Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна у задачах математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини
(тема)

Виконав:
студент _2_ курсу, групи ПМм-21-1
Курлов Є.Е.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Прикладна математика
(повна назва освітньої програми)
Керівник проф. Сидоров М.В.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ ____________ Сидоров М.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2022 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Прикладна математика
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ ____________
(підпис)
“ 07 ” листопада 2022 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Курлову Євгену Едуардовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна у задачах математичного моделювання нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини

затверджена наказом по університету від 25 жовтня 2022 р. № 1412 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 7 грудня 2022 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі

1. Аналіз предметної області
2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання
3. Програмна реалізація
4. Результати обчислювального експерименту
5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп’ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	7 – 13 листопада 2022 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	14 – 20 листопада 2022 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	21 – 27 листопада 2022 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	28 листопада – 4 грудня 2022 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	28 листопада – 6 грудня 2022 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	7 грудня 2022 р.	виконано

Дата видачі завдання _7_ листопада 2022 р.

Студент ____________________________________
(підпис)

Керівник роботи _________________ проф. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 105 с., 3 табл., 80 рис., 2 дод., 46 джерел.

В'ЯЗКА РІДИНА, НЕЛІНІЙНИЙ МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД R-ФУНКЦІЙ, НЕСТАЦІОНАРНА ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНА ТЕЧІЯ, НАБЛИЖЕННЯ БУСІНЕСКА, РІВНЯННЯ НАВ'Є-СТОКСА, ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ, ТЕМПЕРАТУРА.

Об'єкт дослідження – нестаціонарні гідродинамічні процеси у в'язкій нестисливій рідині, що описуються нелінійними системами рівнянь відносно функції течії та температури.

Мета роботи – застосування методу R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна для розв'язання задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестаціонарної течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини в плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею (нелінійна задача).

Методи дослідження – структурний метод (метод R-функцій) та нелінійний метод Гальоркіна для нестаціонарних задач.

У кваліфікаційній роботі було розглянуто математичні моделі плоскопаралельної нестаціонарної течії в'язкої нестисливої теплопровідної рідини, основні поняття теорії R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна, застосовано метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна для розв'язання задачі розрахунку течії в'язкої теплопровідної нестисливої рідини у прямокутній області. Було розроблено алгоритм розв'язання поставленої задачі та виконано його програмну реалізацію у пакеті Mathematica 11, здійснено обчислювальні експерименти та проведено їх аналіз.

ABSTRACT

Introductory note: 104 pages, 3 tables, 80 figures, 2 appendixes, 46 sources.

VISCOUS FLUID, NONLINEAR GALERKIN METHOD, R-FUNCTION METHOD, NON-STATIONARY FLAT-SPACER FLOW, BUSSINESS APPROXIMATION, NAVIER-STOKES EQUATIONS, STREAM FUNCTION, TEMPERATURE.

Object of research – non-stationary hydrodynamic processes in a viscous incompressible liquid, described by nonlinear systems of equations regarding the stream function and temperature.

Purpose of work – use of the R-function method and nonlinear Galerkina method to solve the problem of the mathematical simulation of the flat-spacer non-stationary flow of a viscous, nonbinding heat-conductive fluid in a flat one-connected bounded domain with a piecewise smooth boundary (nonlinear problem).

Methods of research – structural method (R-function method) and nonlinear Galerkin method for non-stationary problems.

In the qualifying work, the mathematical models of the flat-scale non-stationary flow of the viscous incompressible thermal conductive fluid, the basic concepts of the theory of R-functions and the nonlinear Galerkin method were considered, the method of R-functions and the nonlinear Galerkin method are applied to solve the problem of calculating the flow of viscous heat-conductive incompressible liquid in the rectangular region. An algorithm for solving the problem was developed and its software implementation in Mathematica 11 package, computational experiments were carried out and their analysis was carried out.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність роботи. Розвиток методів обчислювальної математики і обчислювальної техніки відкриває нові можливості для розв'язання все більш складних науково-технічних задач, зокрема, задач гідродинаміки [41].

На відміну від класичної гідродинаміки, моделі якої, як правило, основані на тих чи інших спрощуючих припущеннях (ідеальна рідина, безотривне обтікання, струйні схеми течії, лінійні плоскі постановки в канонічних областях), в обчислювальній гідродинаміці задачі розв'язуються, як правило, в більш загальному вигляді (багатовимірні, нелінійні задачі в областях різної складності). Тому точні розв'язки таких задач можна знайти у виключних випадках і нормою для обчислювальної гідродинаміки є використання методів обчислювальної математики і комп'ютерного моделювання [42]. Останнє забезпечує не тільки чисельний розв'язок математичних задач, але й побудову сіткових моделей об'єктів і графічне подання результатів (візуалізація результатів чисельного моделювання).

