
УДК 621.3.013

В. А. АРТЕМЕНКО, канд. техн. наук, *Б. В. ДЗЮНДЗЮК*, канд. техн. наук,
В. К. ЯРМОЛЮК, канд. физ.-мат. наук

**РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТУРОВ
С ТОКОМ. СООБЩЕНИЕ 2. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ**

Исследуем контур с проходящим по нему током I , произвольно расположенный в пространстве и состоящий из прямолинейных отрезков. Поскольку мы рассматриваем линейные среды, магнитное поле такого контура определяется путем наложения полей, создаваемых отдельными отрезками.

Определим магнитное поле, создаваемое одиночным отрезком с током I . Конечными размерами сечения пренебрегаем, т. е. считаем отрезок бесконечно тонким. Пусть отрезок с током (рисунок) задан оординатами точек $1(x_1, y_1, z_1)$, $2(x_2, y_2, z_2)$. Рассмотрим поле, создаваемое

этим отрезком в произвольной точке P . По закону Био—Савара вектор магнитной индукции [1]

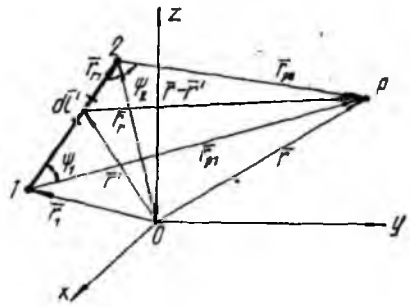
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{(1)}^{(2)} \frac{d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1)$$

где интегрирование проводится вдоль отрезка 1—2.

Представим интеграл в явном виде. Переменный вектор \vec{r}' может быть представлен в виде суммы векторов \vec{r}_1 и $\vec{r}_{21}t$, где t — переменный параметр, принимающий значения от нуля до единицы. Из рисунка следует, что $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; $\vec{r}' = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t + \vec{r}_1$ (2). Кроме того, $d\vec{l}' = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) dt$ (3). Используя представление (2), получаем

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}') &= \vec{r} - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t - \vec{r}_1 = \\ &= (\vec{r} - \vec{r}_1) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t = \vec{r}_{p1} - \vec{r}_{21}t. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначения \vec{r}_{21} , \vec{r}_{p1} введены в соответствии с рисунком. Подставляя выражение (3), (4) и (1), после деления на μ имеем



$$\begin{aligned} \vec{H}_{(1,2)} &= \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_0^1 \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) dt \times (\vec{r}_{p1} - \vec{r}_{21}t)}{|\vec{r}_{p1} - \vec{r}_{21}t|^3} = \\ &= \frac{I}{4\pi} (\vec{r}_{21} \times \vec{r}_{p1}) \int_0^1 \frac{dt}{(r_{21}^2 t^2 - 2r_{21}r_{p1}t \cos \psi_1 + r_{p1}^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{I}{4\pi} (\vec{r}_{21} \times \vec{r}_{p1}) \left[\frac{4r_{21}(r_{21} - r_{p1} \cos \psi_1)}{(r_{21}^2 - 2r_{21}r_{p1} \cos \psi_1 + r_{p1}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4r_{p1}r_{21} \cos \psi_1}{r_{p1}^3} \right] \times \\ &\times \frac{1}{4r_{p1}^2 r_{21}^2 (1 - \cos^2 \psi_1)} = \frac{I}{4\pi} (\vec{r}_{21} \times \vec{r}_{p1}) \frac{r_{21} + (r_{p2} - r_{p1}) \cos \psi_1}{r_{p1}^3 r_{p2} r_{21} \sin^2 \psi_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $r_{p2} = (r_{21}^2 - 2r_{21}r_{p1} \cos \psi_1 + r_{p1}^2)^{\frac{1}{2}}$. Соотношение (5) с помощью равенства $r_{21} = r_{p1} \cos \psi_1 + r_{p2} \cos \psi_2$ приводится к виду

$$\vec{H}_{(1,2)} = \frac{I}{4\pi} (\vec{r}_{21} \times \vec{r}_{p1}) \frac{\cos \psi_1 + \cos \psi_2}{r_{p1}^3 r_{21} \sin^2 \psi_1}. \quad (6)$$

Компоненты поля в произвольной точке вычисляем, используя формулу (5) или (6).

