

## НЕЙРОМОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

РУТКАС А.А.

Исследуется связь между неявными, в частности вырожденными разностными системами и дескрипторными нейронными сетями, состоящими из динамических и статических нейронов. Характеристический пучок матриц главной линейной части разностной системы преобразуется к нормальной форме и по нормализованной системе конструируется модельная дескрипторная нейронная сеть. Параметры модельной сети позволяют анализировать качественные характеристики исходной разностно-алгебраической системы – разрешимость, устойчивость, существование периодических режимов и др.

### 1. Введение

Классический динамический дискретный нейрон Хопфилда с  $n$  входами  $x_i$  описывается рекуррентным уравнением [1, 2]

$$x_j(k+1) = \psi_D \left( \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + \theta_j(k) \right); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Статический нейрон Маккалоха-Питтса с  $n$  входами  $x_i$  и выходом  $y_j$  отвечает уравнению [3, 4]

$$y_j = \psi_C \left( \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i + \theta_j \right). \quad (2)$$

При функционировании нейронов обоих типов (1), (2) на общем векторе входов  $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))^T$  в момент времени  $k$  следует положить в (2)  $x_i = x_i(k)$ ,

$\theta_j = \theta_j(k)$ ,  $y_j = y_j(k)$ . Аналогом «мгновенной» обратной связи в блоке статических нейронов может служить постулируемое «передаточное» преобразование входов  $x_i^c$  блока статических нейронов в выходы  $y_j^c$  статических нейронов. Например, возможны нелинейные отображения

$$y_j^c(k) = g_j(x_1^c(k), \dots, x_r^c(k)), \quad (3)$$

либо линейные зависимости с заданными коэффициентами

$$y_j^c(k) = \sum_i v_{ji} x_i^c(k) + b_j, \quad (4)$$

либо, наконец, прямолинейные связи с одноименными входами

$$y_j^c(k) = v_j \cdot x_j^c(k) + b_j. \quad (5)$$

Рассмотрим случай линейной передаточной связи (4) на статических нейронах. Если  $n$  входных сигналов  $x_i$  подаются на вход «смешанной» сети с  $m$  динамическими нейронами (1) и  $(n - m)$  статическими нейронами при планируемых «передаточных» связях (4),

то вся нейронная сеть описывается системой  $n$  уравнений

$$x_j(k+1) = \psi_D \left( \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + \theta_j(k) \right), \quad j = 1, \dots, m; \quad (6)$$

$$\sum_{i=m+1}^n v_{ji} x_i(k) = \psi_C \left( \sum_{i=1}^n w_{ji} x_i(k) + \theta_j(k) \right) - b_j; \quad (7)$$

$$j = m+1, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$$

Через  $w_{ji}$  обозначен коэффициент синаптического усиления  $i$ -го входного сигнала в  $j$ -м нейроне,  $v_{ji}$  – необходимый коэффициент влияния входа  $x_i$  блока статических нейронов на выход  $j$ -го статического нейрона,  $\theta_j(k)$  – сигнал внешнего смещения в  $j$ -м нейроне,  $\psi_D$  – активационные функции динамических нейронов,  $\psi_C$  – активационные функции статических нейронов. Соотношения (6) есть разностные уравнения первого порядка относительно входных сигналов  $x_i(k)$ ; соотношения (7) образуют бесконечную систему алгебраических уравнений. Формально бесконечная система (7) распадается на конечные подсистемы уравнений, не связанные друг с другом для различных значений тактового индекса  $k$ , однако фактически связь переменных  $x_i(k)$  и  $x_j(k+1)$  осуществляется через динамические уравнения (6). Введем следующие обозначения для матриц, векторов и вектор-функций:

$$x_D = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, x_C = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_D \\ x_C \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \\ \theta_{m+1} \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_D \\ \theta_C \end{bmatrix}$$

$$W = \{w_{ji}\}_{j,i=1}^n; V = \{v_{ji}\}_{j,i=m+1}^n; b_C = \begin{bmatrix} b_{m+1} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix};$$

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \psi_D(x_1) \\ \vdots \\ \psi_D(x_m) \\ \psi_C(x_{m+1}) \\ \vdots \\ \psi_C(x_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Тогда система уравнений (6), (7) приобретает векторную форму

$$Ax(k+1) + Bx(k) = \psi(Wx(k) + \theta(k)) - b; \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$A_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{(n \times n)} = \begin{bmatrix} O_m & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, b_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} O_D \\ b_C \end{bmatrix}.$$

