УДК 681.142.2; 622.02.658.284; 621.325

ЗАДАЧА ФАКТОРИЗАЦІЇ ПРОСТОРІВ, ВИЗНАЧЕНИХ НА ТОПОЛОГІЯХ ЗОБРАЖЕНЬ

Д.Д. Пелешко[1], Ю.М.Рашкевич[2]

[1] НУ ЛП, м. Львів, Україна, peleshko@polynet.lviv.ua;
[2] НУ ЛП, м. Львів, Україна, rashkev@polynet.lviv.ua

Формалізовано задачу факторизації топологічного колірного простору рисунка та набору рисунків. Сформульовано поняття майже фактор простору та сформульовано задачу майже факторизації топологічного колірного простору зображень та наборів зображень.

ЗОБРАЖЕННЯ, НАБІР ЗОБРАЖЕНЬ, ТОПОЛОГІЯ, ФАКТОР ПРОСТІР, ФАКТОРИЗАЦІЯ, МЕТРИКА, НАПІВМЕТРИКА, МНОЖИНА МІРИ НУЛЬ, МАЙЖЕ ФАКТОРИЗАЦІЯ

Вступ

Дуже часто на практиці вирішення задачі обробки зображення розпочинається із визначення дій при заданому розбитті зображення. При цьому питання існуванння цього розбиття, його повнота і інше практично не розглядаються. Проте побудова та існування розбиття є окремою топологічною задачею формування покриття, а в загальному випадку – організації топологій. Іншими словами це є топологічна задача, яка потребує власного обґрунтування. І її успішне вирішення багато в чому визначає успішність вирішення подальших прикладних задач.

Для методів практичної обробки сигналів окрім задачі формування топології є ще одна важлива задача, а саме – операції над цим покриттям. Тут найважливішою задачею виступає задача факторизації за заданим відношенням еквівалентності простору покриття зображення.

1. Постановка задачі

Метою даної роботи є формалізація задачі факторизації колірного топологічного простору зображення та наборів зображень для подальшої розробки прикладних методів цифрової обробки зображень та наборів зображень.

Для досягнення цієї мети потрібно ввести метрику і дослідити її властивості, зокрема здатність виражати відношення еквівалентності.

2. Представлення рисунка та набору рисунків

Дискретне представлення кожного цифрового зображення P (надалі просто зображення) є відображенням скінченного дискретного набору значень з $\mathbf{N}^{2,+}$. Функцію C можна записати у вигляді

$$C:\mathbf{X}^{2,+,d} \to Q^d, \tag{1}$$

де $\mathbf{X}^{2,+,d} \subset \mathbf{N}^{2,+}$ – двовимірний топологічний многовид [6] як хаусдорфовий топологічний підпростір [1, 10] евклідового простору $\mathbf{N}^{2,+}$ [9, 10]; $Q^d \subset Color$ – замкнені обмежені підмножини просторів $\mathrm{N}^{2,+}$ та *Color* відповідно, які є вимірними за Жорданом [1, 9]. Зважаючи на зліченність просторів $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}^{2,+}$, $\mathbf{X}^{2,+,d}$ та Q^d є також зліченними [1, 9].

Область визначення функції C, а саме підмножину $\mathbf{X}^{2,+,d}$, будемо називати координатним (піксельним) представленням рисунка, а область значень Q^d – колірним. Фактично рисунок P є набором значень кольору (результату дії функції C) в точках-пікселах області $\mathbf{X}^{2,+,d}$ із власними невід'ємними координатами.

Фізичні розміри рисунка P визначаються розмірами області $\mathbf{X}^{2,+,d}$. У більшості випадків область $\mathbf{X}^{2,+,d}$ є прямокутником. Тому її можна подати у вигляді

$$\mathbf{X}^{2,+,d} = \left\{ dtp_{i,j} = (i,j) \,|\, i = \overline{1,l} \wedge j = \overline{1,h} \right\}, \tag{2}$$

де $l,h \in \mathbf{N}^+$ – довжина та висота рисунка P.