Все величины, входящие в эти формулы, выражаются через координаты точек 1, 2 (см. рисунок) следующим образом:

$$r_{21} = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$\begin{aligned}
 r_{p1} &= [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]^{\frac{1}{2}}; \\
 r_{p2} &= [(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2]^{\frac{1}{2}}; \\
 \cos \psi_1 &= \frac{(x_2-x_1)(x-x_1) + (y_2-y_1)(y-y_1) + (z_2-z_1)(z-z_1)}{r_{21} \cdot r_{p1}}; \\
 \cos \psi_2 &= \frac{(x_2-x_1)(x-x_2) + (y_2-y_1)(y-y_2) + (z_2-z_1)(z-z_2)}{r_{21} \cdot r_{p2}}; \\
 \bar{r}_{21} \times \bar{r}_{p1} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \\ (x-x_1) & (y-y_1) & (z-z_1) \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Если контур состоит из n отрезков, то результирующую напряженность магнитного поля устанавливаем покомпонентным сложением напряженностей, создаваемых каждым отрезком в отдельности:

$$H_{\text{рез}} = \sum_{k=1}^n H_{(k, k+1)}. \quad (8)$$

Итак, выражения (5)—(8) позволяют определить точное значение напряженности магнитного поля, создаваемого кусочно-линейным контуром. Для прогнозирования напряженности поля на больших расстояниях полезно иметь формулы расчета поля для дипольной и квадрупольной составляющих. Получим их для кусочно-линейного контура. В работе [2] приведено выражение дипольной составляющей поля. Для отдельного прямолинейного отрезка

$$\bar{H}_{(1,2)}^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi} \left[\frac{1}{r^3} \int_{(1)}^{(2)} \bar{r}' \times d\bar{l} - \frac{3\bar{r}}{r^5} \times \int_{(1)}^{(2)} (\bar{r} \cdot \bar{r}') d\bar{l}' \right].$$

Используя представления (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{(1,2)}^{\text{дип}} &= \frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} (\bar{r}_{21}t + \bar{r}_1) \times \bar{r}_{21} dt - \right. \\
 &- \frac{3\bar{r}}{r^5} \times \int_0^1 [\bar{r} (\bar{r}_{21}t + \bar{r}_1)] \bar{r}_{21} dt \left. \right\} = \frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) - \right. \\
 &- \left. \frac{3}{2r^5} [\bar{r} (\bar{r}_2 + \bar{r}_1)] [\bar{r} \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)] \right\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Запишем выражение (9) в координатном виде:

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{(1,2)}^{\text{дип}} &= \frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \frac{3}{2r^5} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ (x_2-x_1) & (y_2-y_1) & (z_2-z_1) \end{vmatrix} \times \right. \\
 &\left. \times [x(x_2+x_1) + y(y_2+y_1) + z(z_2+z_1)] \right\}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

С помощью формулы (10) вычисляем любую компоненту дипольной составляющей напряженности магнитного поля прямолинейного отрезка с током.

Например, x -компонента (коэффициент при единичном векторе \bar{i})

$$H_{x(1,2)}^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} \left\{ (y_1 z_2 - y_2 z_1) - \frac{3}{2} [(x_2 + x_1) \cos \alpha + (y_2 + y_1) \cos \beta + (z_2 + z_1) \cos \gamma] [(z_2 - z_1) \cos \beta - (y_2 - y_1) \cos \gamma] \right\}, \quad (11)$$

где $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$, $\cos \gamma = \frac{z}{r}$ — направляющие косинусы вектора \bar{r} . Аналогично, как коэффициенты при единичных векторах \bar{j} , \bar{k} , выпишем остальные компоненты дипольной составляющей.