Система векторных уравнений (9) является рекуррентной системой первого порядка, не разрешенной от-

носителем старшего члена  $x(k+1)$  и, вообще говоря, нелинейной. Матрица  $A$  здесь необратима, и  $\text{rang } A = m (< n)$ . Вообще, разностная система векторных уравнений вида (9) с необратимым оператором  $A$  в конечномерном или бесконечном пространстве называется *вырожденной динамической системой (дискретной)* [5, 6]. Принципиальным свойством такой системы, связанным с ее детерминированностью, т.е. единственностью решения при заданном начальном значении

$$x(0) = a, \quad (10)$$

является регулярность характеристического пучка матриц левой линейной части уравнения (9):  $\det(\lambda A + B) \neq 0$ . В нашем конкретном случае  $\det(\lambda A + B) = \lambda^m \cdot \det V$ , так что характеристический пучок здесь регулярен, если и только если  $\det V \neq 0$ . Это условие означает, что передаточная матрица  $V : x_c \rightarrow y_c$  блока статических нейронов должна быть обратимой квадратной матрицей размерности  $(n - m) \times (n - m)$ . Более того, матрицы  $A, B$  в (9) имеют специальную блочно-диагональную структуру. Однако для произвольной вырожденной динамической системы и в случае неявных разностных схем в конкретных прикладных задачах матрицы  $A, B$  регулярного пучка не имеют указанной блочно-диагональной структуры [7, 8]. Для нейросетевого моделирования таких систем в данной работе предлагается использовать переход к нормальной форме К. Вейерштрасса для регулярного пучка матриц [9, 10].

## 2. Нейро моделирование путем перехода к нормальной форме характеристического пучка матриц

Рассмотрим полулинейную, вообще говоря, вырожденную, дискретную динамическую систему в пространстве  $R^n$ :

$$\hat{A}x(k+1) + \hat{B}x(k) = \hat{\psi}(\hat{W}x(k) + \theta(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$\theta(k)$  – векторы в  $R^n$ ;  $\hat{\psi} : \Omega \rightarrow R^n$  – отображение с областью определения  $\Omega \subset R^n$ . Если не оговорены отдельно локальные ограничения и утверждения, мы будем считать  $\Omega = R^n$ . Вырожденность означает, что  $\det \hat{A} = 0$ . Основное предположение состоит в том, что характеристический пучок матриц линейной части уравнения (11) является *регулярным* и имеет *индекс 1*:

$$\det(\lambda \hat{A} + \hat{B}) \neq 0, \quad \text{ind}(\hat{A}, \hat{B}) = 1. \quad (12)$$

Последнее означает, что  $\det \hat{A} = 0$  и матрица-функция  $(\hat{A} + \mu \hat{B})^{-1}$  комплексного переменного  $\mu$  имеет в точке  $\mu = 0$  полюс первого порядка:

$$\left\| (\hat{A} + \mu \hat{B})^{-1} \right\| \leq \frac{C}{|\mu|}, \quad 0 < |\mu| < \varepsilon. \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует необратимость матрицы  $\hat{A} : \det \hat{A} = 0$ . Заметим, что в уравнении (9), описывающем смешанную сеть с динамическими и статическими

нейронами, матрицы  $A, B$  образуют пучок  $\lambda A + B$  индекса 1.

Методом теории элементарных делителей К. Вейерштрасс показал, что всякий регулярный пучок матриц  $\lambda \hat{A} + \hat{B}$  может быть приведен к *канонической форме*  $\lambda A + B$  путем умножения на две квадратные обратимые матрицы  $P$  и  $Q$  [9, 10 - р. XII, § 2]:

$$\lambda A + B = Q(\lambda \hat{A} + \hat{B})P. \quad (14)$$

С учетом ограничения (13) на индекс пучка матрицы канонической формы имеют блочно-диагональную форму

$$A = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{bmatrix}, \quad m = \text{rang } \hat{A}, \quad (15)$$