У разі розгляду набору з N рисунків (1) та (2) видозмінюються як:

$$\mathbf{P} = \left\{ P_z : \, P_z = C_z\left(\mathbf{X}_z^{2,+,d}\right) \right\}_{z=1..N}, \tag{3}$$

де

$$C_z : \mathbf{X}_z^{2,+,d} \to Q_z^d, \;\; z = \overline{1,N}\,; \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_z^{2,+,d} &= \left\{ dtp_{z,i,j} = (i,j) \,|\, i = \overline{1,l_z} \wedge j = \overline{1,h_z} \right\}, \\ &\forall z : l_z, h_z \in \mathbf{N}^+. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут через $\mathbf{P}$ позначається набір з N рисунків P_z, а $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ – область визначення функції C_z, z-го рисунка P_z.

3. Топології зображення та наборів зображень

3.1. Формування топології в координатній області зображень та наборів зображень

Зважаючи на "прямокутність" та дискретність $\mathbf{X}^{2,+,d}$, розглянемо сім'ю підмножини $\mathbf{X}_{frm}^{2,+,d} \subseteq \mathbf{X}^{2,+,d}$,

$$\Im_{X^{2,+,d}} = \left\{ \mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d} \,|\, \mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d} \subseteq \mathbf{X}^{2,+,d} \right\}_{m\ge 1}, \tag{6}$$

які також будуть прямокутними дискретними областями і називатимемо їх *фреймами*.

Кожен $\mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d}$ визначається координатами початку (верхнього лівого кута), тобто геометричними координатами зміщення початку фрейму відносно початку зображення:

$$\begin{cases} x_{\text{поч } m} = x(\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}) = x_{\text{поч}} + \Delta_{x\,m}; \\ y_{\text{поч } m} = y(\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}) = y_{\text{поч}} + \Delta_{y\,m}, \end{cases} \quad (7)$$

де $x_{\text{поч } m}, y_{\text{поч } m}$ – координати початку $X^{2,+,d}$; Δ_{xm} і $\Delta_{y\,m}$ – зміщення початку фрейму $\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}$ відносно початку $\mathbf{X}^{2,+,d}$ в напрямках *x* та *y* відповідно. Іншими характеристиками фрейму виступають його довжина $l_{\text{fr}m} = l_{X_{\text{fr}m}^{2,+,d}} \in \mathbf{N}^{+}$ та висота $h_{\text{fr}m} = h_{X_{\text{fr}m}^{2,+,d}} \in \mathbf{N}^{+}$. Це означає, що $\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}$ є деякою функцією від початку, довжини та висоти, яку зважаючи на (5) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d} &= \mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}\left(x_{\text{поч } m}, y_{\text{поч } m}, l_{frm}, h_{frm}\right) = \\ &= \mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}\left(\Delta_{x\,m}, \Delta_{y\,m}, l_{\text{fr}m}, h_{\text{fr}m}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Набір $\Im_{X^{2,+,d}}$ виступає топологією простору $\mathbf{X}^{2,+,d}$, а $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{X^{2,+,d}}\right)$ – топологічним дискретним простором. Оскільки $\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}$ є фреймом, то $\Im_{X^{2,+,d}}$ будемо називати *фреймовою топологією.*

На $\mathbf{X}^{2,+,d}$ можна ввести дискретну метрику

$$\begin{aligned} &d_{X^{2,+,d},dis}\left(dtp_{i_1,j_1}, dtp_{i_2,j_2}\right) = \\ &= \begin{cases} 1, dtp_{i_1,j_1} \neq dtp_{i_2,j_2}; \\ 0, dtp_{i_1,j_1} = dtp_{i_2,j_2}, \end{cases} \quad dtp_{i_1,j_1}, dtp_{i_2,j_2} \in \mathbf{X}^{2,+,d}. \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{X^{2,+,d}}\right)$ є метричним дискретним простором. Зазначимо, що $\Im_{X^{2,+,d}}$ є дискретною топологією, оскільки вона індукується дискретною метрикою (9). Дискретність метрики (9) визначена в [7].

Підмножина $\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}$ виступає *відкритою підмножиною – точкою простору* $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right)$. Тобто топологію $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$ на множині $\mathbf{X}^{2,+,d}$ задаємо системою замкнених множин.

При розгляді набору зображень можливі два випадки.

