g/h с увеличением ε^{II} добротность стремится к конечной величине, определяемой tgδ, потому что с увеличением ε^{II} эквивалентная схема резонатора приближается по параметрам к цепи с сосредоточенными элементами, в которой емкость заменяет участок диэлектрика под центральным стержнем. В этом участке сосредоточены все потери системы, которые определяют добротность.

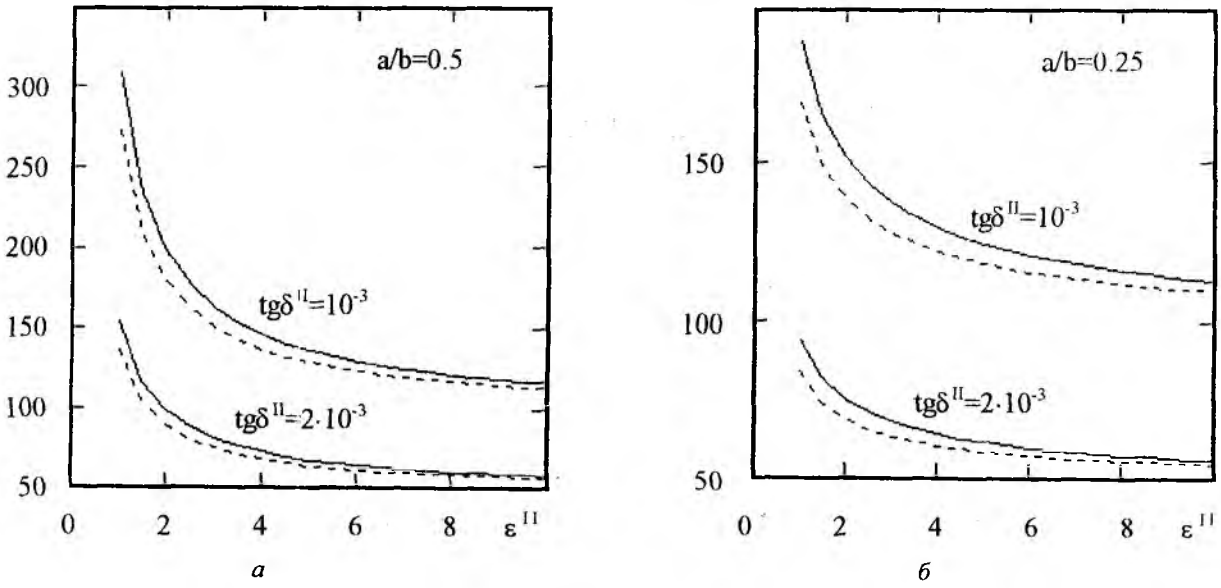

Рис. 8

Дополнительные расчеты для g/h→ 0, a/b→ 1 показали, что метод функций Грина позволяет производить расчеты в области умеренных значений соотношений геометрических размеров. В иных случаях лучшие результаты дают асимптотические формулы.

Список литературы: 1. *Jaworski M.* On the resonant frequency of a reentrant cylindrical cavity // IEEE Transactions on microwave theory and techniques. 1978. Vol. MTT-26, N4. P. 256-260. 2. *Панченко Б.А.* Тензорные функции Грина уравнений Максвелла для цилиндрических областей // Радиотехника. 1970. Вып. 15. С. 82-91. 3. *Chen-To Tai.* Dyadic Green's functions for a coaxial line // IEEE Transactions on antennas and propagation. 1983. Vol. AP-31, N2. P. 355-358.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 12.10.99