где  $E_k$  – единичная  $(k \times k)$ -матрица;  $J$  –  $(m \times m)$ -матрица, имеющая блочно-диагональную нормальную жорданову форму. Весьма трудоемкий алгоритм вычисления приводящих матриц  $P, Q$  можно существенно упростить, если не требовать, чтобы в блочной форме (15) матричный блок  $J$  размерности  $m \times m$  был нормальной жордановой матрицей. Тогда приведение пары матриц  $\hat{A}, \hat{B}$  к виду (15) осуществляется с помощью контурного интегрирования резольвенты  $(\lambda \hat{A} + \hat{B})^{-1} = R(\lambda)$  по окружности  $|\lambda| = r$ , охватывающей конечный спектр пучка; подробное описание имеется, например, в монографии [11, р. 2.3]. В связи с этим мы считаем в дальнейшем, что в (15) блок  $J$  есть произвольная  $(m \times m)$ -матрица, тем более что нейросетевое моделирование окажется возможным при самой общей форме матрицы  $J$ . Введем *нормализованный* вектор сигналов  $x(k)$  и *нормализованную* матрицу весов  $W$ :

$$x(k) = P^{-1} \hat{x}(k), \quad W = \hat{W}P. \quad (16)$$

Тогда векторное уравнение динамической системы (11) преобразуется к виду

$$Ax(k+1) + Bx(k) = Q\hat{\psi}(Wx(k) + \theta(k)) \quad (17)$$

с матричными коэффициентами (15).

Логическая блок-схема нормализации уравнений вырожденной динамической системы (11) изображена на рис. 1.

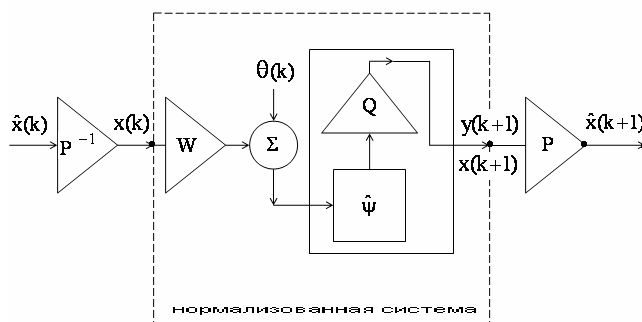


Рис. 1. Принципиальная схема нормализации ДДС (\*);  $W = \hat{W}P$

Дополнительно к (8), (16) примем следующие обозначения для матриц и отображений:

$$D = [E_m; 0] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; C = [0; E_{n-m}] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m};$$

$$\psi_D = DQ\hat{\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m; \psi_C = CQ\hat{\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}. \quad (18)$$

Теперь преобразованное уравнение (17) записывается как пара векторных уравнений

$$x_D(k+1) = \psi_D(W \cdot x(k) + \theta(k)) - J \cdot x_D(k), \quad (19)$$

$$x_C(k) = \psi_C(W \cdot x(k) + \theta(k)); x(k) = x_D(k) \oplus x_C(k). \quad (20)$$

Уравнение (17) и эквивалентную пару (19), (20) будем называть *нормализованными уравнениями* динамической системы (11). Нормализованные уравнения (19), (20) будем трактовать как рекуррентно-статические уравнения некоторой *дескрипторной нейронной* сети с  $m$ -мерным динамическим и  $(n-m)$ -мерным статическим нейронами. Логическая схема искомой нейронной сети изображена на рис.2.