1) В загальному випадку кожен рисунок набору володіє власним топологічним простором $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right)$. В такому випадку фреймову топологію набору $\mathfrak{I}_{\mathbf{P}}$ складає набір топологій

$$\mathfrak{I}_{\mathbf{P}} = \left\{\Im_z\right\}_{z=1..N}, \quad \Im_z = \Im_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}}, \quad (10)$$

який будемо називати *вектором фреймових топологій*. Покриття, які входять до кожного $\Im_z$, в загальному випадку є різними, але можуть і співпадати.

Якщо з кожного $\Im_z$ вибрати строго по одному покриттю і сформувати набір, то можна говорити про *фреймове покриття набору*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{P}} = \left\{\chi_z\right\}_{z=1..N}, \\ &\left(\chi_z \mid N_{\chi_z}\right) = \left(\chi_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}} \mid N_{\chi_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}}}\right) \subseteq \Im_z \in \mathfrak{I}_{\mathbf{P}}, \end{aligned} \quad (11)$$

який, подібно до (10) будемо називати вектором фреймових покриттів. Зазначимо, що розмірність кожного може χ_z бути різною.

2) У другому випадку усі рисунки набору володіють однаковим координатним многовидом $\mathbf{X}^{2,+,d}$. Тоді $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$ виступає фреймовою топологією набору $\mathfrak{I}_P$. Фактично (10) вироджується у

$$\mathfrak{I}_{\mathbf{P}} = \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}. \quad (12)$$

У другому випадку в практичних задачах (зокрема у випадках однотипних зображень) на топології $\Im_{X^{2,+,d}}$ для кожного рисунка набору вводять власні покриття, які можуть не співпадати між собою. Іншими словами, має місце

$$\exists z_1, z_1 \in [1;N]: \ \chi_{z_1} \neq \chi_{z_2}, \ \chi_{z_1} \subseteq \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}, \chi_{z_2} \subseteq \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}, \quad (13)$$

де χ_{z_1} – z_1-е покриття простору $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right)$ для z_1-го рисунка розмірністю $N_{\chi_{z_1}}$ фреймів. χ_{z_2} – аналогічно до χ_{z_1} покриття z_2-го рисунка. У загальному випадку кількість фреймів в покриттях χ_z може не співпадати, тобто має місце $N_{\chi_{z_1}} \neq N_{\chi_{z_2}}$. Розмірність фреймів незалежно від того, чи вони належать одному покритті чи різним покриттям фреймого покриття, $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{P}}$ також може відрізнятись

$$\begin{aligned} &\exists m_1 \in \left[1; N_{\chi_{z_1}}\right] \cap \left[1; N_{\chi_{z_2}}\right]: \\ &\mathbf{X}_{\text{fr}\,z,m}^{2,+,d} \in \chi_{z_1} \wedge \mathbf{X}_{\text{fr}\,z,m}^{2,+,d} \notin \chi_{z_2}, \quad \chi_{z_2}, \chi_{z_1} \in \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Фреймове покриття набору у цьому випадку буде складатись з *N* різних покриттів топології $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$, тобто замість (11) маємо

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{P}} = \left\{\chi_z \mid N_{\chi_z}\right\}_{z=1..N}, \ \chi_z \subseteq \mathfrak{I}_{\mathbf{P}} = \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}. \quad (15)$$

3.2. Формування топології наборів зображень в просторі кольору

Зважаючи на існування $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right)$, (1) можна записати у вигляді

$$C: \chi' \to Q^d. \quad (16)$$

Беручи до уваги (2.7) та (3.9), оператор (3.25) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} &C = \left\{C_m : \mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d} \to Q_m^d\right\}_{m=1..N_\chi}; \\ &C_m \leftrightarrow C\left(\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}\right); Q_m^d \subseteq Q^d, \end{aligned} \quad (17)$$

де C_m – оператор *C*, але визначений виключно на фреймі $\mathbf{X}_{\text{fr}m}^{2,+,d}$. Очевидно, що подібно до *C*, оператор C_m є колірним оператором. (17) визначає (16) як деяку адитивну групу операторів над $\mathbf{X}^{2,+,d}$.