Сучасний апарат обчислювальної гідродинаміки в основному базується на використанні скінченно-різницевих схем [22, 43] і скінченно-елементних схем [44]. Їх головними недоліками є складнощі, що пов'язані з апроксимацією крайових умов та громіздке подання сіткового розв'язку в областях складної геометрії. В [45] розглянуті сучасні сіткові технології, що використовуються при розв'язанні задач механіки рідини.

Одним з найбільш ефективних та інтуїтивно зрозумілих методів розв'язання задач в областях геометрії різної складності є метод R-функцій [39]. Головною перевагою цього методу є те, що він апріорі задовольняє заданим граничним умовам задачі. Отже, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна для розв'язання задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини в плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею.

Для досягнення поставленої мети, необхідно:

– ознайомитися з теоретичним відомостями методу R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна для нестаціонарних задач;

– застосувати метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна до розв'язання задачі моделювання нестаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини в прямокутній області;

– розробити чисельний алгоритм розв'язання поставленої задачі;

– реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи математичний пакет Wolfram Mathematica 11;

– провести обчислювальний експеримент для різних параметрів моделі;

– провести аналіз адекватності отриманого чисельного розв'язку.

Об'єктом дослідження є процес течії нестисливої теплопровідної в'язкої рідини.

Предметом дослідження є математична модель течії нестисливої теплопровідної в'язкої рідини (нелінійна задача).

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються структурний метод (метод R-функцій) та нелінійний метод Гальоркіна для нестаціонарних задач.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.) [46].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі в’язких течій

Для отримання рівнянь руху рідини зазвичай розглядається малий контрольний об’єм і вважається, що для рідини, яка протікає через цей об’єм, виконуються закони збереження маси та енергії, а швидкість зміни трьох компонент імпульсу дорівнювала би відповідним компонентам прикладених сил. Це дозволяє отримати п’ять рівнянь, що в комбінації з рівнянням стану дозволяють визначити шість величин: зазвичай це значення тиску $p(x,y,z,t)$, щільності $\rho(x,y,z,t)$, швидкості рідини $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$ та температури T. Для деяких течій достатньо розглядати не всі шість змінних, тому для опису таких течій необхідна менша кількість рівнянь [1].

Відповідно до закону збереження речовини для довільного нерухомого об’єму V_0 швидкість зміни маси всередині нього дорівнює потоку маси через поверхню S, що обмежує цей об’єм V_0, тобто

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_S \rho\vec{v}\cdot\mathbf{n}\, dS, \tag{1.1}$$

де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі;

$\rho=\rho(x,y,z,t)$ – щільність рідини;

$\vec{v}=\vec{v}(x,y,z,t)$ – вектор швидкості рідини в точці з координатами (x,y,z) в момент часу t.

За формулою Остроградського-Гаусса [1] поверхневий інтеграл може бути замінений на об’ємний. Тоді рівняння (1.1) набуває вигляду

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0 . \tag{1.2}$$

Оскільки (1.2) має місце для будь-якого V, то підінтегральний вираз має дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \rho \vec{v} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \mathrm{div}\, \vec{v} + \vec{v}\, \mathrm{grad}\, \rho = 0 . \tag{1.3}$$

Рівняння (1.3) називається рівнянням збереження маси або рівнянням нерозривності.

Тепер розглянемо рівняння руху ідеальної рідини. Ідеальною рідиною називається нестислива гіпотетична рідина, для якої є неістотними процеси в'язкості та теплопровідності. Також в ній відсутня внутрішня структура, тертя і вона є неперервною.

Виділимо всередині ідеальної рідини деякий об'єм V [2]. Відповідно до другого закону Ньютона прискорення центру мас цього об'єму пропорційно повній силі, що діє на нього. Для ідеальної рідини ця сила зводиться до тиску навколишнього об'єму рідини і, можливо, впливу зовнішніх силових полів. Припустимо, що це поле є полем сили гравітації, тому ця сила пропорційна напруженості поля і пропорційна масі елемента об'єму. Тоді

$$\int_V \frac{d\vec{v}}{dt} dm = \int_V g dm - \oint_S p dS ,$$

де g – прискорення поля тяжіння;

S – поверхня виділеного об'єму;

$dm = \rho dV$ – диференціал маси;

ρ – щільність рідини.