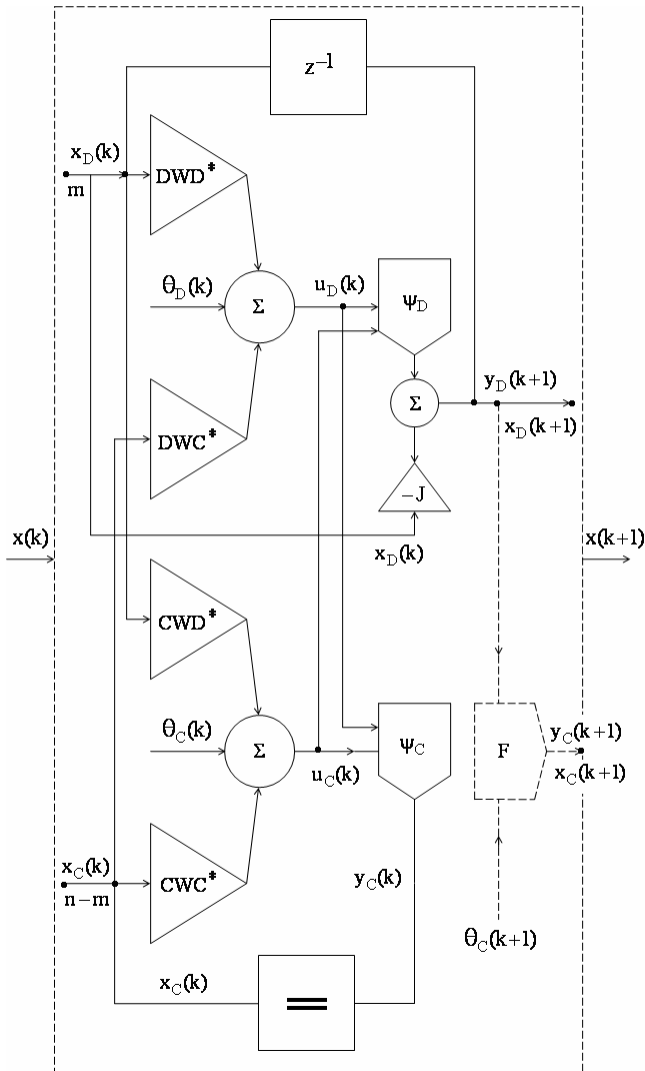


Рис. 2. Блок-схема дескрипторной нейронной модели нормализованной системы

Отличие  $p$ -мерного нейрона от сети из  $p$  обычных нейронов (одномерных) заключается в том, что каждая компонента  $\psi_i$  векторной активационной функции  $\Psi$  зависит не только от одноименной компоненты  $u_i$  внутреннего состояния  $\bar{u}$ , но и от всех остальных компонент  $u_j, j=1, \dots, p$ . В частном случае, когда  $\psi_i = \psi_i(u_i)$ , т.е. активационные компонентные функции не зависят от «чужих» внутренних состояний  $u_j (j \neq i)$ ,  $p$ -мерный нейрон есть стандартная нейронная сеть Хопфилда или Маккалоха-Питтса, состоящая из  $p$  обычных нейронов.

Термин «дескрипторная» заимствован из теории управления, где *дескрипторной* называется система, содержащая разностные уравнения и, возможно, статические уравнения связей, в совокупности не разрешаемые относительно членов старшего порядка [13, 14]. Поясним часть обозначений логических блоков сети рис.2. Согласно (8), (18)  $\theta_D(k) = D\theta(k)$ ,  $\theta_C(k) = C\theta(k)$ . Векторный аргумент  $u = Wx + \theta$  функций  $\psi_D, \psi_C$  в (19), (20) имеет два блока:

$$u = \begin{bmatrix} u_D \\ u_C \end{bmatrix}, u_D = Du = DWD^* x_D + DWC^* x_C + \theta_D, \quad (21)$$

$$u_C = Cu = CWD^* x_D + CWC^* x_C + \theta_C.$$

Следовательно, часть логической схемы рис.2, выполненная сплошными линиями, реализует уравнения (19), (20) для фиксированного такта  $k$ . Обратная

векторная динамическая связь  $z^{-1}$  связывает непосредственно выходы и входы только  $m$ -мерного динамического нейрона для выполнения уравнения (19). В  $(n-m)$ -мерном статическом нейроне блок отождествления  $=$  обеспечивает равенство левой и правой частей в (20).

Пунктирная часть схемы рис.2 позволяет отразить рекуррентное функционирование всей дескрипторной нейронной сети за счет кооперирования  $m$ -мерного динамического нейрона на  $k$ -м такте, описываемого разностным уравнением (19), с  $(n-m)$ -мерным статическим нейроном на  $(k+1)$ -м такте, описываемым алгебраическим уравнением

$$x_C(k+1) = \psi_C[WD^* \cdot x_D(k+1) + WC^* \cdot x_C(k+1) + \theta(k+1)]. \quad (22)$$

Предположим, уравнение (22) можно явно разрешить относительно вектора  $x_C(k+1)$ , и обозначим через  $F$  соответствующую явную «разрешающую» функцию:

$$x_C(k+1) = F[x_D(k+1), \theta(k+1)]. \quad (23)$$

Равенство (23) реализуется пунктирной частью схемы рис.2.

Логическая схема функционирования исходной динамической системы (11) с последовательностью состояний

$$\hat{x}(0), \hat{x}(1), \hat{x}(2), \dots, \hat{x}(n), \dots \quad (24)$$

конструируется путем замены на рис.1 промежуточного нормализованного блока, отмеченного пунктиром, на схему дескрипторной нейронной сети рис.2.

**Замечание.** Уравнения вырожденной динамической системы (9) описывают сеть из  $m$ -мерного динамического и  $(n - m)$ -мерного статического нейронов, логическая схема которой изображена на рис.3. Матрицы  $A, B$  в (9) отличаются от матриц (15) нормализованной системы (17), соответственно нейронная сеть на рис.3 несколько отличается от нейронной сети на рис.2. Согласно принятой выше терминологии обе нейронные сети следует называть *дескрипторными*.