Кожен C_m є неперервним оператором. Тоді рисунок *P* можна подати у вигляді набору фрагментів

$$P \leftrightarrow \left\{ P_m \mid P_m = C_m\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d}\right)\right\}_{m=1..N_\chi} =$$
$$= \left\{ \left\{ c_{m,(i,j)}^d \mid c_{m,(i,j)}^d \in Q_m^d \right\}_{i,j} \right\}_{m=1..N_\chi} = \tag{18}$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} \left\{c_{m,(i,j)}^d\right\} \mid \forall i \in \left[x_{\text{поч } m} .. x_{\text{поч } m} + l_{\mathrm{fr}\, m}\right], \\ \forall j \in \left[y_{\text{поч } m} .. y_{\text{поч } m} + h_{\mathrm{fr}\, m}\right], \\ \exists m \in \left[1..N_\chi\right] : c_{m,(i,j)}^d \in P_m \end{array} \right\}_{m=1..N_\chi},$$

$$P = \bigcup_{m=1}^{N_\chi} P_m, \tag{19}$$

де P_m називатимемо фрагментом зображення *P*.

Набір фрагментів $\{P_m\}_{m=1..N_\chi}$ утворює топологію $\mho_P$ (*фрагментну топологію*) рисунка P в колірній області, яка індукована топологією $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$. Це дає змогу ввести до розгляду *колірний топологічний простір* $(P, \mho_P)$ [1, 6, 15] рисунка *P*. При цьому (16) виступає абстрактним неперервним оператором відображення топологій

$$C : \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}} \to \mho_P. \tag{20}$$

$$P = C\left(\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right). \tag{21}$$

Якщо $\left(\mathbf{X}^{2,+,d}, \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right)$ визначене будь-яке покриття $\left(\chi_{\mathbf{X}^{2,+,d}} \mid N_\chi\right)$, то за (18) чи (20) отримуємо покриття (*фрагментне покриття*)

$$\vartheta_P = \{P_m \mid P_m = C\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d}\right) \wedge \mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d} \in \chi_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\}_{m=1..N_\chi}, \quad \vartheta_P \in \mho_P, \tag{22}$$

яке індуковане $\chi_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$. При цьому розмірність N_χ покриття $\chi_{X^{2,+,d}}$ є розмірністю покриття ϑ_P, і маємо $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$.

У разі існування набору (3) **P**, подібно до фреймової топології набору $\mathfrak{I}_{\mathbf{P}}$ можливі два випадки:

1. Для усіх рисунків набору маємо (10), тобто топології кожного з рисунків набору $(P, \mho_P)$ індукуються різними топологіями $\Im_z$ координатних просторів $\mathbf{X}_z^{2,+,d}$ кожного рисунка. Тоді набір можна представити у вигляді

$$\mathbf{P} = \left\{ P_z \mid P_z = C\left(\Im_z\right)\right\}_{z=1..N} =$$
$$= \left\{ \left\{ P_{z,m} \mid P_{z,m} = C_{z,m}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}z,m}^{2,+,d}\right)\right\}_{m=1..N_{\chi z}} \right\}_{z=1..N} = \tag{23}$$
$$= \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \left\{c_{z,m,(i,j)}^d\right\} \mid \\ \forall i \in \left[x_{\text{поч } z,m} .. x_{\text{поч } z,m} + l_{\mathrm{fr}\, z,m}\right], \\ \forall j \in \left[y_{\text{поч } z,m} .. y_{\text{поч } z,m} + h_{\mathrm{fr}\, z,m}\right], \\ \exists m \in \left[1..N_{\chi_z}\right]: \\ c_{z,m,(i,j)}^d \in P_{z,m} \subset \mho_{P_z} \end{array} \right\}_{m=1..N_{\chi_z}} \right\}_{z=1..N},$$

де $P_{z,m}$ – *m*-ий фрагмент *z*-го рисунка P_z; $x_{\text{поч } z,m}, y_{\text{поч } z,m}$, $l_{\mathrm{fr}\, z,m}, h_{\mathrm{fr}\, z,m}$ – координати початку *m*-го фрейма *z*-го рисунка; $\mho_{P_z} = \mho_z$ – топологія *z*-го рисунка набору **P**; N_{χ_z} – розмірність покриття χ_z і $\vartheta_z = \vartheta_{P_z}$.

