

МЕТОД ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

Одна из важных задач теории случайных процессов, имеющая многочисленные практические применения, заключается в следующем: требуется наилучшим образом оценить значение случайной величины b через значения величины b_a ($a \in A$). Речь идет об отыскании функции $f(b_a/a \in A)$, зависящей от b_a , $a \in A$, с наименьшей ошибкой, удовлетворяющей приближенному равенству $b \approx \hat{b} = f(b_a/a \in A)$ (1). В качестве примера можно рассмотреть прогноз (экстраполяцию) случайного процесса, когда необходимо оценить значение случайной величины в момент времени t по его значениям на некотором множестве моментов времени T , предшествовавших t [1]. При этом критерий оптимального наилучшего приближения зависит от практического характера рассматриваемой задачи. В теории линейного предсказания в качестве указанного критерия используют критерий минимальной среднеквадратической ошибки, заключающийся в выборе параметров (коэффициентов) предсказания, минимизирующих среднюю мощность сигнала ошибки экстраполяции $\delta^2 = M[(b - \hat{b})^2]$ (2). Некоторые методы прогнозирования и предсказатели, обеспечивающие минимальное значение δ^2 , приведены в работе [2].

Рассматривается метод экстраполяции случайного сигнала, обладающего ограниченным спектром, который можно использовать при построении систем управления и связи, обладающих запаздыванием, и позволяет уменьшить значение среднеквадратической ошибки прогноза. Суть прогнозирования основана на выборе в качестве предсказателя устройства с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{2}{1 + e^{-j2\omega\tau}}, \quad (3)$$

где τ — время прогноза. Выражение (3) запишем таким образом:

$$K(j\omega) = \frac{e^{+j\omega\tau}}{\cos \omega\tau}. \quad (4)$$

Числитель выражения (4) соответствует передаточной функции «идеального» экстраполятора, а знаменатель определяет ошибку прогноза, которая будет иметь периодический характер и явно выраженный максимум на критической частоте. Чтобы обеспечить минимальную ошибку прогноза в области эффективной ширины спектра случайного сигнала, время прогноза τ надо выбирать достаточно малым (в этом случае знаменатель в выражении (4) близок к единице), что не всегда соответствует требуемому. В то же время выбор достаточно малого значения времени прогноза и использование n последовательно соединенных устройств с передаточной функцией (3) позволяют обеспечить

заданное время прогноза $\tau_3 = n\tau$ и минимизировать ошибку прогноза в области эффективной ширины спектра прогнозируемого сигнала. Тогда передаточная функция устройства имеет вид

$$K(j\omega) = \frac{e^{+j\omega n\tau}}{\cos^n \omega\tau}. \quad (5)$$

Устройство с передаточной функцией (5) обеспечивает минимум ошибки прогноза в области низких частот, достигая на критической частоте большого значения. Теоретические расчеты показали, что наилучшие результаты достигаются при следующей передаточной функции (3):

$$K(j\omega) = \frac{2A(\omega)}{1 + A(\omega)e^{-j2\omega\tau}}, \quad (6)$$

где $A(\omega)$ — некоторая периодическая функция, по своему значению не превышающая на периоде единицы. Один из вариантов определения $A(\omega)$ можно представить как $A(\omega) = a \cos 2\omega\tau + b$ (7). Однако устройство с передаточной функцией (6) в случае, когда $A(\omega)$ определяется (7), не может быть реализовано физически.

Устройство с передаточной функцией (5) позволяет обеспечить минимум среднеквадратической ошибки прогноза в области эффективной ширины спектра случайного сигнала, может быть физически реализовано, но, как отмечалось, оно дает большое значение спектральной плотности ошибки прогноза на критической частоте. Максимум спектральной плотности ошибки прогноза при $\tau_3 = \text{const}$ можно «сдвинуть» вправо в область более высоких частот путем увеличения параметра n . Такой «сдвиг» максимума спектральной плотности ошибки прогноза позволяет разнести его по частоте с максимумом спектральной плотности прогнозируемого сигнала и использовать их взаимнофильтрующие свойства. Как видно из выражения (4), взаимной фильтрации не будет на критической частоте, когда знаменатель равен нулю. Чтобы избежать этого, предлагается синтезировать устройство с передаточной функцией

$$K(j\omega) = \frac{d}{1 + B},$$

где

$$B = \begin{cases} e^{-j2\omega\tau}, & 0 < \omega < \omega_1; \\ D & \omega_1 < \omega < \omega_2; \end{cases} \quad (8)$$

d, D — некоторые постоянные коэффициенты. Значение ω_2 должно быть больше эффективной ширины спектра прогнозируемого сигнала.

