

ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТКАХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках малых однородных резонансных магнитоэлектрических сфер, пространственное распределение которых подчинено полигональным числам – фигурным числам [1]. Длина рассеиваемой волны может быть соизмерима с постоянными решетки.

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток ($c \in C$), эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} & (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} & (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\}), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла подрешетки c , находящегося внутри области (рис.1):

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу пространственной подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u = c(p, s, t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $u' = c'(p', s', t')$, а узел внутри области (2) – $c(p = 0, s = 0, t = 0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из C узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

На рис. 1 представлено пространственное распределение узлов решетки, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случая: $p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3; s, t = 0, \pm 1$.

Распределение сфер вдоль оси z подчинено таблице полигональных чисел (рис.2). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ ставится в соответствие определенное число таблицы (рис. 2): например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 28, точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 65, а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 34.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (1) для заданной точки $(p=0, s, t)$ (рис.2). Между тройкой чисел $(p=0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (1) и числом таблицы полигональных чисел существует связь, определяемая функцией

$$\frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|].$$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (1), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left\{ \frac{(|t|+1)}{2!} [2 + (|s|+1)|t|] - 1 \right\},$$

где $|s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне области (2) будут также соответствующим образом смещаться и будет происходить перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)} = \sqrt{(x_{c',s'} - x_{c,s})^2 + (y_{c',t'} - y_{c,t})^2 + (z_{c',p'} - z_{c,p})^2}. \quad (3)$$

Если в центре области (2) находится один порождающий узел решетки, то для случая, когда $(p, s = 0, t)$, из (1) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным треугольным числам (1,3,6,10,15,21,28,36,...) (рис.3).

Если $(p, s = 1, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным четырехугольным числам (1,4,9,16,25,36,...) (рис.4).

Когда $(p, s = 2, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным пятиугольным числам (1,5,12,22,35,51,...) (рис.5).

