

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ РЕШЕТКЕ

*Л. Н. Литвиненко*

Большое внимание, уделяемое в настоящее время теории дифракции электромагнитных волн на плоских ленточных решетках, обусловлено рядом причин. Во-первых, дифракционные решетки находят широкое применение в различных устройствах, особенно работающих в диапазоне весьма коротких волн. Во-вторых, разработка точной теории дифракции на решетках-объектах, относительно которых задачи дифракции и рассеяния могут быть решены весьма строго более или менее доступными средствами, позволяет глубже понять сущность процессов, происходящих при взаимодействии электромагнитных волн с более сложными периодическими структурами (например, кольцевые, спиральные волноводы и т. д.).

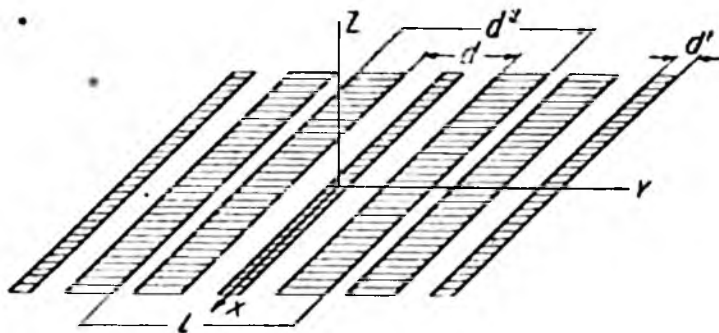


Рис. 1.

В силу этих же причин представляет интерес теория дифракции на периодических металлических решетках, у которых на период приходится по несколько металлических полос различной, вообще говоря, ширины (в дальнейшем такие решетки мы будем называть многоэлементными). Решетки с двумя лентами на период (двухэлементные) исследованы достаточно полно, и дифракция на них обнаруживает ряд специфических свойств [1], [2], [3].

В настоящей работе приводится решение задачи дифракции электромагнитных волн на 3-элементной симметричной решетке, т. е. решетке, имеющей три ленты на период, одна из которых отличается, вообще говоря, от двух других, и можно выбрать положение начала координат так, что относительно этого начала решетка будет симметричной (рис. 1).

Метод решения настоящей задачи является дальнейшим развитием метода, предложенного в работе [4].

Заметим сразу, что достаточно рассмотреть случай, например,  $E$ -поляризации падающей волны (вектор напряженности электрического поля параллелен лентам решетки), а для случая произвольной поляризации воспользоваться принципом двойственности и принципом суперпозиции, т. к. дополнительная решетка в этом случае также является симметричной трехэлементной.

## 1. СЛУЧАЙ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ

### 1. Постановка задачи

Исследуемая периодическая решетка образована бесконечно тонкими и идеально проводящими металлическими лентами, расположенными так, что на период приходится по три ленты, одна из которых отличается по ширине от двух других. Расстояние между широкими лентами  $d$ , ширина узкой ленты  $d'$ , расстояние между внешними краями широких лент  $d''$ , период решетки  $l$ . Система координат (рис. 1) расположена так, что решетка находится в плоскости  $XOY$  и ось  $OX$  параллельна лентам, а начало координат выбрано точно посередине узкой ленты. Таким образом, ленты располагаются симметрично относительно начала координат. Будем считать, что решетка бесконечно протяженная вдоль осей  $OX$  и  $OY$ . Сверху ( $z > 0$ ) нормально к этой решетке падает плоская электромагнитная волна

$$E^{(\text{пад})} = E_0 e^{-ikz}; \quad H^{(\text{пад})} = H_0 e^{-ikz}$$

(здесь и далее предполагается, что поле зависит от времени как  $e^{-i\omega t}$ ). Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции такой волны на решетке.

Как отмечалось выше, достаточно рассмотреть случай  $E$ -поляризации падающей волны, т. е. случай, когда

$$E_x^{(\text{пад})} = e^{-ikz}; \quad E_z^{(\text{пад})} = E_y^{(\text{пад})} = 0. \quad (1.1)$$

В силу симметрии системы искомое электрическое поле также имеет отличную от нуля только  $x$ -составляющую, постоянную вдоль оси  $OX$  и периодическую (с периодом  $l$ ) вдоль оси  $OY$ . Поэтому это поле можно представить в виде ряда Фурье:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) e^{\frac{2\pi i n}{l} y},$$

и, следовательно, записать выражения для полей в верхнем и нижнем полупространствах в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} E_x^1 &= e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{\frac{2\pi i n}{l} y}; & z > 0 \\ E_x^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{\frac{2\pi i n}{l} y}; & z < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.2)$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.3)$$

( $\lambda$  — длина падающей электромагнитной волны).