Відповідно до формули Остроградського-Гаусса [1] перейдемо від поверхневого інтегралу до об'ємного. Отримаємо:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \rho g dV - \int_V \nabla p dV . \quad (1.4)$$

Оскільки об'єм V є довільним, то підінтегральні функції дорівнюватимуть одне одній у будь-якій точці та рівняння (1.4) набуде вигляду

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho g - \nabla p . \quad (1.5)$$

Виразивши повну похідну через частинну і конвективну похідну, матимемо

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{v} . \quad (1.6)$$

Підставивши (1.6) в (1.5), отримаємо

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\nabla)\vec{v} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} . \quad (1.7)$$

Рівняння (1.7) називається рівнянням Ейлера для руху ідеальної рідини в полі тяжіння.

Для подальшого дослідження рівнянь руху рідини розглянемо в'язку рідину. В'язкою рідиною називається рідина, в якій враховується внутрішнє тертя. Механізм внутрішнього тертя в рідинах полягає в тому, що рухомі молекули переносять імпульс з одного шару в інший, що призводить до вирівнювання швидкостей – це описується введенням сили тертя [3]. Також в'язкість рідини проявляється у тому, що після припинення дії причин, що викликали рух рідини, цей рух припиняється.

Розглянемо імпульс рідини [4]. Швидкість зміни одиниці об'єму рідини має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v.$$

Проведемо обчислення в тензорних позначеннях. Матимемо:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \vec{v}_i = \rho \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\vec{v}_i. \tag{1.8}$$

Використаємо рівняння (1.3), написавши його у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho \vec{v}_k)}{\partial x_k}.$$

Тепер запишемо рівняння Ейлера (1.7) у формі

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{1.9}$$

Тоді отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}\rho v_i v_k.$$

Остаточно після перетворень [4] рівняння Ейлера з використанням тензора напруг матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\vec{v}_i = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k},$$

де $\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\vec{v}_i\vec{v}_k$ – тензор щільності “ідеального” потоку імпульсу.

Взагалі кажучи Π_{ik} є i-ю компонетою кількості імпульсу, що протікає в одиницю часу через одиницю поверхні, яка перпендикулярна до осі x_k. В’язкість рідини проявляється у наявності ще додаткового, незворотнього, переносу імпульсу із місць з більшою до місць з меншою швидкістю.

Таким чином, для отримання рівняння руху в’язкої рідини необхідно додати до тензора щільностей Π_{ik} додатковий в’язкий тензор напруг σ'_{ik}, що буде визначати “в’язке” перенесення імпульсу в рідині. Отже, матимемо

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho\vec{v}_i\vec{v}_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho\vec{v}_i\vec{v}_k.$$

Однією з важливих умов для встановлення загального вигляду тензору σ'_{ik}, є залежність σ'_{ik} від похідних швидкості по координатам.

Тензор

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\vec{v}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial x_i}\right) + \zeta\delta_{ik}\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial x_i},$$

де коефіцієнти η і ξ не залежать від швидкості, є найбільш загальним виглядом тензора другого рангу, що задовольняє умовам [4]. Величини η і ξ називаються коефіцієнтами в’язкості.

Рівняння руху в’язкої рідини можна тепер отримати безпосередньо шляхом додання виразу $\dfrac{\partial\sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ до рівняння (1.9). Тоді отримаємо найбільш загальний вигляд рівняння руху в’язкої рідини [4]:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \vec{v}_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial x_i}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right). \quad (1.10)$$

Оскільки зазвичай зміна коефіцієнтів в’язкості впоперек рідини неістотна, то можна вважати ці коефіцієнти сталими. Тоді отримаємо рівняння Нав’є-Стокса, що має вигляд:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right)=-\operatorname{grad} p+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}\,. \quad (1.11)$$

Нехай на рух стисливої рідини в області $G\subset\mathbb{R}^3$, яка обмежена поверхнею S, діє поле тяжіння. Додавши до (1.11) рівняння нерозривності та рівняння загального перенесення тепла [4], отримаємо гідродинамічну систему рівнянь

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\nabla)\vec{v}\right)=-\nabla p+\eta\Delta\vec{v}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\operatorname{div}\vec{v}+\rho\vec{g}\,, \quad (1.12)$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\vec{v}\nabla s\right)=\kappa\Delta T+D\,, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{v})=0\,, \quad (1.14)$$

де s – ентропія одиниці маси рідини;

T – абсолютна температура;

D – дисипативна функція;

κ – коефіцієнт теплопровідності;

Δ – оператор Лапласа.

