

УПРАВЛЕНИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ ИСЗ С ПОМОЩЬЮ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ ГИРОДИНОВ

Розглядається один з головних режимів роботи системи управління ІСЗ - управління переорієнтацією, метою якого є визначення швидкості прецесії кожного гиродинна при надлишкової кількості гиродинів та обмежуванні швидкості прецесії. Пропонується засіб, заснований на вирішенні мінімаксної задачі, яка приводиться до задачі лінійного програмування.

Рассматривается задача управления переориентацией ИСЗ, моделируемого как твердое тело, с помощью минимально избыточной системы гиродинов (ГД), представленной на рисунке 1.

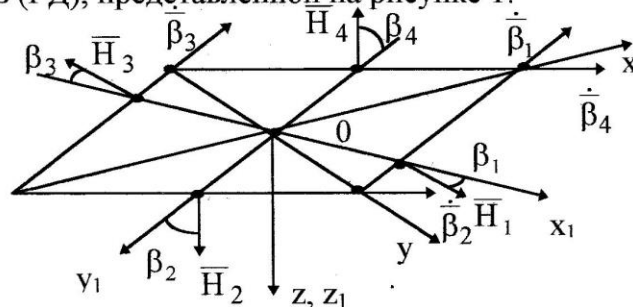


Рисунок 1

Минимально избыточная система гиродинов
(компланарная схема компоновки типа «ромб»)

Динамика углового движения ИСЗ описывается дифференциальными уравнениями [1]

$$\dot{\Lambda} = (\Lambda \circ \bar{\omega}) / 2; \quad (1)$$

$$I\dot{\bar{\omega}} + (\bar{\omega} \times I\bar{\omega}) = \bar{M}, \quad (2)$$

где Λ - кватернион ориентации ИСЗ; $\bar{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения ИСЗ в проекциях на связанные с ним оси; I - матрица моментов инерции ИСЗ; \bar{M} - управляющий момент (внешним возмущающим моментом пренебрегаем); \circ - знак кватернионного умножения.

Решение данной задачи управления может быть разбито на два этапа. Первый этап состоит в определении программного управляющего момента \bar{M}^* , обеспечивающего за заданное время T перевод вектора состояния из начального положения в определенным образом заданное конечное (в общем случае при ненулевых начальной и конечной угловой скорости):

$$\{\bar{\omega}_0, \Lambda_0\} \xrightarrow{T} \{\bar{\omega}_T, \Lambda_T\}. \quad (3)$$

Второй этап заключается в нахождении скорости прецессии каждого гироспина в условиях избыточного числа гироспинов и ограничений на скорость прецессии

$$|\dot{\bar{\beta}}_i| \leq \dot{\beta}_{\max} \quad (i = \overline{1,4}). \quad (4)$$

Определяемый программный управляющий момент реализуется по программно задаваемой траектории вращения. Для построения программной траектории используется кватернионная кинематическая модель сферического типа [2]

$$\Lambda^* = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3; \quad (5)$$

$$\Lambda_i = \cos(\psi_i/2) + \bar{b}_i \cdot \sin(\psi_i/2) \quad (i = \overline{1,3}); \quad (6)$$

Данной кинематической модели соответствуют модельная угловая скорость, модельное угловое ускорение и искомый программный управляющий момент:

$$\bar{\omega}^* = 2 \cdot (\tilde{\Lambda}^* \circ \dot{\Lambda}^*); \quad (7)$$

$$\dot{\bar{\omega}}^* = 2 \cdot (\dot{\tilde{\Lambda}}^* \circ \dot{\Lambda}^* + \tilde{\Lambda}^* \circ \ddot{\Lambda}^*); \quad (8)$$

$$\bar{M}^* = I \dot{\bar{\omega}}^* + (\bar{\omega}^* \times I \bar{\omega}^*). \quad (9)$$

Здесь \bar{b}_i - единичные векторы, определяемые выражениями

$$\bar{b}_3 = \frac{\bar{\omega}_K}{|\bar{\omega}_K|}; \quad \bar{b}_2 = \frac{(\Lambda_0 \circ \bar{b}_3 \circ \tilde{\Lambda}_0) \times \bar{b}_3}{|(\Lambda_0 \circ \bar{b}_3 \circ \tilde{\Lambda}_0) \times \bar{b}_3|}; \quad \bar{b}_1 = \bar{b}_3 \times \bar{b}_2; \quad (10)$$

$\psi_i(t)$ - опорные функции, выбираемые в виде полиномов времени

$$\psi_i(t) = a_{0i} + a_{1i}t + a_{2i}t^2 + a_{3i}t^3; \quad \dot{\psi}_i(t) = a_{1i} + 2a_{2i}t + 3a_{3i}t^2, \quad i = \overline{1,3}; \quad (11)$$