Отметим, что согласно характеру искомых полей (1.2) физический смысл имеет та ветвь корня в (1.3), у которой  $\text{Im} V^- > 0$ , а при  $\text{Im} V^- = 0$   $\text{Re} V^- > 0$ .

Задача состоит в отыскании коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$ .

## 2. Определение коэффициента прохождения и амплитуд дифракционных спектров

Удовлетворение полей (1.2) граничным условиям на решетке (при  $z = 0$ ) приводит к следующим соотношениям:

$$1 + a_0 = b_0; \quad a_n = b_n \quad (n \neq 0)$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = 0 \quad (\text{на металле}), \quad (2.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \gamma_n e^{\frac{2\pi i n}{l} y} = k \quad (\text{на щелях}). \quad (2.1')$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \chi_n &= 1 + i \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1}; \quad (n \neq 0); \quad x = \frac{kl}{2\pi} = \frac{l}{\lambda}; \\ \gamma_n &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2} = \frac{2\pi |n|}{l} i (1 - \chi_n) \quad (n \neq 0); \\ \varphi &= \frac{2\pi y}{l}; \quad \theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \theta' = \frac{\pi d'}{l}; \quad \theta'' = \frac{\pi d''}{l}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$ .

В обозначениях (2.2) уравнения (2.1) и (2.1') примут вид

$$\left| \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i n \varphi} &= 0; \quad \text{при } |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \theta''; \\ \sum_{n \neq 0} b_n |n| (1 - \chi_n) e^{i n \varphi} &= i x (b_0 - 1); \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta'' \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

$$\left| \sum_{n \neq 0} b_n |n| (1 - \chi_n) e^{i n \varphi} = i x (b_0 - 1); \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta'' \right. \quad (2.3')$$

Дифференцируя уравнение (2.3) по  $\varphi$  и полагая  $b_n n = X_n$ , получим

$$\left| \begin{aligned} \sum_{n \neq 0} X_n e^{i n \varphi} &= 0 \quad \text{при } |\varphi| < \theta'; \quad \theta < |\varphi| < \theta''; \\ \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{i n \varphi} &= i x b_0 + f(e^{i \varphi}) \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta''. \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$\left| \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{i n \varphi} = i x b_0 + f(e^{i \varphi}) \quad \text{при } \theta' < |\varphi| < \theta; \quad \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta''. \right. \quad (2.4')$$

Здесь  $f(e^{i \varphi}) = -i x + \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{i n \varphi}$ .

К системе (2.4) и (2.4') необходимо добавить равенства, получаемые из (2.3) при подстановке соответственно  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = +\delta$  и  $\varphi = -\delta$ , где  $\delta = \frac{\theta + \theta''}{2}$ ,

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n};$$

$$\begin{aligned}
 -b_n &= \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} e^{in\delta}; \\
 -b_0 &= \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} e^{-in\delta}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Последние два равенства запишем несколько иначе:

$$-b_0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \cos n\delta; \tag{2.5'}$$

$$0 = \sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} \sin n\delta. \tag{2.5''}$$

Системы, подобные (2.4) и (2.4'), решаются в [4] путем сведения к задаче Римана — Гильберта. В нашем случае решение можно провести аналогично, поэтому мы приведем здесь сразу окончательный результат. Предварительно введем следующие обозначения (рис. 2):