Возникает задача синтеза устройства, которое бы имело передаточную функцию (8). Решить ее можно с помощью метода наименьших квадратов, аппроксимируя передаточную функцию (8) выражением

$$K_1(j\omega) = \frac{\sum_{l=0}^N a_l e^{-j l \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}. \quad (9)$$

Тогда задачу синтеза устройства с передаточной функцией (8) сформулируем так: найти значения коэффициентов a_i и b_k выражения (9), которые бы минимизировали целевую функцию

$$F = \int_0^{\omega_1} \left| e^{-j2\omega\tau} - \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau}} \right|^2 d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| D - \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau}} \right|^2 d\omega. \quad (10)$$

Подынтегральное выражение в (10) представлено в виде дроби, в числителе и знаменателе которой стоят суммы по параметрам i и k соответственно. Минимизировать целевую функцию (10) достаточно сложно. Поэтому в некоторых случаях используют замену минимизации целевой функции (10) максимизацией другой функции:

$$F_1 = \int_0^{\omega_1} \left| \left(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau} \right) (1 - e^{-j2\omega\tau}) + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau} \right|^2 d\omega + \\ + \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left| \left(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-jk\omega\tau} \right) (1 - D) + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j\omega\tau} \right|^2 d\omega. \quad (11)$$

Проинтегрировав выражение (11) и взяв частные производные по a_i и b_k , получим

$$\frac{dF_1}{da_i} = D \frac{\sin i\omega_2\tau - \sin i\omega_1\tau}{i\tau} + \frac{\sin(i-2)\omega_1\tau}{(i-2)\tau} - \sum_{s=0}^N a_s \frac{\sin(i-s)\omega_2\tau}{(i-s)\tau} + \\ + \sum_{k=1}^M b_k \left(\frac{\sin(i-k-2)\omega_1\tau}{(i-k-2)\tau} + D \frac{\sin(i-k)\omega_2\tau - \sin(i-k)\omega_1\tau}{(i-k)\tau} \right); \\ \frac{dF_1}{db_k} = (1-D^2) \left(\frac{\sin k\omega_2\tau - \sin k\omega_1\tau}{k\tau} + \sum_{n=1}^M b_n \frac{\sin(k-n)\omega_2\tau - \sin(k-n)\omega_1\tau}{(k-n)\tau} \right) + \\ + \sum_{i=0}^N a_i \left(\frac{\sin(i-k-2)\omega_1\tau}{(i-k-2)\tau} + D \frac{\sin(i-k)\omega_2\tau - \sin(i-k)\omega_1\tau}{(i-k)\tau} \right).$$

Коэффициенты a_i , b_k найдем, решив систему линейных уравнений

$$\frac{dF_1}{da_i} = 0; \quad \frac{dF_1}{db_k} = 0. \quad (12)$$

Тогда выражение для передаточной функции экстраполятора представим как

$$K(j\omega) = \frac{d}{1 + \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}}. \quad (13)$$

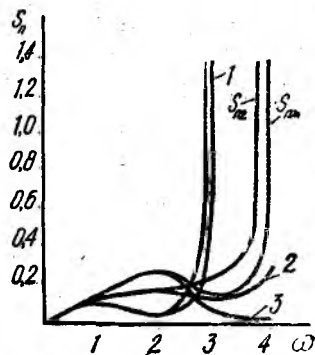
Проанализируем, как изменяется значение среднеквадратической ошибки прогноза, которая определяется выражением

$$\delta^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| e^{+j\omega\tau} - \left(\frac{d^n}{1 + \frac{\sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau}}} \right)^n \right|^2 S(\omega) d\omega, \quad (14)$$