А *вектор фрагментних топологій набору* $\mho_{\mathbf{P}}$ (*фрагментна топологія набору*) матиме вигляд

$$\mho_{\mathbf{P}} = \left\{\mho_z\right\}_{z=1..N}, \quad \mho_z = \mho_{\mathbf{X}_z^{2,+,d}}. \tag{24}$$

Оскільки кожна топологія $\mho_z$ індукується відповідною $\Im_z$, то можна стверджувати, що $\mho_{\mathbf{P}}$ індукується $\mathfrak{I}_{\mathbf{P}}$.

2. У випадку, якщо топології усіх рисунків $\left(P_z, \mho_{P_z}\right)$ індукуються однією топологією $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$, то (23) видозміниться як:

$$\mathbf{P} = \left\{ P_z \mid P_z = C\left(\Im_z\right)\right\}_{z=1..N} =$$
$$= \left\{ \left\{ P_{z,m} \mid P_{z,m} = C_{z,m}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{fr}m}^{2,+,d}\right)\right\}_{m=1..N_\chi} \right\}_{z=1..N} = \tag{25}$$
$$= \left\{ \left\{ \begin{array}{l} \left\{c_{z,m,(i,j)}^d\right\} \mid \\ \forall i \in \left[x_{\text{поч } m} .. x_{\text{поч } m} + l_{\mathrm{fr}\, m}\right], \\ \forall j \in \left[y_{\text{поч } m} .. y_{\text{поч } m} + h_{\mathrm{fr}\, m}\right], \\ \exists m \in \left[1..N_\chi\right]: \\ c_{z,m,(i,j)}^d \in P_{z,m} \subset \mho_{P_z} \end{array} \right\}_{m=1..N_\chi} \right\}_{z=1..N},$$

а вектор фрагментних топологій набору $\mho_{\mathbf{P}}$ матиме вигляд

$$\mho_{\mathbf{P}} = \left\{\mho_z\right\}_{z=1..N}, \quad C_z : \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}} \to \mho_z, \tag{26}$$

За обома випадками набір **P** представляється у вигляді

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\left(\mathfrak{I}_{\mathbf{X}^{2,+,d}}\right), \tag{27}$$

де

$$C : \mathfrak{I}_{\mathbf{X}^{2,+,d}} \to \mho_{\mathbf{P}} = \left\{ C_z : \Im_z \to \mho_z \right\}_{z=1..N}. \tag{28}$$

Якщо з кожної топології вибрати $\mho_z$ по одному ϑ_z і сформувати набір, то отримаємо вектор *фрагментного покриття набору*

$$\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} = \left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right) = \left\{\vartheta_z\right\}_{z=1..N}, \quad \vartheta_z \in \mho_z. \tag{29}$$

4. Задача факторизації простору покриття зображення та наборів зображень

4.1. Факторизація топології колірного простору зображення та наборів зображень

Нехай на рисунку *P* визначено координатну $\Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$ і колірну $\mho_{\mathbf{P}}$ топології, в яких вибрано покриття $\left(\chi_{\mathbf{X}^{2,+,d}} \mid N_\chi\right) \subseteq \Im_{\mathbf{X}^{2,+,d}}$, $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right) \subseteq \mho_P$. Приймається, що усі фрагменти P_m покриття ϑ_P мають однакову розмірність. Для $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$ визначимо метрику

$$\forall P_{m_1}, P_{m_2} \in \vartheta_P : \; d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) = \left\| r\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right)\right| - 1\right|, \quad (30)$$

де $r\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right)$ – кореляція [ ] між фрагментами; P_{m_1}, P_{m_2} – фрагменти (колірні прямокутні області) зображення *P*.

Твердження 1.

Співвідношення (30) є метрикою простору $\left(P, \mho_P\right)$.

Доведення.

$\lhd$

Нехай в топології $\mho_P$ задано покриття $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right) \subseteq \mho_P$. Розглянемо умови метрики [ ].

1. $d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) \geq 0$ – випливає з означення функції модуля.

