

ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОПИСАНИЮ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МЕЛЬКАНИЙ ЯРКОСТИ

Е. Г. Качко

В [1] предложена линейная модель инерции зрения

$$S(t) = c \int_{-\infty}^t B(\tau) A(t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

где $B(\tau)$ — яркость зрительной картины;
 $S(t)$ — светлота зрительного ощущения;
 $A(t)$ — функция затухания;
 c — постоянный коэффициент.

С учетом исследований Аллара формула (1) принимает вид

$$S(t) = c \int_{-\infty}^t B(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \quad (2)$$

Выражение (2) носит название математической инерции зрения Аллара — Луизова.

Модель (2) проверена Луизовым [1] для одиночных вспышек яркости, получено хорошее согласование теории с опытом. Показано, что модель удовлетворяет основному психофизическому закону Тальбота. Правда, автор не применяет линейной модели для математического описания зрительного восприятия периодических мельканий яркости.

В [2] показано, что модель (1) хорошо согласуется с законом Плато в обобщенной форме. Из модели (2) выводятся некоторые математические следствия, допускающие экспериментальную проверку.

Линейная модель использовалась в качестве рабочей модели при исследовании зрительного восприятия периодических мельканий яркости [5]. В результате обработки полученных экспериментальных данных автор определяет функцию затухания, при которой реакция модели (1) согласуется с реакцией зрительной системы в случае одинаковых входных сигналов.

Положительные результаты применения линейной модели для математического восприятия периодических мельканий яркости обуславливают необходимость ее дальнейшего исследования.

1. Известен экспериментальный факт зависимости критической частоты мельканий яркости от амплитуды [3]. Для прямоугольных мельканий при скважности $\lambda = \frac{1}{2}$ эта зависимость, известная под названием закона Портера — Айвса, имеет вид

$$n = a + b \lg \Delta B, \quad (3)$$

где ΔB — амплитуда прямоугольных мельканий яркости (рис. 1);

n — критическая частота, $гц$;

a и b — постоянные коэффициенты.

Пусть нестационарные зрительные картины B_1, B_2, B_3 представляют собой прямоугольные мелькания яркости (диаграмма (рис. 2)), амплитуды которых связаны соотношением

$$\frac{\Delta B_2}{\Delta B_1} = \frac{\Delta B_3}{\Delta B_2} = \alpha. \quad (4)$$

Для каждой из зрительных картин критическая частота соответственно определяется как

$$n_1 = a + b \lg \Delta B_1; \quad (5)$$

$$n_2 = a + b \lg \Delta B_2; \quad (6)$$

$$n_3 = a + b \lg \Delta B_3. \quad (7)$$

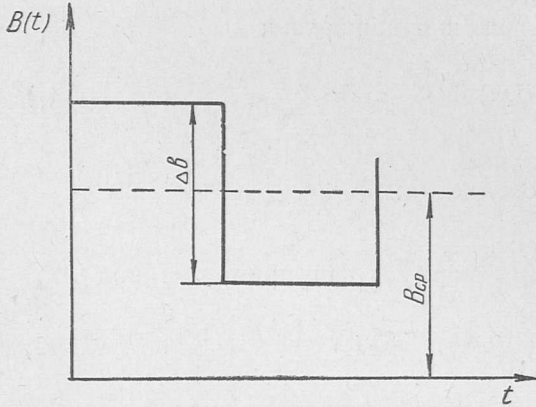


Рис. 1.