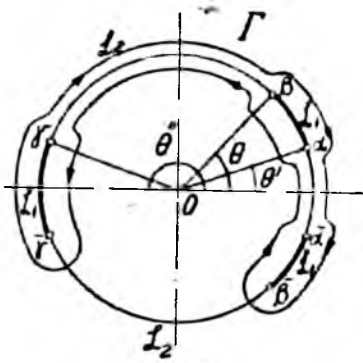


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 R(\xi) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})(\xi - \beta)(\xi - \bar{\beta})(\xi - \gamma)(\xi - \bar{\gamma})}} & \text{на дуге } L_1 \\ 0 & \text{на дуге } L_2 \end{cases} \\
 V_n(\xi_0) &= \frac{1}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\xi^n}{\xi - \xi_0} \sqrt{\frac{1}{(\xi - \alpha)(\xi - \bar{\alpha})(\xi - \beta)(\xi - \bar{\beta})(\xi - \gamma)(\xi - \bar{\gamma})}} d\xi; \\
 &\quad (\xi_0 \in L_1), \\
 V_m^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{-\theta < \varphi < -\theta' \\ \theta' < \varphi < \theta \\ \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta''}} V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \\
 R_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{-\theta < \varphi < -\theta' \\ \theta' < \varphi < \theta \\ \theta'' < \varphi < 2\pi - \theta''}} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi, \\
 R_{[\sigma]} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \cos m\delta; \quad \bar{R}_{[\sigma]} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m}; \quad R_{[\sigma]}^* = \sum_{m \neq 0} \frac{R_m}{m} \sin m\delta; \\
 R_{[\sigma]}^{-1} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \cos m\delta; \quad \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m}; \quad R_{[\sigma]}^{*(-1)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-1}}{m} \sin m\delta; \\
 R_{[\sigma]}^{(-2)} &= \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m} \cos m\delta; \quad \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m}; \quad R_{[\sigma]}^{*(-2)} = \sum_{m \neq 0} \frac{R_{m-2}}{m} \sin m\delta; \\
 U_{[\sigma]}^n &= \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m} \cos m\delta; \quad V_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m}; \quad W_{[\sigma]}^n = \sum_{m \neq 0} \frac{V_m^n}{m} \sin m\delta.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Интегрирование в формуле для вычисления  $V_n(\xi_0)$  ведется по внутренней стороне дуги  $L_1$ , интеграл понимается в смысле главного значения. Для  $R(\xi)$  выбрана ветвь радикала, имеющая  $R(0) = 1$  (вычисление этих

величин дано в § 4). С помощью обозначений (2.6) решение нашей задачи может быть записано в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 0 &= ix b_0 V_0^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_0^n + V_0^{-n}] + 2(C_3 R_0 + C_2 R_{-1} + C_1 R_{-2}) - ix V_0^0 \\
 -b_0 &= ix b_0 V_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_{[0]}^n + V_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 \tilde{R}_{[0]} + C_2 \tilde{R}_{[0]}^{(-1)} + C_1 \tilde{R}_{[0]}^{(-2)}) - ix V_{[0]}^0 \\
 -b_0 &= ix b_0 U_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [U_{[0]}^n + U_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_{[0]} + C R_{[0]}^{-1} + C R_{[0]}^{(-2)}) - ix U_{[0]}^0 \\
 0 &= ix b_0 W_{[0]}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [W_{[0]}^n + W_{[0]}^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_{[0]}^* + C R_{[0]}^{*(-1)} + C_1 R_{[0]}^{*(-2)}) - ix W_{[0]}^0 \\
 X_m &= ix b_0 V_m^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \chi_n [V_m^n + V_m^{-n}] + \\
 &\quad + 2(C_3 R_m + C_2 R_{m-1} + C_1 R_{m-1}) - ix V_m^0
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

(m ≠ 0)

Приведенная система (2.7) является бесконечной системой линейных неоднородных алгебраических уравнений, из которой определяются коэффициенты  $b_0$  и  $b_n$ . Здесь  $C_1, C_2, C_3$  — неизвестные промежуточные константы, а система выписана с учетом того, что  $\chi_{-n} = \chi_n$ . Коэффициенты системы (2.7) удовлетворяют условиям Коха, и решение ее может быть найдено методом редукции. Так как  $\chi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для численного решения системы можно положить  $\chi_n = 0$  при всех  $n > N$  и решать систему из некоторого конечного числа  $n$  уравнений.

### 3. Свойства трехэлементных симметричных решеток

При исследовании дифракционных свойств симметричных разнощелевой и равнощелевой двухэлементных решеток (рис. 3, б), в), проведенном в работах [1]—[2], отмечался факт слабого влияния на дифракционную картину узких щелей решетки

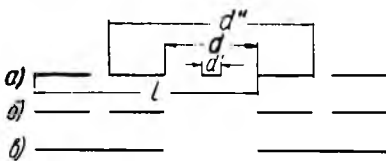


Рис. 3.