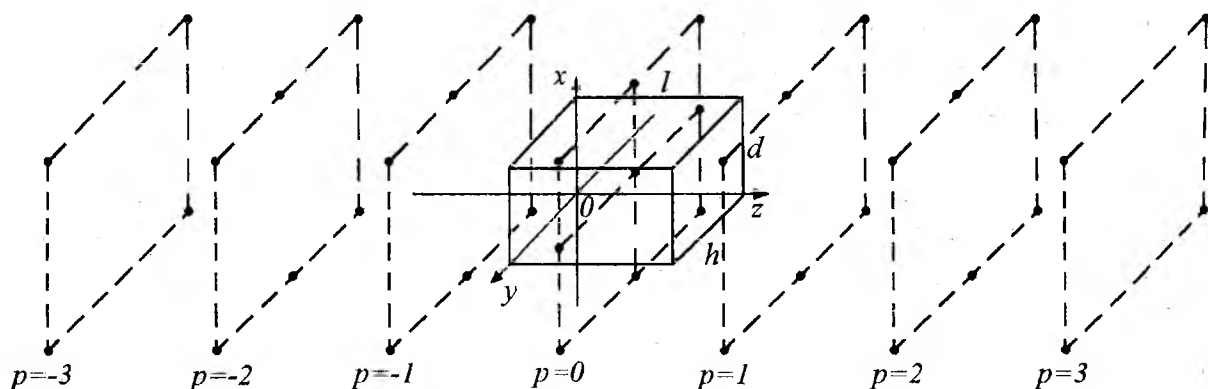


Рис. 1

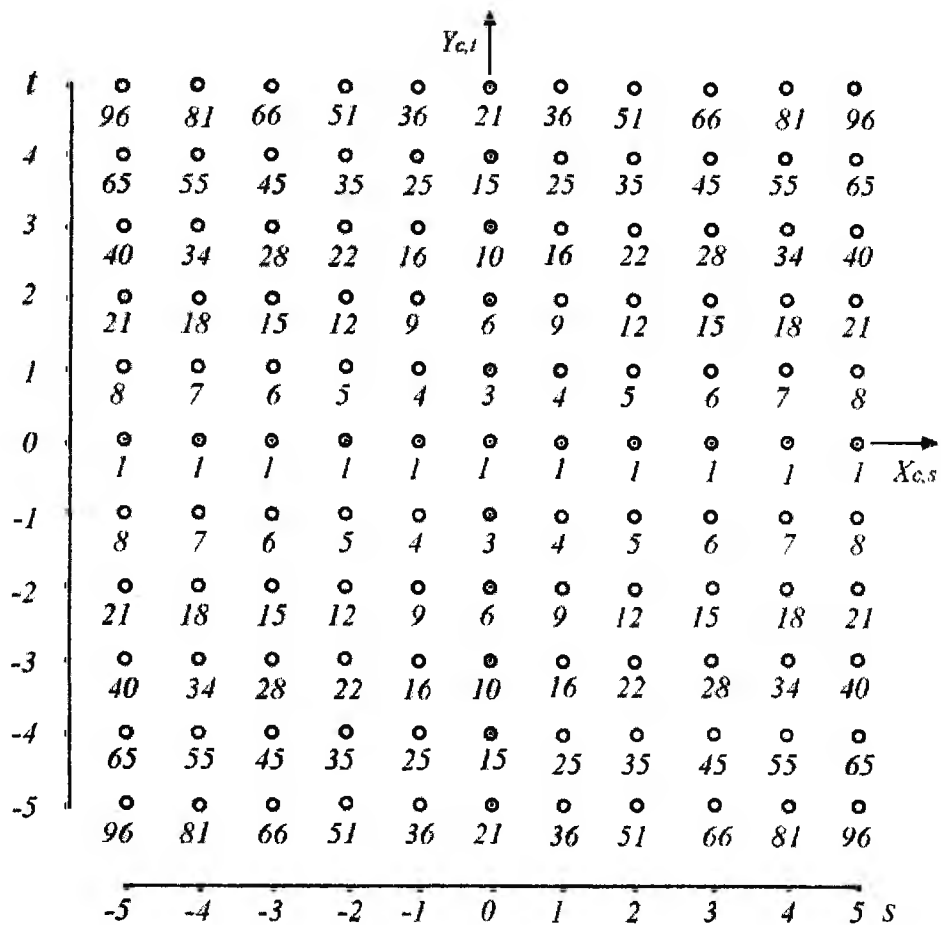


Рис. 2

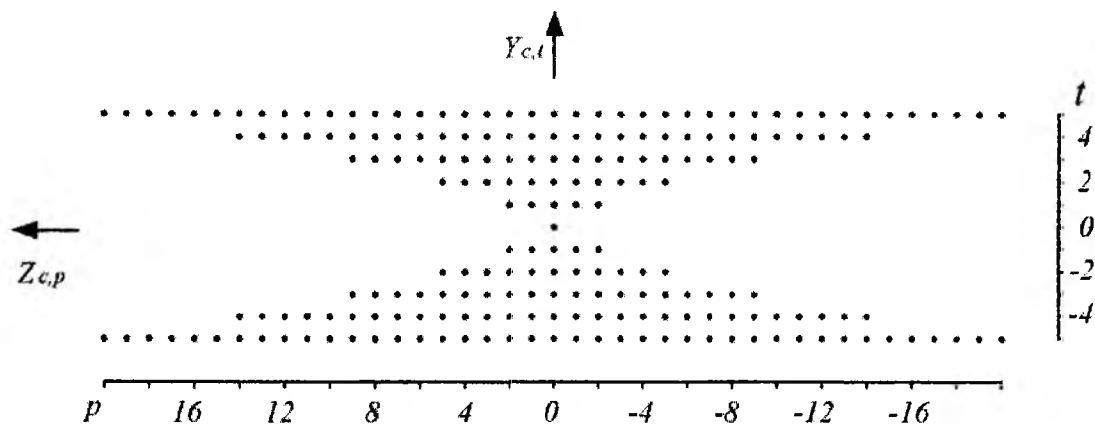


Рис. 3

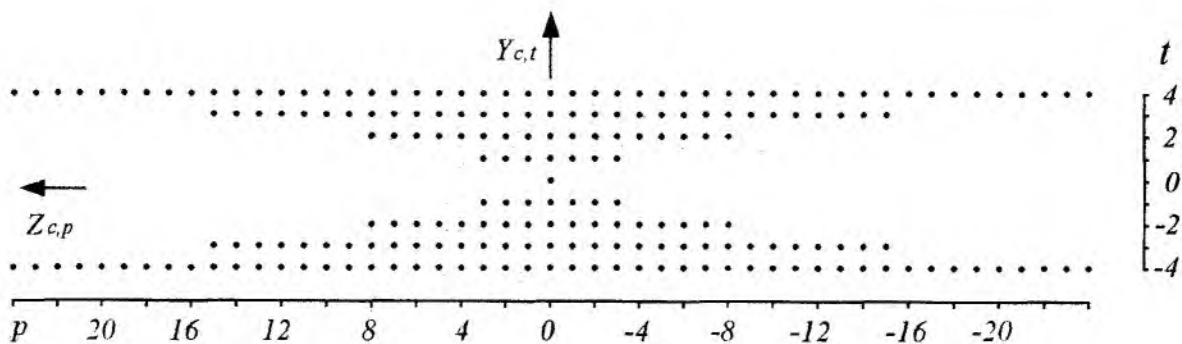


Рис. 4

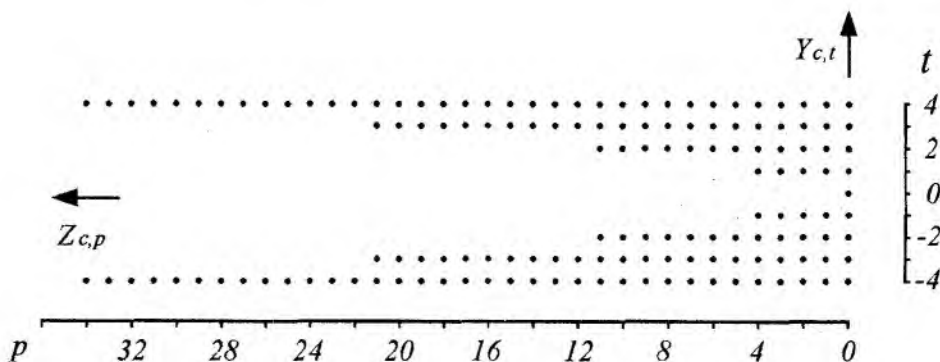


Рис. 5

Производя соответствующие сечения этого распределения узлов (1), можно получить различного вида плоские перестраиваемые решетки. Если в области (2) сформирована элементарная ячейка, то вместо одиночных узлов в решетках (рис.3,4,5) будут находиться уже ячейки из области (2).

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с проницаемостями $\epsilon_{c(p,s,t)}$, $\mu_{c(p,s,t)}$ и радиусами $a_{c(p,s,t)}$; дальше обозначим ϵ_c , μ_c , a_c . Сферы решетки находятся в свободном пространстве.

Будем считать, что вне сфер $a/\lambda \ll 1$, но внутри сферы возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны в свободном пространстве, а λ_g – длина волны в сфере[2].

Для решения задачи используем интегральные уравнения [3] и решаем её в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором этапе находим поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\text{э}}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\text{м}}$ потенциалы Герца

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\text{э}} - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\text{м}}], \\ \vec{H}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\epsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\text{м}} + ik\epsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\text{э}}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\varepsilon} &= \frac{1}{4\pi V} \int \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \bar{E}^0(\bar{r}') f(|\bar{r} - \bar{r}'|) dV, \\ \bar{\Pi}^{\mu} &= \frac{1}{4\pi V} \int \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}^0(\bar{r}') f(|\bar{r} - \bar{r}'|) dV,\end{aligned}\quad (5)$$

где $\bar{E}^0(\bar{r}')$, $\bar{H}^0(\bar{r}')$ – внутренние поля рассеивателя, V – объем рассеивателя, ε_0, μ_0 – проницаемости заполнения свободного пространства, функция $f(|\bar{r} - \bar{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\bar{r} - \bar{r}'|) + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 f(|\bar{r} - \bar{r}'|) = -4\pi \delta(|\bar{r} - \bar{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности, и имеет вид

$$f(|\bar{r} - \bar{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|}.\quad (6)$$