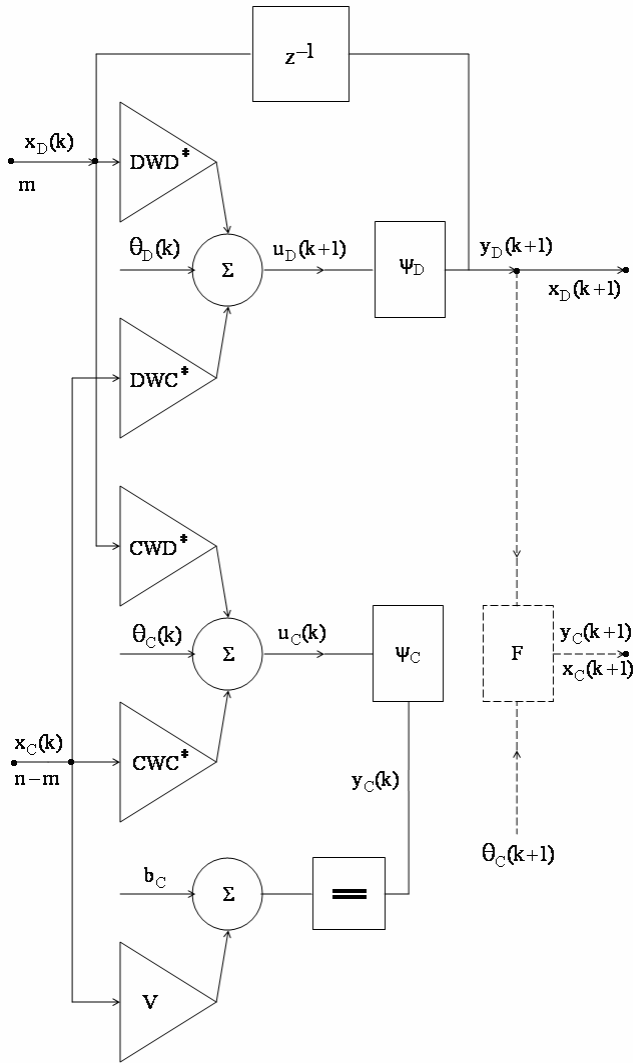


Рис. 3. Блочная схема дескрипторной сети (6), (7), (8) с линейным передаточным преобразованием (4) в статических нейронах

### 3. Рекурсивное отображение и эволюционный оператор

Для исследования качественного поведения динамической системы с последовательностью состояний  $\{\hat{x}(k)\}_0^\infty$  (24) естественно исходить из рекурсивного отображения  $\hat{S}_k$  и эволюционного оператора  $\hat{\Phi}_k$ , действующих по правилу

$$\hat{S}_k(\hat{x}(k-1)) = \hat{x}(k), \hat{\Phi}_k(\hat{x}(0)) = \hat{x}(k). \quad (25)$$

Эволюционный оператор является суперпозицией рекурсивных отображений:

$$\hat{\Phi}_k = \hat{S}_k \circ \hat{S}_{k-1} \circ \dots \circ \hat{S}_1. \quad (26)$$

Если в уравнении (11)  $\det \hat{A} = 0$ , то в пространстве  $R^n$  множество  $\hat{\Lambda}_k$  векторов  $\hat{x}(k)$ , для которых существуют векторы  $\hat{x}(k+1)$ , такие что уравнение (11) удовлетворяется, не совпадает со всем пространством  $R^n$ :  $\hat{\Lambda}_k \subset R^n, \hat{\Lambda}^k \neq R^n$ .

Это верно уже для случая линейной функции  $\hat{\psi}$  в (11) [5, 6, 11]. Таким образом, возникает вопрос об описании многообразий  $\hat{\Lambda}_k = \{\hat{x}(k)\}$  как областей определения рекурсивных отображений  $\hat{S}_{k+1}$ . Заметим, что при надлежащих предположениях относительно правой части равенства (11) единственность решения  $\hat{x}(k+1)$  уравнения (11) имеет место благодаря регулярности пучка матриц  $\lambda \hat{A} + \hat{B}$ . Например, единственность легко устанавливается, если  $\hat{W} = 0$ , или если преобразование  $\hat{\psi}$  линейно и пучок матриц  $\lambda \hat{A} + (\hat{B} - \hat{\psi} \hat{W})$  регулярен.