типа б) в случае  $E$ -поляризации падающей электромагнитной волны и узких лент решетки типа в) в случае  $H$ -поляризации. С другой стороны, влияние узкой ленты решетки типа в) и щели решетки типа б) в случаях  $E$ - и  $H$ -поляризации соответственно оказывается весьма существенным. Эти свойства связаны с направлением токов на элементах решетки, наводимых падающим электромагнитным полем. В каждом случае влияние узкой ленты и щели сводится к повышению роли четных гармоник в дифракционном спектре. Поскольку трехэлементная симметричная решетка имеет узкую щель и узкую ленту, в ее дифракционном спектре также будут преобладать четные гармоники. Кроме того, если ширина узкой щели или ленты не превышает 0,05 периода (см. [2]), то дифракционные свойства трехэле-

ментных решеток, наводимых падающим электромагнитным полем. В каждом случае влияние узкой ленты и щели сводится к повышению роли четных гармоник в дифракционном спектре. Поскольку трехэлементная симметричная решетка имеет узкую щель и узкую ленту, в ее дифракционном спектре также будут преобладать четные гармоники. Кроме того, если ширина узкой щели или ленты не превышает 0,05 периода (см. [2]), то дифракционные свойства трехэле-

ментной симметричной решетки в случае  $E$ -поляризации совпадают со свойствами решетки типа  $\theta$ ), в случае  $H$ -поляризации — решетки типа  $\beta$ ). В этом случае можно пользоваться результатами расчетов, приведенных в [1] и [2]. Заметим еще, что если все ленты и щели трехэлементной симметричной решетки близки друг к другу по ширине, то в дифракционном спектре должны преобладать гармоники с номером, кратным 3. Если все ленты и щели равны по ширине, то в спектре отсутствуют все другие гармоники, кроме тех, номер которых кратен 3. Такая решетка эквивалентна одноэлементной решетке с периодом, в три раза меньшим  $l$ . Это свойство трехэлементной решетки может быть использовано для проверки правильности численных расчетов.

#### 4. Вычисление коэффициентов

##### 1. Полиномы $Q_n(u, v, \omega)$ .

Определим  $\Phi(z)$  как ветвь  $\sqrt{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})(z-\beta)(z-\bar{\beta})(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})}$ , голоморфную во всей плоскости  $z$  с разрезами вдоль разрывной дуги  $L_1$  (рис. 2), считая  $\Phi(0) = 1$ . Введем  $\Phi_1(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})}$ ;  $\Phi_2(z) = \sqrt{(z-\beta)(z-\bar{\beta})}$ ;  $\Phi_3(z) = \sqrt{(z-\gamma)(z-\bar{\gamma})}$ , причем  $\Phi_1(0) = 1$ ;  $\Phi_2(0) = 1$ ;  $\Phi_3(0) = 1$  и разрезы проведены между точками  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ ,  $\beta$  и  $\bar{\beta}$  и  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  соответственно. В таком случае  $\Phi(z) = \Phi_1(z)\Phi_2(z)\Phi_3(z)$ . Введем обозначения  $v = \cos \theta'$ ,  $u = \cos \theta$ ,  $\omega = \cos \theta''$ . Функция  $\frac{1}{\Phi_1(z)}$  является производящей

для полиномов Лежандра  $\frac{1}{\Phi_1(z)} = \sum_0^{\infty} P_n(v) z^n$  при  $|z| < 1$ ; аналогично  $\frac{1}{\Phi_2(z)} =$

$= \sum_0^{\infty} P_n(u) z^n$  при  $|z| < 1$  и, наконец, как показано в [2], для функции

$\frac{1}{\Phi_3(z)}$  также справедливо  $\frac{1}{\Phi_3(z)} = \sum_0^{\infty} P_n(\omega) z^n$  при  $|z| < 1$ .

