Automatica. 1976. Vol. 12, №2. P. 123-132. 5. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир. 1972. 521с. 6. *Козырев В.Г.* Об асимптотике системы оптимального управления с двумя малыми сингулярно возмущающими параметрами // Динам.- системы. 1992. Вып. 10. С. 57-63.

Поступила в редколлегию 20.09.98
Рецензент: д-р техн. наук Гайский В.А.

Дубовик Сергей Андреевич, канд. техн. наук, старший научный сотрудник, докторант департамента технической кибернетики Севастопольского государственного технического университета. Научные интересы: асимптотические методы в оптимальном управлении, математическое моделирование, управление движением. Увлечения и хобби: книги, музыка, кино. Адрес: Украина, 335053, Севастополь, Студгородок, СевГТУ, тел. 23-50-14.

УДК 519.81

ИДЕНТИФИКАЦИЯ АДДИТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ

БЕСКОРОВАЙНЫЙ В.В.

Рассматривается применение метода компараторной идентификации для синтеза аддитивных моделей многофакторного оценивания. Предлагаются подход и метод идентификации аддитивных моделей, использующие новый вид функции общей полезности.

Современная теория принятия решений предполагает выбор альтернативного варианта на основе предпочтений лица, принимающего решения (ЛПР), или с использованием формальных моделей. Важнейшей задачей формализации процесса выбора решений можно считать определение метрики для их ранжирования. В качестве методологической основы для построения метрики традиционно используется теория полезности, в соответствии с которой для каждого из альтернативных вариантов x из допустимого множества X может быть определено значение его полезности (ценности) $P(x)$. При этом для $x, y \in X$: $x \sim y \leftrightarrow P(x) = P(y)$; $x \phi y \leftrightarrow P(x) > P(y)$; $x \geq y \leftrightarrow P(x) >= P(y)$.

В моделях многокритериального выбора в основном используются функции общей полезности (ФОП), построенные на основе аддитивной или мультипликативной полезности видов

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \xi_i(x), \tag{1}$$

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(x); \quad P(x) = \prod_{i=1}^{n} \left[\xi_i(x)\right]^{\lambda_i}, \tag{2}$$

где $P(x)$ – полезность альтернативы x; n – количество частных критериев; λ_i – коэффициент, характеризующий степень важности фактора (критерия k_i), $\sum_i \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$; $i = \overline{1,n}$, $\xi_i(x) = \xi_i(k_i(x))$ – функция полезности (ФП) критерия k_i.

Наибольшее применение в практике принятия решений находят модели вида (1). Если определен вектор предпочтений $\lambda = [\lambda_i]$ и известен вид всех функций полезности $\xi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, то задача выбора для аддитивной модели (1) во многих случаях может быть сведена к задаче оптимизации вида

$$x^* = \arg\max_{x \in X} P(x). \tag{3}$$

В общем случае и вектор весовых коэффициентов λ и ФП частных критериев $\xi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ требуют своего определения. Определение вектора весовых коэффициентов λ традиционно осуществляется экспертным путем методами ранжирования, приписывания баллов, последовательных предпочтений или парных сравнений. Недостатками перечисленных методов считаются субъективизм и относительно невысокая точность оценок, их независимость от значений частных критериев. В качестве ФП обычно выбирается линейное нормирующее преобразование частных критериев вида

$$\xi_i(x) \equiv \bar{k}_i(x) = \left(\frac{k_i(x) - k_{i\,нх}}{k_{i\,нл} - k_{i\,нх}} \right), \tag{4}$$

где $k_{iнл}$, $k_{iнх}$ – наилучшее и наихудшее значения i-го критерия.

Линейное преобразование (4) в общем случае не позволяет отображать существующие представления о характере изменения полезности факторов решения, например, не имеет насыщения в окрестности $k_{iнл}$ и, таким образом, не позволяет описывать убывание предельной полезности. Учесть нелинейность зависимостей $\xi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ можно с помощью ФП более общего вида. Среди них: ФП вида [1]:

$$\xi_i(x) = \left(\frac{k_i(x) - k_{i\,нх}}{k_{i\,нл} - k_{i\,нх}} \right)^{\alpha_i}, \tag{5}$$

где α_i – коэффициент, определяющий вид зависимости. При $\alpha_i = 1$ имеет место линейная зависимость, при $0 < \alpha_i < 1$ – выпуклая вверх, при $\alpha_i > 1$ – выпуклая вниз зависимости;