Важным свойством является вложенность областей определения рекурсий:

$$\hat{S}_k(\hat{\Lambda}_{k-1}) \subset \hat{\Lambda}_k, k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Из (27) вытекает, что при любом  $k$  эволюционный оператор  $\hat{\Phi}_k$  определен на множестве векторов  $\hat{\Lambda}_0$ , которое в этом случае называется *начальным многообразием динамической системы* (11).

Практически для анализа отображений  $\hat{S}_k, \hat{\Phi}_k$  и многообразий  $\hat{\Lambda}_k$  удобно перейти к нормализованной динамической системе (17) ~ (19), (20) и модельной дескрипторной нейронной сети рис.2. На последовательности состояний  $\{x_k\}_0^\infty$  дескрипторной нейронной сети определяются нормализованные операторы рекурсии  $S_k$  и эволюции  $\Phi_k$ :

$$S_k(x(k-1)) = x(k), \Phi_k(x(0)) = x(k). \quad (28)$$

С помощью нормализующей замены состояний (16)  $\hat{x}(k) = Px(k)$  операторы (25) легко восстанавливаются по соответствующим операторам (28) нейронной сети:

$$\hat{S}_k = PS_kP^{-1}; \Phi_k = P\Phi_kP^{-1}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

Здесь  $P, P^{-1}$  – линейные операции умножения векторов на постоянную матрицу и обратную к ней.

Приведем явные формулы для операторов  $S_k, \Phi_k$  в случае *линейных активационных функций нейронной сети*, когда операции  $\psi_D, \psi_C$  в (19), (20) есть умножения на матрицы и, следовательно, исходная динамическая система линейна с операцией умножения на матрицу  $\hat{\psi}$  в правой части (11). Если бы модельная нейронная сеть не содержала статических нейронов, то в (18) было бы  $m = n, \psi_C = 0$ . Уравнение (20) превратилось бы в тривиальное тождество  $x_C(k) = 0$ , а уравнение (19) – в явное разностное уравнение

$$x(k+1) = Tx(k) + f(k), T = \psi_D W = Q \hat{\psi} W, \quad (30)$$

$$f(k) = \psi_D \theta(k)$$

Оператор рекурсии  $S_k$  здесь явно задан в правой части:

$$S_{k+1}(x(k)) = Tx(k) + f(k), k \geq 0. \quad (31)$$

Эволюционный оператор  $\Phi_k$  (28) также легко находится [12]:

$$\Phi_k(x(0)) = x(k) = T^k \cdot x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} T^{k-i-1} \cdot f(i), k \geq 1. \quad (32)$$

Однако в дескрипторной сети ( $1 < m < n$ ) мы не можем использовать выражение (31) для рекурсии и выражение (32) для эволюционного оператора. Исходя из линейного варианта уравнений (19), (22), трудно получить рекурсию  $S_{k+1}(x(k)) = x(k+1) =$

$\begin{bmatrix} x_D(k+1) \\ x_C(k+1) \end{bmatrix}$ . Обозначая матрицу  $G_C = E_{n-m} - \psi_C W C^*$  и предполагая ее обратимость, находим искомые формулы рекурсии:

$$x_D(k+1) = (\psi_D W - JD)x(k) + \psi_D \theta(k), \quad (33)$$

$$x_C(k+1) = G_C^{-1} \psi_C \left\{ W D^* [(\psi_D W - JD)x(k) + \psi_D \theta(k)] + \theta(k+1) \right\}. \quad (34)$$

Количество строк и столбцов квадратной матрицы  $G_C$  равно  $(n-m)$  – числу статических нейронов дескрипторной нейронной сети.

Для чисто динамической нейронной сети формула (30) дает реальные входные состояния  $x(k+1)$  на  $(k+1)$ -м такте для любых векторов  $x(k), f(k) \in \mathbb{R}^n$ . Однако в дескрипторной нейронной сети вектор

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_D(k+1) \\ x_C(k+1) \end{bmatrix}, \text{ вычисленный по формулам (33),}$$