Порядок полиномов обусловлен количеством граничных условий и связан с типом режима управляемого вращения. Из краевых условий (3) задачи управления вращением ИСЗ получены выражения для краевых значений опорных функций $\bar{\psi}(t)$ и их производных $\dot{\bar{\psi}}(t)$. Для случая трехосной переориентации ИСЗ эти краевые значения определяются выражениями

$$\begin{aligned} \psi_{10} &= 0; \quad \psi_{30} = 2 \arctg[(\bar{\lambda}_0, \bar{b}_3) / \lambda_0]; \\ \psi_{20} &= 2 \arcsin(\bar{\lambda}_0, \bar{b}_2''), \quad \text{где } \bar{b}_2'' = \sin(\psi_{30}/2) \bar{b}_2 - \cos(\psi_{30}/2) \bar{b}_1; \\ \dot{\psi}_{10} &= (\bar{\omega}_0, \bar{b}_1') / \cos \psi_{20}, \quad \text{где } \bar{b}_1' = \sin \psi_{30} \bar{b}_2 + \cos \psi_{30} \bar{b}_1; \\ \dot{\psi}_{20} &= (\bar{\omega}_0, \bar{b}_2'), \quad \text{где } \bar{b}_2' = \sin \psi_{30} \bar{b}_2 - \cos \psi_{30} \bar{b}_1; \\ \dot{\psi}_{30} &= (\bar{\omega}_0, \bar{b}_3) + \sin \psi_{20} \cdot \dot{\psi}_{10}. \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициенты полиномиальных опорных функций обеспечивают выполнение краевых условий (3) задачи управляемого вращения ИСЗ и, исходя из вида (11) и краевых значений (12) опорных функций и их производных, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_{0i} = \psi_{iO}; \quad a_{2i} &= \frac{3 \cdot [\psi_{iT} - \psi_{iO}] - T \cdot [2\dot{\psi}_{iO} + \dot{\psi}_{iT}]}{T^2}, \\ a_{1i} = \dot{\psi}_{iO}; \quad a_{3i} &= \frac{2 \cdot [\psi_{iO} - \psi_{iT}] + T \cdot [\dot{\psi}_{iO} + \dot{\psi}_{iT}]}{T^3}, \end{aligned} \quad i = \overline{1,3}. \quad (13)$$

Найденный на первом этапе программный управляющий момент (9) непосредственно связан с изменением суммарного кинетического момента системы гиродинов соотношением

$$\dot{\bar{H}}_{\Sigma} = -A^{-1} \cdot \left[\bar{M}^* + (\bar{\omega} \times A \cdot \bar{H}_{\Sigma}) \right], \quad (14)$$

где A - матрица взаимосвязи прямоугольной $Oxyz$ и косоугольной $Ox_1y_1z_1$ систем координат (см. рис. 1).

Итак, зная суммарный кинетический момент системы гиродинов

$$\bar{H}_{\Sigma} = \begin{bmatrix} H \cdot \cos \alpha \cdot (\cos \beta_1 - \cos \beta_2 - \cos \beta_3 + \cos \beta_4) \\ H \cdot \sin \alpha \cdot (\cos \beta_1 + \cos \beta_2 - \cos \beta_3 - \cos \beta_4) \\ H \cdot (\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 - \sin \beta_4) \end{bmatrix}; \quad (15)$$

и его изменение (14), можно получить управляющий момент системы гиродинов

$$\bar{M}_{\Sigma} = -A \dot{\bar{H}}_{\Sigma} - (\bar{\omega} \times A \cdot \bar{H}_{\Sigma}). \quad (16)$$

Однако, прежде необходимо определить скорость прецессии гиродинов, которая непосредственно связана с изменением суммарного кинетического момента системы гиродинов следующим соотношением

$$H \cdot L(\beta) \cdot \dot{\beta} = \dot{\bar{H}}_{\Sigma}, \quad (17)$$

где H - модуль собственного кинетического момента одного ГД;

$L(\beta)$ - матрица Грамма, определяемая следующим выражением

$$L(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial \beta_1} & \frac{\partial H_x}{\partial \beta_2} & \frac{\partial H_x}{\partial \beta_3} & \frac{\partial H_x}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial H_y}{\partial \beta_1} & \frac{\partial H_y}{\partial \beta_2} & \frac{\partial H_y}{\partial \beta_3} & \frac{\partial H_y}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial H_z}{\partial \beta_1} & \frac{\partial H_z}{\partial \beta_2} & \frac{\partial H_z}{\partial \beta_3} & \frac{\partial H_z}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \beta_4}{\partial \beta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \beta_1 & \sin \beta_2 & \sin \beta_3 & -\sin \beta_4 \\ -\sin \beta_1 & -\sin \beta_2 & \sin \beta_3 & \sin \beta_4 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & -\cos \beta_3 & -\cos \beta_4 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Уравнение (17) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, являющуюся избыточной по числу переменных. С этой целью вводится функционал

$$\min(\dot{\beta}, \ddot{\beta}) \quad (19)$$

и с учетом ограничения (17) искомая скорость прецессии гироскопов определяется выражением

$$\dot{\beta} = \frac{1}{H} \cdot (L^T \cdot L)^{-1} \cdot L^T \cdot \dot{H}_\Sigma. \quad (20)$$

Недостатком данного подхода к нахождению скоростей прецессии гироскопов является возможность вырождения матрицы $L^T \cdot L$, что может привести к росту требуемой скорости прецессии. В связи с этим предлагается способ, в основе которого лежит решение минимаксной задачи

$$\min_{\dot{\beta}} \max_i |\dot{\beta}_i| \quad (i = \overline{1,4}), \quad (21)$$

решаемой с учетом условий (17) и ограничений (4) на скорости прецессии гироскопов.