Квадрупольную составляющую определим согласно работе [2]:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{(1,2)}^{\text{кв}} &= \frac{I}{4\pi} \left[\frac{3}{r^5} \int_{(1)}^{(2)} (\bar{r} \cdot \bar{r}') (\bar{r}' \times d\bar{l}') - \right. \\ &\left. - \frac{15}{2r^7} \bar{r} \times \int_{(1)}^{(2)} (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{l}' + \frac{3}{2r^5} \bar{r} \times \int_{(1)}^{(2)} (\bar{r}')^2 d\bar{l}' \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

С учетом (2), (3)

$$\begin{aligned} H_{(1,2)}^{\text{кв}} &= \frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{3}{r^5} \int_0^1 [\bar{r} (\bar{r}_{21} t + \bar{r}_1)] [(\bar{r}_{21} t + \bar{r}_1) \times \bar{r}_{21} dt] - \right. \\ &\left. - \frac{15}{2r^7} \bar{r} x - \int_0^1 [\bar{r} \cdot (\bar{r}_{21} t + \bar{r}_1)]^2 \bar{r}_{21} dt + \right. \\ &\left. + \frac{3}{2r^5} \bar{r} x - \int_0^1 (\bar{r}_{21} t + \bar{r}_1)^2 \bar{r}_{21} dt \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \bar{H}_{(1,2)}^{\text{кв}} &= \frac{I}{4\pi} \left\{ \frac{3}{2r^5} [\bar{r} (\bar{r}_2 + \bar{r}_1)] (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2) - \right. \\ &\left. - \frac{5}{2r^7} [\bar{r} \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)] [(\bar{r} \cdot \bar{r}_2)^2 + (\bar{r} \cdot \bar{r}_1) (\bar{r} \cdot \bar{r}_2) + (\bar{r} \cdot \bar{r}_1)^2] + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2r^5} [(\bar{r}_2)^2 + (\bar{r}_1 \cdot \bar{r}_2) + (\bar{r}_1)^2] [\bar{r} \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Представляя выражение (14) в координатном виде, выписать компоненты поля квадрупольной составляющей не трудно. Например, x — компонента

$$\begin{aligned} H_{x(1,2)}^{\text{кв}} &= \frac{I}{8\pi r^4} \{ 3 [(x_2 + x_1) \cos \alpha + (y_2 + y_1) \cos \beta + (z_2 + z_1) \cos \gamma] \times \\ &\times (y_1 z_2 - y_2 z_1) - 5 [(x_2 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma)^2 + (x_1 \cos \alpha + \\ &+ y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma) (x_2 \cos \alpha + y_2 \cos \beta + z_2 \cos \gamma) + (x_1 \cos \alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma)^2] [(z_2 - z_1) \cos \beta - (y_2 - y_1) \cos \gamma] + \\
 & + [(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)] \times \\
 & \times [(z_2 - z_1) \cos \beta - (y_2 - y_1) \cos \gamma] \}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что результирующее значение напряженности поля как дипольной, так и квадрупольной составляющих для контура, состоящего из n -отрезков, определится покомпонентным сложением в соответствии

с выражением (11) или (15): $H_{\text{рез}}(t) = \sum_{k=1}^n H_{k, k+1}(t)$ (16), где $t = x, y, z$.