(34), будет реальным входным состоянием на  $(k+1)$ -м такте тогда и только тогда, когда предыдущее состояние  $x(k)$  удовлетворяет статическому уравнению

$$Cx(k) = \psi_C W x(k) + \psi_C \theta(k). \quad (35)$$

Отсюда следует формула рекурсивного отображения допустимых многообразий  $\Lambda_k$ :

$$S_{k+1}(\Lambda_k) = \Lambda_{k+1}, \Lambda_k = \{x(k)\}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (36)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Пусть матрица  $G_C = E_{n-m} - \psi_C W C^*$  обратима. Рекурсивное отображение  $S_{k+1}: \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k+1}$  линейной дескрипторной нейронной сети определяется формулами (33), (34). Эволюционное отображение  $\Phi_k$  (28) может быть вычислено по формуле (32), где матрица  $T$  и векторы  $f(k)$  строятся по правилу

$$T = \begin{bmatrix} \psi_D W - JD \\ G_C^{-1} \psi_C W D^* (\psi_D W - JD) \end{bmatrix},$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} \psi_D \theta(k) \\ G_C^{-1} \psi_C (W D^* \psi_D \theta(k) + \theta(k+1)) \end{bmatrix},$$

а начальный вектор  $x(0)$  принадлежит начальному многообразию  $\Lambda_0$ :

$$\Lambda_0 = \{x(0) \in \mathbb{R}^n : Cx(0) = \psi_C W x(0) + \psi_C \theta(0)\}. \quad (37)$$

Размерность начального многообразия  $\Lambda_0$  и многообразий состояний  $\Lambda_k$  на всех тактах  $k = 1, 2, \dots$  совпадает с числом динамических компонент вектора внутренних состояний сети:

$$\dim \Lambda_0 = \dim \Lambda_k = m.$$

В доказательстве нуждается последнее утверждение о размерностях. Достаточно установить, что в отсутствие смещений (однородный случай  $\theta(0) = 0$ )  $\dim \Lambda_0 = m$ . Из (37) следует, что  $\Lambda_0$  есть линейное подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , состоящее из векторов  $x(0)$  таких, что  $(C - \psi_C W)x(0) = 0$ . С учетом (18) последнее равенство равносильно следующему:  $C(E_n - Q\hat{\psi}W)x(0) = 0$ . Оно переписывается в виде

$$C(E_n - Q\hat{\psi}W)(P_D x(0) + P_C x(0)) = 0$$

с помощью взаимно дополнительных проекционных матриц в  $\mathbb{R}^n$ :

$$P_D = D^* D, P_C = C^* C, P_D + P_C = E_n.$$

После подстановки значений  $P_D, P_C$  получаем

$$C(E_n - Q\hat{\psi}W)D^* D x(0) = -C(E_n - Q\hat{\psi}W)C^* C x(0).$$

Поскольку  $CE_n C^* = E_{n-m}$  (см. (18)), то  $G_C = C(E_n - Q\hat{\psi}W)C^*$ , и путем обращения матрицы  $G_C$  можно выразить  $Cx(0)$  через  $Dx_0$ . Окончательно для любого начального вектора  $x(0)$  при  $\theta(0) = 0$  находим представление

$$x(0) = \begin{bmatrix} Dx(0) \\ Cx(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dx_0 \\ -G_C^{-1} C(E_n - Q\hat{\psi}W)D^* \cdot Dx_0 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

в котором блочная компонента  $Dx_0$  может выбирать произвольно. Следовательно,

$$\dim \{x(0)\} = \dim \Lambda_0 = \text{rang} D = m.$$

#### 4. Выводы

Исследована связь между неявными разностными системами (по другой терминологии – неявными и вырожденными динамическими дискретными системами) и дескрипторными нейронными сетями, сконструированными из динамических и статических нейронов. Во введении описано, как уравнения состояний дескрипторной нейронной сети допускают представление в виде вырожденной полулинейной дискретной динамической системы, неразрешенной относительно старших разностей. В разделе 2 показано

обратное: всякая полулинейная вырожденная динамическая система, для которой характеристический пучок матриц имеет индекс 1, преобразованием нормализации приводится к системе уравнений дескрипторной нейронной сети. Дается точное описание конструкции (логической схемы) сети. В разделе 3 продемонстрировано применение «нормализованной» дескрипторной нейронной сети к анализу исходной динамической (разностной) системы. В частности, исследуются допустимые многообразия состояний, которые имеют размерность, равную числу динамических компонент вектора внутренних состояний сети. Анализируются рекурсивное и эволюционное отображения дескрипторной динамической системы с помощью аналогичных отображений модельной нейронной сети. Эти результаты создают предпосылки для эффективного анализа кардинальных качественных свойств дескрипторных динамических систем – устойчивости, выявления периодических режимов, аттракторов и т.п.