2. $d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_m, P_m\right) = 0$ – випливає з властивості кореляції Оскільки $r\left(P_m, P_m\right) = 1$ [ ], то за (30) маємо

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_m, P_m\right) = |1-1| = 0 . \quad (31)$$

3. Нерівність трикутника

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right) \leq d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) + d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_2}, P_{m_3}\right). \quad (32)$$

Для доведення нерівності трикутника розглянемо обмеженість метрики (30). Згідно з властивістю кореляції маємо

$$0 \leq \left| r\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right)\right| \leq 1 . \quad (33)$$

При $\left| r\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right)\right| = 1$ маємо

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right) = |1-1| = 0 , \quad (34)$$

а при $\left| r\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right)\right| = 0$

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right) = |0-1| = 1 . \quad (35)$$

Тоді оцінку метрики (30) можна записати як

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_3}\right) \leq 1 . \quad (36)$$

Звідси

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) + d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_2}, P_{m_3}\right) \leq 1 + 1 = 2 . \quad (37)$$

З (36) та (37) випливає нерівність трикутника.

Отже (30) володіє усіма властивостями метрики.

$\rhd$

Маючи метрику (30) можна сформулювати задачу факторизації простору $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$.

Задача 1.

Факторизація покриття $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$ топології $\mho_P$ полягає у побудові фактор-простору $\vartheta_{\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim}$ за допомогою метрики (30).

Твердження 2.

(30) є напівметрикою простору $\left(P, \mho_P\right)$.

Доведення.

$\lhd$

Нехай в топології $\mho_P$ задано покриття $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right) \subseteq \mho_P$. Оскільки $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$ може містити фрагменти (наприклад P_{m_2}), кореляція яких із заданим (наприклад P_{m_1}) рівна ± 1

$$r\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) = \pm 1 . \quad (38)$$

Тоді метрика (30) є фактично відношенням еквівалентності двох фрагментів

$$d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) = 0 \;\wedge\; P_{m_1} \neq P_{m_2} , \quad (39)$$

а тому є напівметрикою.

$\rhd$

Твердження 2 є підтвердженням існуванням задачі 1.

Твердження 3.

Фактор-простір $\vartheta_{\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim}$ належить топології $\mho_P$.

Доведення випливає з означення фактор-простору

$$\vartheta_{\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim} \subseteq \vartheta_P \subseteq \mho_P . \quad (40)$$

З твердження 3 випливає ще одне важливе твердження.

Твердження 4.

Факторизація простору є операцією звуження простору $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$.

Доведення випливає з (40). При цьому важливою є нерівність

$$N_{\chi/\sim} \leq N_\chi , \quad (41)$$

де $N_{\chi/\sim}$ – розмірність $\vartheta_{\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim}$.

Відношення (41) визначає ще одну важливу нерівність

$$\mu\left(\vartheta_{\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim}\right) \leq \mu\left(\vartheta_P\right) , \quad (42)$$

де μ – зліченно-адитивна міра множини.

Розглянемо набір рисунків **P** (27). Нехай на **P** задано топологію $\mho_{\mathbf{P}}$ (26). Виберемо в цій топології фрагментне покриття $\left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right)$ (29). Вважаємо, що усі фрагменти покриття $\left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right)$ мають однакову розмірність. Між фрагментами різних ϑ_z покриття $\left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right)$ за аналогією з (30) введемо метрику

$$\begin{gathered} \forall P_{z_1, m_1} \in \vartheta_{z_1}, P_{z_2, m_2} \in \vartheta_{z_1} : \\ d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{z_1, m_1}, P_{z_2, m_2}\right) = \left\| r\left(P_{z_1, m_1}, P_{z_2, m_2}\right)\right| - 1\right| . \end{gathered} \quad (43)$$

Тут можлива ситуація, коли $z_1 = z_2$.

Зважаючи на (43) задачу 1 у випадку набору можна сформулювати так:

Задача 2.

Факторизація покриття $\left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right)$ топології $\mho_{\mathbf{P}}$ полягає у побудові фактор простору $\boldsymbol{\vartheta}_{\left(\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{P}} \mid N\right), d_{r,\mathrm{fr}}} /^{\sim}$ за допомогою метрики (30).