Введем при  $|z| < 1$  разложение

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \sum_0^{\infty} Q_n(u, v, \omega) z^n;$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi(z)} &= \frac{1}{\Phi_1(z)\Phi_2(z)\Phi_3(z)} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} P_k(v) z^k \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} P_j(u) z^j \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\omega) z^i \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[ \sum_{k=0}^n P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(v) P_{n-k-j}(\omega) \right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отсюда

$$Q_n(u, v, \omega) = \sum_{k=0}^n (P_k(u) \sum_{j=0}^{n-k} P_j(v) P_{n-k-j}(\omega)) \quad (n \geq 0). \quad (4.2)$$

Рекуррентную формулу для  $Q_n(u, v, w)$  легко получить, дифференцируя (4.1) по  $z$  и приравняв затем коэффициенты при одинаковых степенях  $z$ :

$$(n-2)Q_{n-5} - (2n-3)(u+v+w)Q_{n-4} + (n-1)[3+4(uv+uw+v\omega)]Q_{n-3} - 2(2n-1)[u+v+w+2uv\omega]Q_{n-2} + n[3+4(uv+uw+v\omega)]Q_{n-1} - (2n+1)(u+v+w)Q_n + (n+1)Q_{n+1} = 0. \quad (4.3)$$

Для получения интегрального представления полиномов  $Q_n(u, v, w)$  необходимо воспользоваться формулой Коши. Учитывая, кроме (4.1), разложение

$$\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{z^n} \sum_0^{\infty} Q_n(u, v, w) \frac{1}{z^n} \quad \text{при } |z| > 1,$$

легко получить

$$Q_n(u, v, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\substack{\theta' < |\varphi| < \theta \\ |\varphi| > \theta''}} \frac{e^{i(n+3)\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi,$$

и, с другой стороны,

$$Q_n(u, v, w) = \frac{1}{\pi} \int_{\substack{\theta > |\varphi| > \theta' \\ |\varphi| > \theta''}} \frac{e^{-in\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi.$$

Отсюда

$$Q_n(u, v, w) = -\frac{i}{\pi} \int_{\substack{\theta > |\varphi| > \theta' \\ |\varphi| > \theta''}} \frac{e^{i\frac{3}{2}\varphi} \sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi.$$

Учитывая поведение функции  $\Phi(e^{i\varphi})$  на всем пути интегрирования, легко получить

$$Q_n(u, v, w) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left[ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{(v - \cos\varphi)(\cos\varphi - u)(\cos\varphi - w)}} - \int_{\theta''}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(n + \frac{3}{2}\right)\varphi d\varphi}{\sqrt{(v - \cos\varphi)(u - \cos\varphi)(w - \cos\varphi)}} \right]. \quad (4.4)$$

Отсюда очевидно (если этой формулой определить  $Q_n$  при любом  $n$ ), что

$$Q_{-n}(u, v, w) = -Q_{n-3}(u, v, w). \quad (4.5)$$

Непосредственное вычисление  $Q_{-1}$  по формуле (4.4) при  $n = -1$  приводит к  $Q_{-1} = 0$ . Так как  $Q_{-2} = -Q_{-1} = 0$ , то тем самым формулами (4.2), (4.3), (4.4) и (4.5) определены  $Q_n$  при любом  $n$ . Для удобства пользования формулой (4.3) выпишем

$$\begin{aligned} Q_{-2} &= 0; \\ Q_{-1} &= 0; \\ Q_0 &= 1; \end{aligned}$$

$$Q_1 = u + v + w;$$

$$Q_2 = \frac{3}{2} (u^2 + v^2 + w^2) + (uv + uw + vw) - \frac{3}{2};$$

$$Q_3 = \frac{5}{2} (u^3 + v^3 + w^3) + \frac{3}{2} [u^2(v + w) + v^2(u + w) + w^2(u + v)] + \\ + uvw - \frac{5}{2} (u + v + w).$$

2. Вычисление  $R_m$ . По определению

$$R_m = \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{\theta > |\varphi| > \theta' \\ |\varphi| > \theta''}} \frac{e^{-im\varphi}}{\Phi(e^{i\varphi})} d\varphi,$$

сравнивая с выражениями для  $Q_n(u, v, w)$ , находим

$$R_m = \frac{1}{2} Q_m(u, v, w).$$

3. Полиномы  $\mu_n(u, v, w)$ .