Для практических целей иногда существенно построить диполь, эквивалентный диполю, определяемому соотношениями (15), (16). Найдем магнитный момент этого диполя и его ориентировку в пространстве. Осуществим это с помощью радиальной компоненты дипольной составляющей. В работе [2] найдено, что

$$H_r^{\text{дип}} = \frac{I\bar{r}}{4\pi r} \oint \bar{r}' \times d\bar{l}' \quad (17)$$

В случае прямолинейного отрезка с током, учитывая выражения (2) и (3), имеем

$$H_{r(1, 2)}^{\text{дип}} = \frac{I\bar{r}}{4\pi r^3} \int_0^1 (\bar{r}_{21}t + \bar{r}_1) \times \bar{r}_{21} dt = \frac{I\bar{r}}{4\pi r^3} (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2)$$

или в координатном виде

$$\begin{aligned}
 H_{r(1, 2)}^{\text{дип}} &= \frac{I\bar{r}}{4\pi r^3} [(y_1 z_2 - y_2 z_1) \bar{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \bar{k}] = \\
 &= \frac{I}{4\pi r^3} [(y_1 z_2 - y_2 z_1) \cos \alpha + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \cos \beta + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \cos \gamma]. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Для контура, состоящего из n отрезков, получим

$$H_{r(n)}^{\text{дип}} = \sum_{k=1}^n H_{r(k, k+1)}^{\text{дип}} \quad (19)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}
 L_x &= \sum_{k=1}^n (y_k z_{k+1} - y_{k+1} z_k); & L_y &= \sum_{k=1}^n (z_k x_{k+1} - z_{k+1} x_k); \\
 L_z &= \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k), \quad (20)
 \end{aligned}$$

выражение (19) запишем в виде

$$H_r^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} (L_x \cos \alpha + L_y \cos \beta + L_z \cos \gamma). \quad (21)$$

Здесь индекс n для простоты опущен.

Известно, что у магнитного диполя радиальная составляющая достигает максимума на оси диполя. Определим направление этого максимума. Перепишем формулу (21):

$$H_r^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} (xL_x + yL_y + zL_z). \quad (22)$$

Поскольку она имеет особенность в точке $r = 0$, чтобы отыскать максимум, положим $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$ (23). Выражение в скобках — это скалярное произведение векторов \vec{r} , \vec{L} , и оно достигает максимума при коллинеарности этих векторов:

$$\frac{x}{L_x} = \frac{y}{L_y} = \frac{z}{L_z}. \quad (24)$$

Так как косинус угла между векторами равен единице, выполняется соотношение

$$xL_x + yL_y + zL_z = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} (L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)^{\frac{1}{2}},$$

или с учетом (23) $xL_x + yL_y + zL_z = r_0 L$, где $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ (25). Используя условие коллинеарности (24), из выражения (25) имеем

$$x = r_0 \frac{L_x}{L}; \quad y = r_0 \frac{L_y}{L}; \quad z = r_0 \frac{L_z}{L},$$

так что направляющие косинусы оси диполя

$$\cos \alpha_0 = \frac{L_x}{L}; \quad \cos \beta_0 = \frac{L_y}{L}; \quad \cos \gamma_0 = \frac{L_z}{L}. \quad (26)$$

Подставив (26) в (21), получим

$$H_{r(\text{макс})}^{\text{дип}} = \frac{I}{4\pi r^3} L. \quad (27)$$

Коэффициенты L_x , L_y , L_z имеют смысл удвоенных площадей проекций распределения токов на соответствующие координатные плоскости. Поэтому выражение (27) представим в виде $H_{r(\text{макс})}^{\text{дип}} = M/(2\pi r^3)$ (28), где $M = \frac{1}{2} IL$ — модуль магнитного момента эквивалентного дипольного источника.

Приведенные выражения позволяют вычислить декартовы компоненты магнитного поля, создаваемого кусочно-линейным контуром с током — их точные значения в дипольно-квадрупольном приближении. Кроме того, с помощью выражений (25) — (28) определяются направление и модуль магнитного момента эквивалентного дипольного источника. В создании такого источника может возникнуть необходимость, например, для ослабления вредного воздействия помехонесущего магнитного поля.

Список литературы: 1. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1985. — 156 с. 2. Артеменко В. А., Дзюндзюк Б. В., Ярмолюк В. К. Расчет магнитного поля пространственных контуров. Сооб. 1. Разложение по составляющим // Радиотехника. — 1987. — Вып. 80. — С. 54 — 60.

Поступила в редколлегию 27.12.85.