и универсальная ФП вида [2]

$$\xi_i(x) = \begin{cases} a \left(\dfrac{\bar{k}_i(x)}{\bar{k}_{ia}} \right)^{\alpha_{i1}}, & если \quad 0 \leq \bar{k}_i(x) \leq \bar{k}_{ia}, \\[2ex] a + (1-a) \cdot \left(\dfrac{\bar{k}_i(x)}{1 - \bar{k}_{ia}} \right)^{\alpha_{i2}}, & если \ \bar{k}_{ia} < \bar{k}_i \leq 1, \end{cases} \tag{6}$$

где $\bar{k}_{ia}$, a – координаты точки перегиба ФП; $0 \leq a \leq 1$; α_{i1}, α_{i2} – коэффициенты, определяющие вид зависимости соответственно на начальном и конечном отрезках ФП.

Учет нелинейности зависимостей $\xi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ с помощью ФП (5), (6) вносит новый элемент субъективизма, связанный с определением их параметров. К тому же в теории принятия решений существует направление [3], в соответствии с которым весовые коэффициенты частных критериев λ_i, $i=\overline{1,n}$ нельзя считать постоянными. Исходя из этого встает вопрос о необходимости формирования такой ФОП $P(x)$, параметры которой определялись бы с меньшей долей субъективизма и с учетом зависимости вектора предпочтений λ от варианта решения $x \in X$, т.е. $\lambda_i = f_i(k_i(x))$, $i=\overline{1,n}$.

В качестве функции общей полезности $P(x)$, удовлетворяющей перечисленным требованиям, предлагается использовать модифицированную форму выражения (1) с переменными весовыми коэффициентами и линейной ФП вида

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\bar{\xi}_i(x), \qquad (7)$$

где $\lambda_i(x) = f_i(k_i(x))$ – значение весового коэффициента критерия k_i для решения $x \in X$; $\bar{\xi}_i(x)$ – значение линейной ФП критерия k_i для решения x, которое может быть получено с помощью ФП вида (4) или (5), (6) для значений коэффициентов нелинейности, равных 1.

Задача идентификации ФОП вида (7) на порядок проще, чем для функции вида (1). В качестве аргументов этого утверждения могут быть использованы факты, что процесс решения задачи определения ФП $\bar{\xi}_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ характеризуется линейной временной сложностью и не вызывает затруднений, а решение задачи определения коэффициентов $\lambda_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ по сложности соизмеримо с решением задачи идентификации ФП общего вида $\xi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$.

Для оценки компонент вектора предпочтений λ можно использовать информацию о фактах выборов ЛПР среди альтернатив $x, y \in X$. Этот подход базируется на методе компараторной идентификации [4-6], суть которого для рассматриваемой задачи состоит в следующем. ЛПР воспринимает в процессе выбора пару альтернативных вариантов $x, y \in X$, которые формируют в его сознании некоторые субъективные оценки их полезности $\widetilde{P}(x)$ и $\widetilde{P}(y)$. На основании этих оценок оно дает заключение об эквивалентности или предпочтительности решений.

По результатам сравнения ЛПР оценок пар вариантов $x, y \in X$ на множестве альтернатив X может быть сформировано одно или несколько бинарных отношений $R(X) = \{(x,y): x,y \in X\} \subseteq X \times X$: эквивалентности $R_E(X) = \{(x,y): x,y \in X,\ x \sim y\}$; строгого предпочтения $R_S(X) = \{(x,y): x,y \in X,\ x \succ y\}$; нестрогого предпочтения $R_N(X) = \{(x,y): x,y \in X,\ x \geq y\}$. Предположим, что в результате сравнения альтернативных вариантов сформировано некоторое отношение $R(X)$. Для определения вектора предпочтений $\lambda(z)$ выделим на отношении $R(X)$ его подмножество, включающее только пары, одним из элементов которых является z, т.е. $R^z(X) = \{(x,y) \in R(X): x = z \vee y = z\}$. Для полученного отношения $R^z(X)$ подобно [5], полагая $\lambda(x) = \lambda(z)$ и $\lambda(y) = \lambda(z)$, можно найти значение $\lambda(z)$. В этом случае определение вектора $\lambda(z)$ может быть сведено к решению системы линейных уравнений или неравенств.