Введем

$$\sqrt{z^2 - 2uz + 1} \sqrt{z^2 - 2vz + 1} \sqrt{z^2 - 2wz + 1} = \\ = \begin{cases} \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) z^n, & (|z| < 1), \\ z^3 \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) z^{-n}, & (|z| > 1). \end{cases} \quad (4.6)$$

$$(4.6')$$

Дифференцируя (4.6) по  $z$ , получим

$$\sum_0^{\infty} Q_n z^n \{3z^5 - 5z^4(u + v + w) + 2z^3[3 + 4(uv + uw + vw)] - \\ - 6z^2(u + v + w + 2uvw) + z[3 + 4(uv + uw + vw)] - (u + v + w)\} = \\ = \sum_0^{\infty} \mu_n(u, v, w) n z^{n-1},$$

и окончательно

$$\mu_{n+1} = Q_{n+1} - 2(u + v + w) Q_n + [3 + 4(uv + uw + vw)] Q_{n-1} - \\ - 4[u + v + w + 2uvw] Q_{n-2} + [3 + 4(uv + uw + vw)] Q_{n-3} - \\ - 2(u + v + w) Q_{n-4} + Q_{n-5}. \quad (4.7)$$

Если положить  $Q_n = 0$  при  $n < 0$ , то с помощью (4.7) легко определить значения  $\mu_n$  при любом  $n \geq 0$ .

4. Вычисление  $V_n(\xi_0)$ . Запишем  $V_n$  в несколько отличном от (2.6) виде:

$$V_n(\xi_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) dz;$$

контур  $\Gamma$  показан на рис. 2. На основании теоремы о вычетах имеем

$$V_n(\xi_0) = \text{Res}(0) + \text{Res}(\infty).$$

Для подсчета вычетов воспользуемся следующими разложениями подынтегральной функции:

$$\frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) = -z^n \sum_{p=0}^{\infty} \xi_0^{-p-1} z^p \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(u, v, w) z^k \quad (|z| < 1),$$

$$\frac{z^n}{z - \xi_0} \Phi(z) = z^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \xi_0^p z^{-p} z^3 \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(u, v, w) z^{-k} \quad (|z| > 1),$$

Отсюда

$$\text{Res}(0) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \geq 0, \\ -\sum_{p=0}^{n-1} \mu_{-n-1-p}(u, v, w) \xi_0^{-p-1} & \text{при } n \leq -1, \end{cases}$$

$$\text{Res}(\infty) = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+3} \mu_{n-p+3}(u, v, w) \xi_0^p & \text{при } n \geq -3, \\ 0 & \text{при } n < -3. \end{cases}$$

Окончательно, таким образом, получаем

$$V_n(\xi_0) = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+3} \mu_{n-p+3}(u, v, w) \xi_0^p, & n \geq 0 \\ -\xi_0^{-1} - \mu_2 - \mu_1 \xi_0^{-1} - \xi_0^{-2}, & n = -1 \\ -\mu_2 \xi_0^{-1} - \xi_0^{-2} - \mu_1 - \xi_0^{-1}, & n = -2 \\ -\mu_2 \xi_0^{-1} - \mu_1 \xi_0^{-2} - \xi_0^{-3} - 1, & n = -3 \\ -\sum_{p=0}^{n-1} \mu_{-n-1-p} \xi_0^{-p-1}, & n < -3. \end{cases} \quad (4.8)$$

### 5. Вычисление $V_m^n$ .

Воспользовавшись (2.6), (4.8) и интегральным представлением для  $Q_n(u, v, w)$ , легко находим

$$V_m^n = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+3} \mu_{n-p+3} Q_{m-p}, & n \geq 0 \\ -\frac{1}{2} [Q_{m+1} + \mu_2 Q_m + \mu_1 Q_{m-1} + Q_{m-2}], & n = -1 \\ -\frac{1}{2} [\mu_1 Q_{m+1} + Q_{m+2} + \mu_1 Q_m + Q_{m-1}], & n = -2 \\ -\frac{1}{2} [Q_{m+3} + \mu_1 Q_{m+2} + \mu_2 Q_{m+1} + Q_m], & n = -3 \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \mu_{-n-1-p} Q_{m+p+1}, & n < -3 \end{cases} \quad (4.9)$$

### 6. Вычисление $\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)}$ , $R_{[\sigma]}^{(-k)}$ и $\hat{R}_{[\sigma]}^{(-k)}$ .