Вычислим вначале внутреннее поле рассеивателей для случая, когда отношение $a/\lambda_g \ll 1$ внутри и $a/\lambda \ll 1$ – вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы. Можно показать, что для внешних точек сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\bar{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\bar{r} - \bar{r}'|}}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{e^{-ik_1 r}}{r},\quad (7)$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $k = 2\pi/\lambda$, а r – определяет расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле $c'(p', s', t')$ сферы найдем из системы неоднородных квазистационарных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [3]. Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{E}_{0c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) &= \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right] \bar{E}^0_{c'}(p', s', t')(\bar{r}', t) - \right. \\ &- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'}^{\varepsilon}(p, s, t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p, s, t)(\bar{r}', t) - \right. \\ &c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t') \\ &- ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'}^{\mu}(p, s, t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p, s, t)(\bar{r}', t) \right] \left. \right\} - \\ &- \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'}^{\varepsilon}(p, s, t) \bar{E}^0_{c'}(p, s, t)(\bar{r}', t) - \right. \right. \\ &(c \neq c')\end{aligned}$$

$$-ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}') \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \Bigg\} \Bigg], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{0c'}(p', s', t')(\vec{r}', t) = & \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) \right] \bar{H}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t) - \right. \\ & - \sum_{p \ s \ t} \sum \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \\ & c'(p, s, t) \neq c'(p', s', t') \\ & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c'(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c'(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right\} - \\ & - \sum_{c=1}^C \left(\sum_{p \ s \ t} \sum \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) + \right. \right. \\ & \left. \left. (c \neq c') \right. \right. \\ & \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t) \right] \right\} \right), \end{aligned}$$

где $\bar{E}_{0c'}(p', s', t')(\vec{r}', t)$; $\bar{H}_{0c'}(p', s', t')(\vec{r}', t)$ и $\bar{E}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t)$; $\bar{H}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t)$ – поле падающей волны и внутреннее поле $c'(p', s', t')$ -сферы, а $\bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$; $\bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}', t)$ – внутренние поля остальных сфер.

Величины $W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}')$, $W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}')$ имеют вид (3,7,8)

$$\begin{aligned} W_{c(p,s,t)}^\vartheta(\vec{r}') &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}, \\ W_{c(p,s,t)}^M(\vec{r}') &= -\frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}}{r_{c'(p',s',t'),c(p,s,t)}}. \end{aligned}$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем $c'(p', s', t')$ – сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на $c'(p', s', t')$ – рассеиватель всех остальных сфер.

Уравнения (8) представляют систему $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$ векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки c . Решение этой системы уравнений для выделенной сферы имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{g}_u^{\varepsilon u'} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) + \hat{\beta}_u^{\varepsilon u'} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \right] \right), \\ \bar{H}_{c'}^0(p', s', t')(\vec{r}', t) &= \frac{1}{\Delta_{\varepsilon M}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{\beta}_u^{\mu u'} \bar{H}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) + \hat{g}_u^{\mu u'} \bar{E}_{0c(p,s,t)}(\vec{r}', t) \right] \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\hat{g}_u^{\text{э}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{э}u'} & g_{xyu}^{\text{э}u'} & g_{xzu}^{\text{э}u'} \\ g_{yxu}^{\text{э}u'} & g_{yuu}^{\text{э}u'} & g_{yzu}^{\text{э}u'} \\ g_{zxu}^{\text{э}u'} & g_{zyu}^{\text{э}u'} & g_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_u^{\text{э}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{э}u'} & \beta_{xyu}^{\text{э}u'} & \beta_{xzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{э}u'} & \beta_{yuu}^{\text{э}u'} & \beta_{yzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{zxu}^{\text{э}u'} & \beta_{zyu}^{\text{э}u'} & \beta_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}_u^{\text{м}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{м}u'} & \beta_{xyu}^{\text{м}u'} & \beta_{xzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{м}u'} & \beta_{yuu}^{\text{м}u'} & \beta_{yzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{zxu}^{\text{м}u'} & \beta_{zyu}^{\text{м}u'} & \beta_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_u^{\text{м}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{м}u'} & g_{xyu}^{\text{м}u'} & g_{xzu}^{\text{м}u'} \\ g_{yxu}^{\text{м}u'} & g_{yuu}^{\text{м}u'} & g_{yzu}^{\text{м}u'} \\ g_{zxu}^{\text{м}u'} & g_{zyu}^{\text{м}u'} & g_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix},$$

а $\Delta^{\text{эм}}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).