**Литература:** 1. *Hopfield J.J.* Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities, Proc. of the National Academy of Science. 1982. 79. P.2554-2558. 2. *Бодянский Е.В., Руденко О.Г.* Искусственные нейронные сети: архитектуры, обучение, применения. Харьков, ТЕЛЕТЕХ, 2004. 372 с. 3. *McCulloch W.S., Pitts W.* A Logical Calculus of the Ideals Immanent in Nervous Activity, Bulletin of Mathematical Biophysics. 1943. № 5. P.115-133. 4. *Руденко О.Г., Бодянский Е.В.* Искусственные нейронные сети, Харьков, «СМИТ», 2005. 408 с. 5. *Бенабдаллах М., Руткас А.Г., Соловьев А.А.* Об устойчи-

вости вырожденных разностных систем в банаховых пространствах // Динамические системы. Киев-Симферополь, 1987. Вып.6. С.103-109. 6. *Bondarenko M.F., Rutkas A.G.* On a class of implicit difference equations // Доповіди НАН України. 1998. №7. С.11-15. 7. *Campbell S.L.* Singular Systems of Differential Equations – San Francisco, London, Melbourne: Pitman Publishing, Research Notes in Mathematics; I. 1980. Vol.40176 p.; II. 1982. Vol.61. 234 p. 8. *Власенко Л.А.* Импульсные дифференциально-алгебраические уравнения в математических моделях электрических цепей // Радиоэлектроника и информатика. 2004. №3(28). С.27-31. 9. *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsh. Akad. Wissenschaft, Berlin (1867). P. 310-338. 10. *Гантмахер Ф.П.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с. 11. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии. 2006. 273 с. 12. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 312 с. 13. *Bender D.I., Laub A.* The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems, IEE Transactions on Automatic Control. 1987. Vol.AC-32, № 6. P.2062-2077. 14. *Campbell S.L.* Nonregular descriptor systems with delays, IMA J.Math.Control and Information. 1995. V.12. P.57-67.

Поступила в редколлегию 11.06.2008

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф.Кривуля Г.Ф.

**Руткас Андрей Анатольевич**, аспирант ХНУРЭ. Научные интересы: машинный перевод, искусственные нейронные сети, динамические системы. Увлечение и хобби: электронное и математическое обеспечение систем GPS, системы безопасности и слежения. Адрес: Украина, 61001, Харьков, ул. Плехановская, 2/5, кв. 29, тел.: (057) 732-28-35.

УДК519.23

## РЕДУКЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЧЕТНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

*ГЕРАСИН С.Н., МИХАЙЛОВ Е.А.*

Предлагается редукционный метод анализа счетных марковских цепей с непрерывным временем. Описываются оценки скорости сходимости редуцированных предельных распределений к исходным вероятностям.

### 1. Введение

Изучение марковских процессов со счетным числом состояний зачастую приводит к ситуациям более сложным, чем в случае процессов с конечным числом состояний. Особенно заметно это становится при использовании численных методов. Одной из причин является та, что бесконечные системы уравнений разрешимы в некоторых случаях – общая теория пока отсутствует. В то же время вопрос о существовании стационарного решения разрешим в рамках общей эргодической теоремы для процессов Маркова. Но, как обычно, теорема существования не дает конкретных способов нахождения решения, поэтому задача их вычисления решается в конкретных случаях по-

разному [1]. В данной работе предлагаются некоторые способы нахождения решений, базирующиеся на редукции бесконечных систем, т.е. пути сведения к конечным системам. С методической точки зрения этот подход применим и к системам с большим числом состояний. Например, при исследовании нейронных сетей их модель в виде марковской цепи может иметь  $10^6-10^8$  состояний, что делает ее потенциально бесконечной с точки зрения машинных вычислений.

*Целью* данной работы является применения редукционных методов к анализу марковских цепей со счетным множеством состояний и аппроксимация их близкими, в смысле предельных свойств, конечными цепями.

### 2. Однородный процесс со счетным числом состояний

Будем рассматривать марковский процесс с непрерывным временем и счетным множеством состояний. Пусть его поведение описывается матрицей интенсивностей (инфинитезимальной матрицей)  $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ ; по определению данная матрица вырождена. Покажем, что применение метода редукции к матрице  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  возможно и что в этом случае поэлементной сходимости, вообще говоря, недостаточно. Известен тот факт, что если  $\sup \lambda_{ij} < \infty$ , то соответствующая система уравнений Колмогорова