Преобразуем соотношение (17) к виду

$$\ddot{\beta} = Y^{-1} \cdot (\bar{b} - P \cdot \dot{\beta}_n), \quad (22)$$

где $\dot{\beta}_n = \dot{\beta}_1$; $\ddot{\beta} = \text{col} \{ \dot{\beta}_i \} \quad (i = \overline{2,4})$; $\bar{b} = \frac{\dot{H}_\Sigma}{H}$;

Y и P - соответствующие блоки матрицы Грамма L :

$$Y = \begin{bmatrix} \sin \beta_2 & \sin \beta_3 & -\sin \beta_4 \\ -\sin \beta_2 & \sin \beta_3 & \sin \beta_4 \\ \cos \beta_2 & -\cos \beta_3 & -\cos \beta_4 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} -\sin \beta_1 \\ -\sin \beta_1 \\ \cos \beta_1 \end{bmatrix}.$$

Выбор независимой переменной $\dot{\beta}_n$ в соотношении (22) связан с определением матрицы Y , для которой должно выполняться условие $\text{rg} Y = 3$.

Выражение (22), расписанное покомпонентно, приводится к виду

$$\dot{\beta}_{i+1} = c_{i0} + c_{i1} \cdot \dot{\beta}_1 \quad (i = \overline{2,4}). \quad (23)$$

С учетом этого задача (21) сводится к выражению

$$\min_{\dot{\beta}} \max \left\{ |\dot{\beta}_1|, |c_{10} + c_{11} \cdot \dot{\beta}_1|, |c_{20} + c_{21} \cdot \dot{\beta}_1|, |c_{30} + c_{31} \cdot \dot{\beta}_1| \right\}. \quad (24)$$

Путем введения новых переменных Z_1 и Z_2 , определяемых соотношениями

$$Z_1 = \dot{\beta}_n; \quad Z_2 = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

минимаксная задача (24) преобразуется к виду

$$\min_{Z_1} Z_2. \quad (26)$$

Таким образом, исходная задача (21) сводится к задаче линейного программирования (ЗЛП) (26) при следующих ограничениях

$$\begin{cases} Z_2 \geq Z_1; \\ Z_2 \geq -Z_1; \\ Z_2 \geq C_{i0} + C_{i1} \cdot Z_1; \\ Z_2 \geq -C_{i0} - C_{i1} \cdot Z_1. \end{cases} \quad (i = \overline{1,3}) \quad (27)$$

$$\begin{cases} Z_2 \leq \Delta, \\ Z_2 \geq -\Delta. \end{cases} \quad (\Delta = \dot{\beta}_{\max}) \quad (28)$$

Полученная задача может быть решена с помощью симплекс-метода. Геометрическая интерпретация решения данной задачи линейного программирования приведена на рисунке 2.

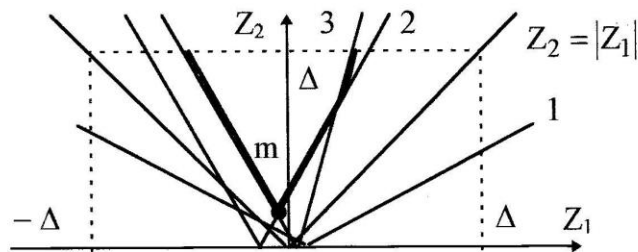


Рисунок 2
Геометрическая интерпретация решения ЗЛП
прямые $i: Z_2 = |C_{i0} + C_{i1} \cdot Z_1|$ ($i = \overline{1,3}$)
 m - точка минимума Z_2

Из рисунка 2 видно, что точка m является решением приведенной задачи линейного программирования.

Таким образом, использование критерия (21) позволяет осуществить определение скорости прецессии каждого гиродин, являющейся целью управления переориентацией ИСЗ с помощью избыточной системы гиродинов. Данный критерий может быть использован не только для случая компланарной схемы компоновки гиродинов, но и для других возможных схем.

Список литературы: 1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. - М.: Наука, 1973. - 320 с. 2. Фролов Ю.А., Успенский В.Б. Построение траектории разворота твердого тела // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. - 1993. - Т. 17, № 12. - С. 11-13.

Поступила в редколлегию 10.05.99