Подставив вместо $\Delta B_2 = \alpha \Delta B_1$, $\Delta B_3 = \alpha \Delta B_2$, вычтем (5) из (6) и (6) из (7). Тогда

$$n_2 - n_1 = \frac{\Delta B_2}{\Delta B_1}; \quad (8)$$

$$n_3 - n_2 = \frac{\Delta B_3}{\Delta B_2}.$$

Таким образом, из закона Портера—Айвса следует, что если амплитуды мельканий яркости связаны между собой соотношением (4), то

$$n_2 - n_1 = n_3 - n_2. \quad (9)$$

Из модели (2) не удастся вывести такое следствие. Действительно, если

$$\Delta B_1 \gg \Delta B_{\Pi}; \quad \Delta B_2 \gg \Delta B_{\Pi}; \quad \Delta B_3 \gg \Delta B_{\Pi},$$

то, согласно [3],

Следовательно,
$$n_1 = \frac{1}{4a} \cdot \frac{\Delta B_1}{\Delta B_{\Pi}}; \quad n_2 = \frac{1}{4a} \cdot \frac{\Delta B_2}{\Delta B_{\Pi}}; \quad n_3 = \frac{1}{4a} \cdot \frac{\Delta B_3}{\Delta B_{\Pi}}.$$

$$n_2 - n_1 = \frac{1}{4a} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right); \quad (10)$$

$$n_3 - n_2 = \frac{1}{4a} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right). \quad (11)$$

Выполнение формулы (9) очевидно только в том случае, когда $\alpha = 1$, т. е. все три зрительные картины одинаковы. Для $\alpha \neq 1$ следствие из модели не совпадает со следствием из закона Портера—Айвса.

Рассмотрим, позволит ли какая-либо другая функция затухания согласовать линейную модель с законом Портера—Айвса. Запишем выражение (3) следующим образом:

$$R(\omega) = k e^{-\xi|\omega|}, \quad (12)$$

где $k = \Delta S_{\Pi} 10^{\frac{a}{b}}$; $\xi = \frac{1}{2\pi b}$; $R(\omega) = \frac{\Delta S_{\Pi}}{\Delta B_{\Pi}} (\omega, \text{ рад/сек})$.

Если рассматривать глаз как некоторую линейную динамическую систему при восприятии мельканий яркости, $R(\omega)$ можно считать

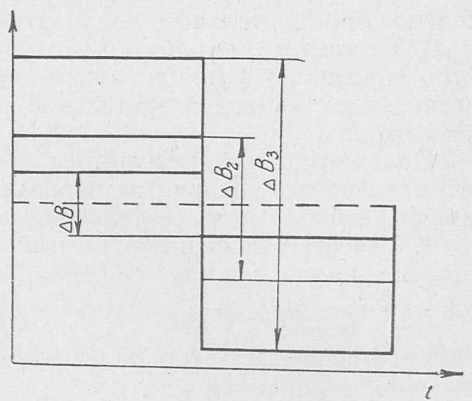


Рис. 2.

амплитудно-частотной характеристикой этой системы. Действительно, $R(\omega)$ — зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты мельканий входного.

Известно, что не каждая функция может служить амплитудно-частотной характеристикой физически осуществимой динамической системы [6]. Условие физической осуществимости системы с заданной амплитудно-частотной характеристикой имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln R(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (13)$$

Проверка условия (13) для (12) дает отрицательный результат, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|ke^{-\beta|\omega|}|}{1 + \omega^2} d\omega \text{ расходится.}$$

Это значит, что принципиально не может быть построена система, имеющая амплитудно-частотную характеристику (12). Но модель (1) предполагает существование такой системы и сама является ее описанием.

2. Дальнейшее исследование линейной модели (1) проводилось для сдвинутых относительно друг друга во времени мельканий яркости (диаграмма на рис. 3). Был проведен следующий эксперимент. На два поля сравнения подавались зрительные картины (рис. 3). При частотах 15 гц и выше наблюдатель отмечал равенство ощущений полей сравнения, мелькания на обоих полях сравнения ощущались как синфазные и с одинаковой амплитудой. Критические частоты мельканий также совпадали. Если модель объясняет полученные результаты экспериментов, то реакции модели на зрительные картины, которые математически могут быть записаны.

$$\begin{aligned} B_1(t) &= B \sin \omega t + B_{\text{ср}}, \\ B_2(t) &= B \sin \omega t + \varphi + B_{\text{ср}}; \end{aligned} \quad (14)$$

должны совпадать.