где $S(\omega)$ — спектральная плотность прогнозируемого сигнала. Квадрат модуля подынтегрального выражения однозначно определяет ошибку прогноза синтезированного устройства в сравнении с «идеальным» экстраполятором. Для нахождения зависимости среднеквадратической ошибки прогноза исследуем квадрат модуля подынтегрального выражения, обозначив его как спектральную плотность ошибки прогноза $S_n(\omega)$. После несложных преобразований выражение для спектральной плотности ошибки прогноза в формуле (14) представим как

$$S_n(\omega) = \left| \frac{(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau} + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau}) e^{+j\omega\tau} - d^n (1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau})^n}{(1 + \sum_{k=1}^M b_k e^{-j k \omega \tau} + \sum_{i=0}^N a_i e^{-j i \omega \tau})^n} \right|^2. \quad (15)$$

Чтобы привести выражение (15) к виду, удобному для решения, необходимо воспользоваться формулой бинома Ньютона. Дальнейшие преобразования выражения для спектральной плотности ошибки прогноза из-за их громоздкости опустим. Результаты вычислений спектральной плотности ошибки прогноза представлены в виде графиков на рисунке для случаев $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ (16). Как видно из графиков, максимум спектральной плотности ошибки прогноза с ростом параметра n сдвигается вправо по оси частот, что позволяет обес-



печить эффективное прогнозирование сигналов со спектральной плотностью, определяемой выражением:

$$S(\omega) = \begin{cases} B, & 0 < \omega < \omega_0; \\ \frac{B}{B + (\omega - \omega_0)^n}, & \omega_0 < \omega < \omega_1, \end{cases} \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (17)$$

При этом значения среднеквадратической ошибки прогноза для сигналов со спектральной плотностью (17) и условий (16) при $B = 1$, $n = 6$, $\omega_0 = 2$ определяются площадями под кривыми 1, 2, 3 соответственно. На максимум спектральной плотности и ошибки прогноза влияет параметр D выражения (8). Его значения лежат в пределах от нуля до единицы. С ростом D максимальное значение спектральной плотности ошибки прогноза уменьшается. Выбирать значения параметра необходимо с учетом характера спектральной плотности прогнозируемого сигнала, так как одновременно с уменьшением максимального значения спектральной плотности ошибки прогноза происходит увеличение его значений в области низких частот. Это можно увидеть, проанализировав значения спектральной плотности ошибки прогноза, представленные в таблице для случая $N = M = 5$, $T = 1$ с при различных значениях параметра D .

D	Значения спектральной плотности ошибки прогноза $S(\omega)$							
	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\omega = 4$	$\omega = 5$	$\omega = 6$	$\omega = 7$
0,1	0,00	0,10	0,04	4,71	385	6316	4555	505
0,3	0,02	0,09	0,10	4,06	356	2519	1338	183
0,5	0,03	0,29	0,21	3,46	280	927	476	89
0,6	0,04	0,36	0,29	3,20	232	563	300	69
0,7	0,05	0,44	0,38	3,01	185	346	195	58
0,8	0,06	0,53	0,48	2,91	143	216	129	50

Таким образом, предложенный метод прогнозирования непрерывного случайного сигнала с ограниченным спектром позволяет уменьшить значение среднеквадратической ошибки прогноза в результате разнесения максимумов спектральной плотности сигнала и ошибки прогноза.

Список литературы: 1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., 1965. 654 с. 2. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. Справочник. М., 1985. 311 с. 3. Гольденберг Л. М., Поляк М. Н., Берестецкий А. А. Проектирование цифрового корректора АЧХ на основе метода наименьших квадратов // Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29, № 1. С. 8—12.

Поступила в редколлегию 15.04.88

УДК 621.391

Ю. В. СТАСЕВ, канд. техн. наук

СОСТАВНЫЕ ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ С МАЛЫМИ ПЕРВЫМИ ПИКАМИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИИ

При построении синхронных адресных систем связи (САСС) для кодового разделения каналов применяются ортогональные системы