4.2. Майже факторизація простору покриття рисунка та наборів рисунків

Якщо відношення еквівалентності (39) на підмножині $\vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} \subseteq \vartheta_P$ міри 0 прийняти таким

$$P_{m_1}, P_{m_2} \in \vartheta_0, \quad 0 < d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) \leq \varepsilon\ , \qquad (44)$$

то можна ввести до розгляду майже факторизацію, або ε-факторизацію.

Простір, отриманий в результаті ε-факторизації, будемо називати майже фактор-простором, або ε-факторпростором і позначатимемо $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$.

Означення 1.

Майже фактор простором або ε-факторпростором будемо називати такий підпростір $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$ простору $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$, який є фактор простором усюди за виключення множини міри нуль, на якій виконується умова (44), тобто має місце

$$\begin{gathered}\varepsilon > 0 \quad \exists \vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} \subseteq \vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} \subseteq \vartheta_P, \\ \mu(\vartheta_0) = 0:\ 0 < d_{r,\mathrm{fr}}\left(P_{m_1}, P_{m_2}\right) \leq \varepsilon; \\ \vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} = \vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim} \cup \vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}.\end{gathered} \qquad (45)$$

Тут $P_{m_1}, P_{m_2} \in \vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$.

Твердження 5.

Міра простору $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$ рівна мірі простору $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}$.

Доведення.

◁

З адитивності міри випливає, що

$$\begin{gathered}\mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) = \\ = \mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}\right) + \mu\left(\vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right).\end{gathered} \qquad (46)$$

Оскільки за (45) $\mu\left(\vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) = 0$, то

$$\mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) = \mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}\right). \qquad (47)$$

▷

З (44) та (47) отримуємо обмеженість міри майже фактор-простору

$$\mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) \leq \mu(\vartheta_P). \qquad (48)$$

Означення 2.

Змінну ε з (45) називатимемо довжиною майже факторизації.

Твердження 6.

Для ε має місце

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) = \mu(\vartheta_P). \qquad (49)$$

Доведення.

◁

Послідовність $\left\{\mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right)\right\}_\varepsilon$ є зростаючою, що випливає з адитивності міри.

З (48) випливає обмеженість цієї послідовності. Отже, $\left\{\mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right)\right\}_\varepsilon$ є монотонною обмеженою послідовністю, а для такої послідовності за [ ] границя існує.

За оцінкою (36) максимум метрики (30) припадає при нульовій кореляції між фрагментами ϑ_P. Це означає, що вже при ε = 1 усі фрагменти ϑ_P потрапляють в $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$. Звідси при ε ≥ 1 маємо

$$\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} = \vartheta_P \Rightarrow \mu\left(\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}\right) = \mu(\vartheta_P). \qquad (50)$$

Отже, (48) виконується.

▷

Формула (49) не є суперечністю стосовно означення 2, оскільки майже усі (за винятком незначної кількості, якою можна знехтувати) фрагменти ϑ_P є еквівалентними за метрикою (30) заданому фрагменту. І якщо решта фрагментів таких, що задовольняють умову (44), утворюють множину міри нуль, то матиме місце (48).

Подібно до задачі 1 сформулюємо задачу майже факторизації:

Задача 3.

Майже факторизація простору $\left(\vartheta_P \mid N_\chi\right)$ полягає у побудові фактор-простору $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$ за допомогою метрики (30) і розширення цієї множини за рахунок множини міри 0, яка формується за (44).

Майже фактор-простір треба розглядати як логічний розвиток класичних фактор-просторів. Цілком природнім є розгляд ε-факторпростору як продовження (на величину ε) факторпростору $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}$. Але лише в тому випадку, коли обидва існують. В загальному випадку ε-факторпростір може існувати і без існуючого фактор простору $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}$. Але в цьому випадку за (46) його міра буде рівна 0. Цілком прийнятною є і зворотна ситуація: $\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}$ – існує, але не визначено $\vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$ – множини міри 0, для якої виконується (44). Тоді

$$\vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon} = \vartheta_{(\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim}. \qquad (51)$$