Для определенности $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тогда реакции модели запишутся в виде

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_{-\infty}^t B \sin \omega \tau e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau + \int_{-\infty}^t B_{\text{ср}} e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau; \\ S_2(t) &= \int_{-\infty}^t B \sin \left(\omega \tau + \frac{\pi}{2} \right) e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau + \int_{-\infty}^t B_{\text{ср}} e^{-\frac{t-\tau}{a}} d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned} S_1(t) &= B \left(\sin \omega t \frac{a}{1 + a^2 \omega^2} - \cos \omega t \frac{a^2 \omega}{1 + a^2 \omega^2} \right) + B_{\text{ср}} a; \\ S_2(t) &= B \left(\cos \omega t \frac{a}{1 + a^2 \omega^2} + \sin \omega t \frac{a^2 \omega}{1 + a^2 \omega^2} \right) + B_{\text{ср}} a. \end{aligned}$$

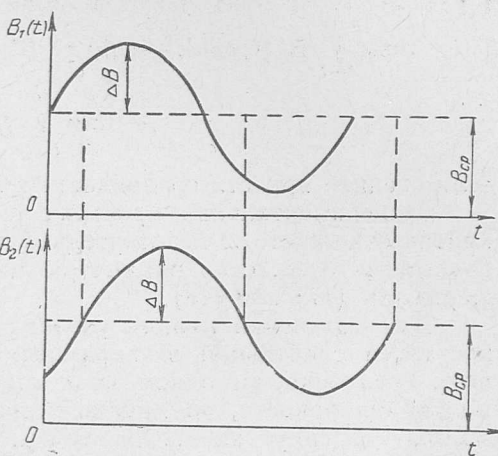


Рис. 3.

Можно показать, что в один и тот же момент времени зрительные ощущения $S_1(t)$ и $S_2(t)$ не совпадают.

Действительно, при $t = -\frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{1}{a\omega} + \pi$

$$S_1(t) = S_{1\max} = \frac{2Ba}{\sqrt{1+a^2\omega^2}} + B_{\text{ср}}a; \quad (16)$$

$$S_2(t) = B_{\text{ср}}a.$$

Можно также показать, что при сдвиге любой из гармоник, которые составляют сложный сигнал при разложении его в ряд Фурье, реакция модели (2) не остается неизменной при докритических частотах.

3. В [3] выведены условия равенства критических частот для мельканий произвольной формы (рассматривались только периодические мелькания яркости) как следствие из модели (2).

Эти условия для прямоугольных мельканий яркости имеют вид

$$\lambda'(1-\lambda')\Delta B' = \lambda''(1-\lambda'')\Delta B'', \quad (17)$$

а для мельканий произвольной формы —

$$\begin{aligned} \max_{t-T} \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \min_{t-T} \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau = \max_{t-T} \int_{t-T}^t B'(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau - \\ - \min_{t-T} \int_{t-T}^t B''(\tau) e^{\frac{\tau}{a}} d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

если средние яркости сравниваемых зрительных картин одинаковы.

Экспериментальная проверка условий (17) и (18) показала, что критические частоты действительно очень близки, а разность частот не превышает 3 гц, если параметры мельканий связаны между собой по формулам (17) или (18).

Для выяснения точного условия равенства критических частот был поставлен следующий эксперимент. Наблюдателю предъявлялись два поля сравнения, на одном из которых формировались прямоугольные мелькания яркости, на другом — синусоидальные с тем же периодом. Амплитуды синусоидальных мельканий менялись, в результате чего выделялась зона изменения амплитуды синусоидальных мельканий, при которой наблюдалось равенство критических частот мельканий (зона нечувствительности).

Оказывалось, что в центре зоны нечувствительности лежат точки, соответствующие такой амплитуде синусоидальных мельканий, которая равна амплитуде первой гармоники прямоугольных мельканий яркости, а точки, соответствующие амплитудам, вычисленным по формуле (17), — на ее границе. Факт равенства критических частот мельканий при

$$\Delta B_{\text{пр}} = \Delta B_{\text{sin}} \frac{\pi}{2 \sin \pi \lambda},$$

где $\Delta B_{\text{пр}}$ — амплитуда прямоугольных мельканий;

ΔB_{sin} — амплитуда первой гармоники [7].