Для отношения эквивалентности $R_E^z(X)$ из условия $P(x) = P(y)$, $(x,y) \in R_E^z(X)$ получим систему, включающую $m+1$ линейное уравнение вида

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(y) - \xi_i(x)]\lambda_i(z) = 0,\ (x,y) \in R_E^z(X),\ j = \overline{1,m},$$

$$\eta_{m+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i(z) = 1,\ \lambda_i(z) \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

где m – мощность подмножества $R_E^z(X)$.

Для отношений строгого $R_S^z(X)$ и нестрогого $R_N^z(X)$ предпочтений получим соответственно системы линейных неравенств и нормирующих условий вида

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(y) - \xi_i(x)]\lambda_i(z) < 0,\ (x,y) \in R_S^z(X),\ j = \overline{1,k},$$

$$\eta_{k+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i(z) = 1,\ \lambda_i(z) \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

где k – мощность подмножества $R_S^z(X)$;

$$\eta_j(\lambda) \equiv \sum_i [\xi_i(y) - \xi_i(x)]\lambda_i(z) \leq 0,\ (x,y) \in R_N^z(X),\ j = \overline{1,l},$$

$$\eta_{l+1}(\lambda) \equiv \sum_i \lambda_i(z) = 1,\ \lambda_i(z) \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (10)$$

где l – мощность подмножества $R_N^z(X)$.

Первые части систем (8)-(10) являются однородными подсистемами и задают множества плоскостей, проходящих через начало координат. Вторые их части (нормирующие условия) определяют секущую. Таким образом, выполняется условие Хаара и системы (8)-(10) в общем случае являются несовместными. Универсальным путем решения подобных систем является поиск так называемой чебышевской точки [7, 8]. Он позволяет свести исходные задачи к задачам линейного программирования.

Введя дополнительную переменную $\lambda_{n+1}(z)$ в систему (8), можно сформировать систему ограничений $|\eta_j(\lambda)| \leq \lambda_{n+1}(z)$, $j = \overline{1,m}$ в виде

$$-\eta_j(\lambda)+\lambda_{n+1}(z)\ge 0,\ \eta_j(\lambda)+\lambda_{n+1}(z)\ge 0,\ j=\overline{1,m},$$

$$\eta_{m+1}(\lambda)\equiv\sum_i\lambda_i(z)=1,\ \lambda_i(z)\ge 0,\ i=\overline{1,n+1}\ . \quad (11)$$

Задача минимизации $\lambda_{n+1}(z)\to\min$ в условиях ограничений (11) является типичной задачей линейного программирования и позволяет получить чебышевскую точку системы (8). Геометрически чебышевская точка $\lambda^o(z)$ в этом случае имеет наименьшее по модулю уклонение $|r|$ от всей системы плоскостей, описываемых уравнениями (8):

$$|r|=\min_{\lambda}\max_{j}|\eta_j(\lambda)|=\max_{j}|\eta_j(\lambda^o)|. \quad (12)$$

Введем дополнительную переменную $\lambda_{n+1}(z)$ в первые k ограничений системы (9) для бинарного отношения $R_S^z(X)$ и потребуем, чтобы выполнялись условия $\eta_j(\lambda)<\lambda_{n+1}(z)$, $j=\overline{1,k}$. Тогда отыскание чебышевской точки системы (9) сводится к задаче линейного программирования $\lambda_{n+1}(z)\to\min$ в условиях ограничений

$$-\eta_j(\lambda)+\lambda_{n+1}(z)>0,\quad j=\overline{1,k},$$

$$\eta_{k+1}(\lambda)\equiv\sum_i\lambda_i(z)=1,\ \lambda_i(z)\ge 0,\quad i=\overline{1,n+1}. \quad (13)$$

Если система (9) совместна, то $r=\min_{\lambda}\max_{j}\eta_j(\lambda)<0$ и полученное решение $\lambda^o(z)$ будет максимально устойчивым к возможным изменениям ее коэффициентов. Если же система (9) несовместна, то $r\ge 0$ и получаем чебышевское приближение, представляющее собой значение минимального уклонения для рассматриваемой системы. В этом случае для системы предпочтений, описываемой бинарным отношением $R_S^z(X)$, не существует ни одного вектора весовых коэффициентов частных критериев $\lambda(z)$, удовлетворяющего (9).