Співвідношення (51) має місце тоді, коли розмірність множини $\vartheta_{0\ (\vartheta_P|N_\chi),d_{r,\mathrm{fr}}}/^{\sim\varepsilon}$ рівна нулю: $N_{\chi_0/^{\sim\varepsilon}} = 0$. В загальному випадку, незважаючи на твердження 3.10 розмірності фактор простору і майже фактор простору можуть не збігатись. Це виражається рівністю

$$N_{\chi/\sim\varepsilon} = N_{\chi/\sim} + N_{\chi_0/\sim\varepsilon} \,. \qquad (52)$$

У випадку набору **P** (27) із заданою топологією $\mho_{\mathbf{P}}$ (26) і фрагментним покриттям $\left(\vartheta_{\mathbf{P}} \,|\, N\right)$ задачу майже факторизації простору $\left(\vartheta_{\mathbf{P}} \,|\, N\right)$ можна сформулювати подібно до задач 2 і 3

Задача 4.

Майже факторизація простору $\left(\vartheta_{\mathbf{P}} \,|\, N\right)$ топології $\mho_{\mathbf{P}}$ полягає у побудові фактор-простору $\vartheta_{(\vartheta_{\mathbf{P}}|N),d_{r,\mathbf{fr}}} /^{\sim\varepsilon}$ за допомогою метрики (30) і розширення цієї множини за рахунок множини міри 0, яка формується за (44).

Висновки

На прикладі метрики, побудованої на основі кореляції між фрагментами топологічного покриття зображення, сформульовано задачу факторизації топологічного покриття рисунка. Ця задача є базовою для дуже значної кількості практичних методів обробки зображень.

Із введенням інших напівметрик як відношень еквівалентності, можна сформулювати інші задачі факторизації і розробляти нові методи обробки.

Ще одним теоретичним результатом є введення поняття майже фактор-простору як операції, яка дає можливість формувати фактор-простори в межах незначних допущень.

Список літератури: 1. *Александров, П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию: учеб. пособие [Текст] / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 368 с. **2.** *Гонсалес, Р.* Цифровая обработка изображений: пер. с англ. под ред. П. А. Чочиа [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва: Техносфера, 2005. – 1072 с. **3.** *Колмогоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа: учеб. пособие [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин. – 4-е изд. М.: Наука, 1976. – 544 с. **4.** *Колмогоров, А.Н.* Основные понятия теории вероятностей: учеб. пособие [Текст] / А.Н. Колмогоров. – 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – 544 с. **5.** *Ленг, С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий: пер. с англ. под ред. М.Я. Антоновского [Текст]. – М.: Мир, 1967. – 203 с. **6.** *Милнор Дж.* Дифференциальная топология / Милнор Дж., Уоллес А., пер. с англ. под ред. Д.В.Аносова. – М.: Мир, 1972. – 280 с. **7.** *Соловьев, А.А.* Лекции по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие [Текст] / А.А.Соловьев. – Челябинск: Челябинский гос. ун-т, 2003. – 118 с. **8.** *Спивак, М.* Математический анализ на многообразиях: пер. с англ. под ред. Д.А. Райкова [Текст] / М. Спивак. – М.: Мир, 1968. – 164 с. **9.** *Халмош, П.* Гильбертово пространство в задачах: пер. с англ. под ред. Р.А. Милноса [Текст] / П. Халмош. – М.: Мир, 1970. – 352 с.

Надійшла до редколегії 31.03.2010 р.

УДК 681.142.2; 622.02.658.284; 621.325

Задача факторизации топологических пространств, определенных на изображениях / Д.Д. Пелешко, Ю.М. Рашкевич // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. 2010. – № 1 (72). – С. 98–103.

В статье на примере введения метрики, построенной на основе статестичекой корреляции, рассматривается задача факторизации пространства, полученного из топологии изображения. Введено понятие почти факторизации с целью построения фактор-пространств при некоторых несущественных отклонениях отношения эквивалентности, полученного из заданой метрики.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 681.142.2; 622.02.658.284; 621.325

The task of factorization of topological spaces determined accordingly to images / D.D. Peleshko, Y.M. Raskevych // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 1 (72). – P. 98–103.

In the article based on the example of the introduction of the metric, built on the basis of statistical correlation, is described the task of the factorization of the space obtained from the image topology. Is introduced the concept almost of factorization for the purpose of construction the factor of spaces with some unessential deviations of the relation of equivalence, obtained from the defined metrics.

Ref.: 10 items.