Компоненты внутреннего поля сферы (9) представим в виде:

$$E_{xu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{xxu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{xyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{xzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{xxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{xyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{xzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$E_{yu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{yxu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yuu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{yxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yuu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$E_{zu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{zxu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) + \beta_{zxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{xu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{xxu}^{\text{м}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{xyu}^{\text{м}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{xzu}^{\text{м}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{xxu}^{\text{м}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{xyu}^{\text{м}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{xzu}^{\text{м}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{yu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{yxu}^{\text{м}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yuu}^{\text{м}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\text{м}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{yxu}^{\text{м}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yuu}^{\text{м}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\text{м}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right),$$

$$H_{zu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{zxu}^{\text{м}u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\text{м}u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\text{м}u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + g_{zxu}^{\text{м}u'} \bar{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\text{м}u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\text{м}u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right).$$

Полученные решения (9) справедливы, когда $a/\lambda \ll 1$ снаружи и $a/\lambda_g \ll 1$ – внутри сферы. Но их можно обобщить на резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, если вместо проницаемостей ϵ_c и μ_c сферы ввести эффективные проницаемости [4, 2, 5]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c\varepsilon\phi} &= \varepsilon_c F(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}), \\ \mu_{c\varepsilon\phi} &= \mu_c F(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}),\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$F(ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}) = \frac{2(\sin ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} - ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c})}{(k^2 a_c^2 \varepsilon_c \mu_c - 1) \sin ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} + ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\varepsilon_c \mu_c}}.$$

Потенциалы Герца (5) рассеянного сферами решетки поля, можно представить, учитывая (9) и (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}^{\varepsilon}(\bar{r}, t) &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right], \\ \bar{\Pi}^{\mu}(\bar{r}, t) &= - \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}', t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right],\end{aligned}\quad (11)$$

$$\text{Здесь } r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2},$$

где (x, y, z) – координаты точки наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки; $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$ – координаты точки нахождения центра рассеивающей сферы решетки (1).

Тогда, учитывая (10), (11), из (4) найдем искомое рассеянное сферами решетки поле

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{расс}} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}') - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_c \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right], \\ \bar{H}_{\text{расс}} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_c \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\varepsilon\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right],\end{aligned}\quad (12)$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c – функциональные матрицы вида:

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{zxc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{zyc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zzc} \end{bmatrix}; \quad \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (12), имеют вид (1):

$$\Psi_{xxc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{\left| 3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (x - x_{c,s})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{\left| 3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yyc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{\left| 3(y-y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (y-y_{c,t})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{\left| 3(y-y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{zzc} = \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{\left| 3(z-z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (z-z_{c,p})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{\left| 3(z-z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2 \right|}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{yxc} = \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xzc} = \Psi_{zxc} = \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x-x_{c,s})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xyc} = \Psi_{zyc} = \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y-y_{c,t})(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xc} = \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{xc}^0 = -\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc} = \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{yc}^0 = -\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc} = \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^2}, \quad \Psi_{zc}^0 = -\Psi_{zc}.$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (12)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{расc}(\vec{r}, t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (8) определяются резонансные условия. Для случая, когда проницаемости ε_c , μ_c сфер решетки действительны и $a/\lambda_g \sim 1$, эти условия находятся из соотношения

$$\det \operatorname{Re} \|\alpha_{sj}\| = 0,$$

где $\|\alpha_{sj}\|$ – основная матрица системы уравнений (8).

Список литературы: 1. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.Л.: ОГИЗ. 1948. С. 248 – 251. 2. Козарь А.И., Хижняк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т.15.С. 847 – 849. 3. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев.: Наукова думка. 1986. С. 279. 4. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. С.216. 5. Козарь А.И., Хижняк Н.А. К вопросу о точном измерении больших значений диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 1970. Вып.14. С. 118 – 128.