Подобным образом к задаче линейного программирования сводится задача поиска чебышевского решения (приближения) для отношения $R_N^z(X)$, определяющего системы линейных неравенств и ограничений вида (10). При этом если система является совместной, то $r\le 0$ и получим ее чебышевское решение. Для несовместной системы $r>0$ и получим ее чебышевское приближение.

Недостатком решений в виде чебышевской точки (решения или приближения) является их ориентация исключительно на экстремальные ограничения

$$\lambda^o(z)=\arg\min_{\lambda}\max_{j}\varphi_j(\lambda), \quad (14)$$

где $\varphi_j(\lambda)=\eta_j(\lambda)$ или $\varphi_j(\lambda)=|\eta_j(\lambda)|$. Альтернативой могут служить обобщенные решения систем (8)-(10), учитывающие удаление от всего множества ограничений. В частности, для отношения эквивалентности $R_E^z(X)$ в качестве решения системы (8) может быть выбран вектор с компонентами $\lambda_i^o(z)=\lambda_i^*(z)/\sum_i\lambda_i^*(z),\ i=\overline{1,n}$, являющимися решениями задачи

$$\lambda^*(z)=\arg\min_{\lambda}\|A\lambda(z)-b\|_2\ . \quad (15)$$

Здесь $\|A\lambda(z)-b\|_2$ – евклидова норма вектора невязки; $A=[a_{ij}]$ – матрица коэффициентов для системы (8), $a_{ji}=[\xi_i(y)-\xi_i(x)],\ j=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}$; j – номер пары (x,y) в подмножестве $R_E^z(X)$; $a_{m+1,i}=1$, $i=\overline{1,n}$; $\lambda(z)=[\lambda_i(z)]^T$; $b=[0,0,...,1]^T$. Задача (15) может быть сведена к задаче квадратичного математического программирования без ограничений вида

$$f=[(1-\sum_i\lambda_i(z))^2+\sum_j(\sum_i a_{ji}\lambda_i(z))^2]\to\min_{\lambda}, \quad (16)$$

решение которой не вызывает затруднений.

Аналогично по (15)-(16) могут быть определены компоненты вектора весовых коэффициентов $\lambda(z)$ для отношений строгого $R_S^z(X)$ и нестрогого $R_N^z(X)$ предпочтений на множестве альтернативных решений X. При этом для $R_N^z(X)$ элементы матрицы A определяются из условия

$$a_{ji}=[\xi_i(y)-\xi_i(x)],\ j=\overline{1,l},\ a_{l+1,i}=1,\quad i=\overline{1,n}, \quad (17)$$

где j,l – соответственно номер пары (x,y) и их количество в подмножестве $R_N^z(X)$.

Для отношения $R_S^z(X)$ элементами матрицы A являются

$$a_{ji}=[\xi_i(y)-\xi_i(x)],\ j=\overline{1,k},\ a_{k+1,i}=1,\quad i=\overline{1,n}, \quad (18)$$

где j,k – соответственно номер пары (x,y) и их количество в подмножестве $R_S^z(X)$.

Определив значения компонент вектора $\lambda(z)=[\lambda_i(z)]$, $i=\overline{1,n}$ для всех $z\in X$, получим окончательное решение задачи идентификации ФОП в виде аддитивной модели (7). Предложенная ФОП может быть применена для идентификации моделей вида (1). С этой целью используем на первом этапе для оценки полезности решения x ФОП с переменными весовыми коэффициентами $\lambda_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ и линейной ФП частных критериев $\bar{\xi}_i(x)$ вида (7). Затем методом компараторной идентификации по схеме, описанной выше, определим значения координат вектора весовых коэффициентов λ для модели вида (1) [8].

Исходя из предположения равенства полезностей решений $P(z)$ для всех $z \in X$ в смысле моделей (1) и (7), составим и решим систему линейных уравнений

$$\lambda_i \tilde{\xi}_{iz} = \lambda_i(z)\,\bar{\xi}_i(z), \quad z \in X, i = \overline{1,n} \qquad (19)$$

с неизвестными $\tilde{\xi}_{iz} = \xi_i(z)$.

Полученные решения

$$\tilde{\xi}_{iz} = \lambda_i(z)\,\bar{\xi}_i(z)/\lambda_i, \quad z \in X, i = \overline{1,n} \qquad (20)$$

являются исходными данными для решения задачи параметрической идентификации нелинейных ФП частных критериев общего вида $\xi_i(x)$. Решение такой задачи может быть сведено к решению задач минимизации выпуклой функции одной или двух переменных без ограничений [2].