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \sum_{m=0} R_{m-k} = \frac{1}{2} \sum_{m=0} \frac{Q_{m-k}}{m} = \frac{1}{2} \sum_{m=1} \frac{Q_{m-k} - Q_{-m-k}}{m}.$$

Воспользовавшись далее (4.4), имеем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\sin \left( m - k + \frac{3}{2} \right) \varphi - \sin \left( -m - k + \frac{3}{2} \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\sin \left( m - k + \frac{3}{2} \right) \varphi - \sin \left( -m - k + \frac{3}{2} \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{m}}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\varphi}{m}}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi (\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi (\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется

$$\begin{aligned} R_{[\sigma]}^{(-k)} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ \int_0^{\theta} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \varphi}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi (\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left[ (\pi - \delta) \int_0^{\theta} \frac{\sin \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \delta \int_{\theta^*}^{\pi} \frac{\sin \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

7. Вычисление  $V_{[\sigma]}^n$ ,  $W_{[\sigma]}^n$  и  $U_{[\sigma]}^n$ . Воспользовавшись (4.9), легко получим

$$V_{[\sigma]}^n = \begin{cases} -\sum_{p=0}^{n+3} \mu_{n-p+3} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-p)}, & n \geq 0 \\ -(\bar{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \mu_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(2)} + \mu_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)}), & n = -1 \\ -(\mu_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \bar{R}_{[\sigma]}^{(2)} + \mu_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)}), & n = -2 \\ -(\bar{R}_{[\sigma]}^{(3)} + \mu_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(2)} + \mu_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)} + \bar{R}_{[\sigma]}^{(1)}), & n = -3 \\ -\left( \sum_{p=0}^{n-1} \mu_{-n-1-p} \bar{R}_{[\sigma]}^{(p+1)} \right). & n < -3 \end{cases} \quad (4.10)$$

$W_{[\sigma]}^n$  и  $U_{[\sigma]}^n$  выражаются такими же формулами, только вместо  $\bar{R}_{[\sigma]}^{(+k)}$  нужно писать  $\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)}$  и  $R_{[\sigma]}^{(+k)}$  соответственно.

## II. СЛУЧАЙ НАКЛОННОГО ПАДЕНИЯ

В случае наклонного (под углом  $\alpha$ ) падения электромагнитной волны на трехэлементную решетку поля запишутся в таком виде:

$$(z > 0) \quad E_x^{(1)} = e^{-ik(y \sin \alpha + z \cos \alpha)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\gamma_n z} e^{ih_n y}.$$

$$(z < 0) \quad E_x^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i\gamma_n z} e^{ih_n y}.$$

Здесь

$$h_n = -k \sin \alpha + \frac{2\pi n}{T}; \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (n - \chi \sin \alpha)^2}.$$

Если ввести  $\bar{X}_n = b_n (n - \chi \sin \alpha)$  и  $\bar{\chi}_n = 1 + i \sqrt{\frac{\chi^2}{(n - \chi \sin \alpha)^2} - 1}$ , то при этом

$$\gamma_n = \frac{2\pi i}{T} |n - \chi \sin \alpha| (1 - \bar{\chi}_n)$$

и решение задачи дифракции, как показано, например, в [5], выражается следующей бесконечной системой линейных неоднородных уравнений (здесь введено обозначение  $\chi \sin \alpha = a$ ,  $j$  — целая часть  $a$ ; при этом  $a$  (не равно целому числу).

$$\begin{aligned} \bar{X}_m = & -i\chi \cos \alpha V_m^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n V_m^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{\chi}_n V_m^n + \\ & + 2(C_1 R_{m-2} + C_2 R_{m-1} + C_3 R_m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -i\chi \cos \alpha \bar{V}_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n \bar{V}_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{\chi}_n \bar{V}_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -i\chi \cos \alpha \bar{W}_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n \bar{W}_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{\chi}_n \bar{W}_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & -i\chi \cos \alpha \bar{U}_{[\sigma]}^0 + 2 \sum_{n=0}^j \bar{X}_n \bar{U}_{[\sigma]}^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}_n \frac{|n-a|}{n-a} \bar{\chi}_n \bar{U}_{[\sigma]}^n + \\ & + 2(C_1 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-2)} + C_2 \bar{R}_{[\sigma]}^{(-1)} + C_3 \bar{R}_{[\sigma]}). \end{aligned}$$