Так как амплитуда первой гармоники прямоугольных мельканий яркости $\Delta B_{\text{sin}} = 2\Delta B_{\text{пр}} \frac{\sin \pi \lambda}{\pi}$, то условие равенства критических частот для прямоугольных мельканий яркости может быть записано следующим образом:

$$2\Delta B'_{\text{пр}} \frac{\sin \pi \lambda'}{\pi} = 2\Delta B''_{\text{пр}} \frac{\sin \pi \lambda''}{\pi}, \quad (19)$$

где λ — скважность мельканий.

Средние яркости для обоих прямоугольных мельканий одинаковы. Из условия (17) вытекает, что

$$\frac{\Delta B'}{\Delta B''} = \frac{\lambda''(1-\lambda'')}{\lambda'(1-\lambda')} ; \quad (20)$$

из условия (19) —

$$\frac{\Delta B'}{\Delta B''} = \frac{\sin \pi \lambda''}{\sin \pi \lambda'} . \quad (21)$$

Сравнивая (20) и (21) (рис. 4), замечаем, что хотя условия равенства критических частот мельканий и близки друг к другу, но точно не совпадают. Рис. 4 построен для $\lambda^1 = \frac{1}{2}$. Сплошная линия соответствует формуле (20), крестики — формуле (21).

ВЫВОДЫ

1. Модель Аллара—Луизова (2) хорошо согласуется с экспериментальными данными при исследовании реакции зрительного анализатора на одиночные вспышки яркости [1].

2. Модель (2) объясняет некоторые зависимости при исследовании реакции зрительного анализатора на периодические мелькания яркости [3, 5].

3. Модель (1) не может объяснить закон Портера—Айвса, подтвержденный экспериментом.

4. Реакции моделей (1), (2) не соответствуют результатам экспериментов при исследовании влияния сдвига фаз гармоник входного сигнала.

5. Полученные из модели (2) условия равенства критических частот для периодических мельканий яркости не совсем точны.

Следовательно, линейная модель инерции зрения не может объяснить всех экспериментальных фактов, наблюдавшихся при исследовании восприятия периодических мельканий яркости.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Луизов. Инерция зрения. Оборонгиз, 1961.
2. М. Е. Allard. Memoire sur l'intensité et la portée des phares. Paris, 1876.
3. Ю. П. Шабанов-Кушнаренко, Е. Г. Качко. Исследование реакций модели Аллара—Луизова на периодические мелькания яркости. Сб. «Проблемы бионики», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
4. H. E. Ives. A Theory of Intermittent Vision. JOSA, 4, 6, (1922).
5. D. H. Kelly. Vision Responses to Time Dependent Stimuli. JOSA, 7, 51 (1961).
6. В. В. Солодовников. Техническая кибернетика. Изд-во «Машиностроение», 1967.
7. H de Lange D3n. Research into the Dynamic Nature of the Human Fovea. JOSA, 11, 48(1958).

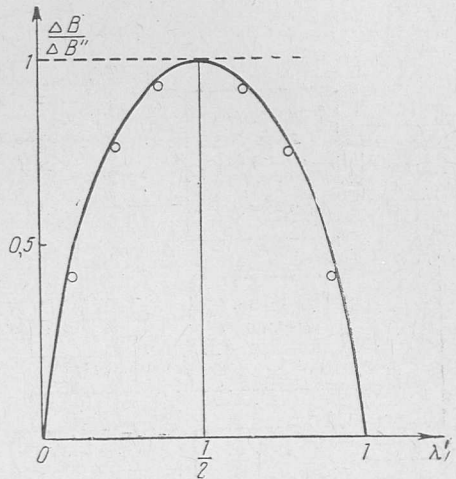


Рис. 4.