Предложенный новый вид ФОП расширяет возможности моделирования процессов принятия и выбора многофакторных решений, снижая при этом сложность задачи идентификации модели. Ее применение существенно упрощает задачу идентификации ФП частных критериев для классической аддитивной модели общей полезности.

Литература: 1. *Петров Э.Г., Писклакова В.П., Бескоровайный В.В.* Территориально распределенные системы обслуживания. К.: Техника, 1992. 208 с. 2. *Петров Э.Г., Бескоровайный В.В., Писклакова В.П.* Формирование функций полезности частных критериев в задачах многокритериального оценивания // Радиоэлектроника и информатика. 1997. №1. С. 71-73. 3. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988. 208 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Вища шк., 1987. 170 с. 5. *Петров Э.Г.* Организационное управление городом и его подсистемами (методы и алгоритмы). Х.: Вища шк., 1986. 144 с. 6. *Овезгельдыев А.О., Петров К.Э.* Компараторная идентификация моделей интеллектуальной деятельности // Кибернетика и системный анализ. 1996. №5. С. 48-58. 7. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с. 8. *Бескоровайный В.В.* Идентификация параметров моделей многокритериального выбора решений // 4-я междунар. конф. "Теория и техника передачи, приема и обработки информации" ("Новые информационные технологии"); научные труды /ХТУРЭ, Харьков-Туапсе, 1998. С. 275-276.

Поступила в редколлегию 18.09.98

Рецензент: д-р техн. наук Нефедов Л.И.

Бескоровайный Владимир Валентинович, канд. техн. наук, доцент кафедры системотехники ХТУРЭ. Научные интересы: теория принятия решений; структурный синтез и оптимизация территориально рассредоточенных систем. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

УДК 519.853

МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА КРИВИЗНУ

ПЛЕХОВА А.А.

Ставится актуальная задача соединения двух точек в неодносвязной области трассой, на которую накладывается ограничение на кривизну. Строятся математическая модель этой задачи и алгоритм её решения, основанный на необходимых и достаточных условиях экстремума.

При проектировании промышленных объектов возникают задачи соединения в неодносвязных областях, связанные с оптимизацией размещения разного рода коммуникаций между зданиями и иными естественными препятствиями (например, водоемами). Важное место среди них занимает класс задач, где прямолинейные участки трасс должны проходить параллельно осям зданий – так называемые задачи манхеттеновой трассировки, причем во многих случаях использование класса ломаных оказывается недостаточным, как, например, при проектировании железнодорожных линий и некоторых типов трубопроводов, что требует вводить ограничение на кривизну.

1. Постановка задачи

На плоскости R^2 дана система координат Oxy. Рассмотрим неодносвязную область $F \subset R^2$ вида

$$F = C\lambda F_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i \quad ; C\lambda F_i \subset F_0 (i = 1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

где $F_i (i = 0,1,2,\ldots,n)$ – односвязные области, взаимно непересекающиеся при $i \ge 1$, границы которых составлены из ρ-ломаных, т.е. манхеттеновых [1] ломаных в F, образующих класс линий W. Длина этих линий определяется рассматриваемой далее метрикой

$$\rho(A.B) = |X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|, \qquad (2)$$

порождающей пространство R_1^2 [1].

Для описания трасс введем в рассмотрение [2] класс линий, составленных из отрезков, параллельных осям заданной декартовой системы координат Oxy и дуг окружности с угловой мерой $\pi/2$ и фиксированным радиусом r. Этот класс линий $\tilde{W}$ является естественным обобщением функционального класса W – манхеттеновых ломаных; поэтому, для определенности, назовем его квазиманхеттеновым. При этом считаем, что всякая линия $\omega \in \tilde{W}$ имеет стандартное представление в виде следующей последовательности:

$$\omega = s_1 c_1 s_2 c_2 \ldots c_{k-1}.s_k \;, (k \ge 1), \qquad (3)$$

где s_i – это ρ_1 – кратчайшая, т.е. отрезок в обычном смысле, параллельный одной из осей координат, а c_i – дуга окружности с угловой мерой $\pi/2$, для которой векторы касательных в концевых точках параллельны осям координат и по направлению (с точностью до знака) совпадают со смежными ρ_1 – кратчайшими, если имеются. Ясно, что длина этой дуги $\lambda(c_i)$ в