Коэффициенты здесь выражаются следующими формулами:

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a}; \quad \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} \cos m\delta;$$

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} \sin m\delta;$$

$$\bar{V}_{[\sigma]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a}; \quad \bar{U}_{[\sigma]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a} \cos m\delta; \quad \bar{W}_{[\sigma]}^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{V_m^n}{m-a} \sin m\delta.$$

Остальные коэффициенты не зависят от величины угла падения и совпадают с соответствующими коэффициентами, полученными в решении задачи дифракции при нормальном падении электромагнитной волны.

Подсчитаем

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R_{m-k}}{m-a} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{Q_{-k}}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{Q_{m-k}}{m-a} - \frac{Q_{-m-k}}{m+a} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{Q_{-k}}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{m(Q_{m-k} - Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} + \frac{a(Q_{m-k} + Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Пользуясь (4.4), имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(Q_{m-k} - Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - a^2} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left( m-k + \frac{3}{2} \right) \varphi - \sin \left( -m-k + \frac{3}{2} \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \left( m-k + \frac{3}{2} \right) \varphi - \sin \left( -m-k + \frac{3}{2} \right) \varphi}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - a^2} \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sin m\varphi}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sin m\varphi}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2}}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2}}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\sin a\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sin a(\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi) (\cos \varphi - u) (\cos \varphi - w)} d\varphi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos \left( \frac{3}{2} - k \right) \varphi \sin a(\pi - \varphi)}{V(v - \cos \varphi) (u - \cos \varphi) (w - \cos \varphi)} d\varphi \right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известным соотношением (см., например, [6]).

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m\varphi}{m^2 - a^2} = \pi \frac{\sin a(\pi - \varphi)}{2 \sin a\pi} \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ и } a - \text{ не целое число.}$$

Подобным образом найдем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(Q_{m-k} + Q_{-m-k})}{m^2 - a^2} = \frac{Q_{-k}}{a} - \frac{1}{\sqrt{2} \sin a\pi} \left[ \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k\right)\varphi \cos a(\pi - \varphi)}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left|a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right|}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi \right].$$

Окончательно

$$\bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2} \sin a\pi} \left[ \int_0^{\delta} \frac{\sin\left|a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right|}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left|a\pi - \left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi\right|}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi \right].$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= -\frac{\cos a(\pi - \delta)}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k + a\right)\varphi}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi + \\ &+ \frac{\cos a\delta}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi - a\pi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi; \\ \bar{R}_{[\sigma]}^{(-k)} &= \frac{\sin a(\pi - \delta)}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin\left(\frac{3}{2} - k + a\right)\varphi}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(\cos \varphi - u)(\cos \varphi - w)}} d\varphi - \\ &- \frac{\sin a\delta}{2\sqrt{2} \sin a\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left[\left(\frac{3}{2} + a - k\right)\varphi - a\pi\right]}{\sqrt{(v - \cos \varphi)(u - \cos \varphi)(w - \cos \varphi)}} d\varphi. \end{aligned}$$

Для вычисления  $\bar{U}_{[\sigma]}^n$ ,  $\bar{V}_{[\sigma]}^n$  и  $\bar{W}_{[\sigma]}^n$ , как легко показать, можно пользоваться соотношениями (4.10), подставив в нашем случае вместо  $R_{[\sigma]}$ ,  $\bar{R}_{[\sigma]}$  и  $\bar{R}_{[\sigma]}^*$  величины  $\bar{R}_{[\sigma]}$ ,  $\bar{R}_{[\sigma]}^*$  и  $\bar{R}_{[\sigma]}^*$  соответственно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору В. П. Шестопалову за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Гестрин, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. «Уч. зап. ХГУ серия математическая», 32, 1963.
  2. Л. Н. Литвиненко. Изв. вузов. «Радиофизика» (в печати).
  3. Г. Н. Гестрин, Л. Н. Литвиненко, К. В. Маслов, В. П. Шестопалов. ЖТФ (в печати).
  4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, 381, 1962.
  5. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 642, 1963.
  6. И. С. Рыжик, И. М. Градштейн. Таблицы, Физматгиз, М., 1962, стр. 54.
-