Для того, щоб виразити ентропію s за допомогою температури T і тиску p, необхідно доповнити систему (1.12) – (1.14) рівнянням стану середовища

$$\rho=\rho(T,p)\,. \quad (1.15)$$

Досить часто при описі різних задач гідродинаміки використовують систему (1.12) – (1.15). Найбільш цікавими з точки зору практичного використання є задачі так званої вільної теплової конвекції. У зв'язку з тим, що в процесах конвективного теплообміну, важливу роль грає конвективне перенесення тепла, то ці процесі мають в значній мірі залежати від характеру руху рідини, тобто від значення і напрямку швидкості середовища, від розподілу швидкостей в потоці, від режиму руху рідини. Якщо рух рідини обумовлений дією деякого зовнішнього збудника, то такий рух називають вимушеним, а процес конвективного теплообміну, що відбувається – вимушеною конвекцією [5]. Якщо рух рідини викликано наявністю неоднорідного поля температур, а отже, і неоднорідною щільністю в середовищі, то такий рух називається вільним або природнім, а процес конвективного теплообміну, що відбувається – вільною або природньою конвекцією.

Для отримання найбільш популярної моделі для опису конвекції в рідинах, а саме рівняння теплової конвекції в наближенні Бусінеска-Обербека, припустимо, що стисливість середовища не є істотною. Отже, за допомогою системи (1.12) – (1.15) виведемо рівняння, що описують вільну теплову конвекцію.

Після заміни $T=\overline{T}+T'$, $p=\overline{P}+P'$ ентропія та рівняння середовища (1.15) запишуться у вигляді:

$$\rho=\rho_0+\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p T'+\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T P'=\rho_0(1-\beta T'+\alpha P'), \tag{1.16}$$

$$s=s_0+\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p T'+\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T P', \tag{1.17}$$

де $\alpha=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T$, $\beta=-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$ – коефіцієнти ізотермічної стисливості та теплового розширення;

T', P' – малі відхилення від сталих середніх значень $\overline{T}$, $\overline{P}$;

ρ_0 – середнє значення щільності рідини при температурі T_0.

Для спрощення рівняння стану середовища (1.15) вимагатимемо, щоб $\left|\beta T'\right| \ll 1$, $\left|\alpha T'\right| \ll 1$ та $\left|\alpha P'\right| \ll \left|\beta T'\right|$. Тоді (1.15) запишеться у вигляді

$$\rho = \rho_0(1 - \beta T'). \tag{1.18}$$

Для спрощення рівняння нерозривності (1.14) вважатимемо, що рідина буде нестисливою, тобто $\rho = \mathrm{const}$. Тоді (1.14) запишеться у вигляді

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0. \tag{1.19}$$

Для спрощення рівняння загального перенесення тепла (1.13) спочатку введемо додаткові термодинамічні співвідношення

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\frac{\beta}{\rho_0}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{\overline{T}}, \quad c_p - c_v = \frac{\beta^2 \overline{T}}{\alpha \rho_0},$$

де c_p, c_v – це коефіцієнти питомої теплоємності. Оскільки тиск має менше впливу на зміну щільності ніж температура, тобто $\left|\alpha P'\right| \ll \left|\beta T'\right|$, то рівняння ентропії (1.17) можна записати у вигляді

$$s = s_0 + \frac{c_p}{\overline{T}} T'. \tag{1.20}$$

Підставивши (1.20) в (1.13), а потім й позбувшися від дисипативного тепла D, отримаємо

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}\nabla T' = \chi \Delta T',$$

де $\chi = \dfrac{\kappa}{\rho_0 c_p}$ – коефіцієнт температуропровідності.

Враховуючи, що зазвичай в задачах вільної конвекції вертикальне прискорення менше за силу тяжіння, а також враховуючи рівняння (1.18), (1.19), отримаємо, що рівняння (1.12) матиме вигляд

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \rho_0 (\nu \Delta \vec{v} + \vec{g}\beta T') . \quad (1.21)$$

Отже, остаточно отримали повну систему рівнянь Бусінеска-Обербека:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}\beta T' , \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \vec{v}\nabla T' = \chi \Delta T' , \quad (1.23)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 . \quad (1.24)$$

Для існування єдиного розв'язку задачі (1.22) – (1.24) необхідно задати початкові та крайові умови для швидкості та температури. Для температури зазвичай розглядають такі основні типи крайових умов [4]:

а) для умови Діріхле (умови першого роду) в кожній точці поверхні S задається температура

$$T(P,t)\big|_S = f_1(P,t) ,$$

де $f_1(P,t)$ – відома функція точки $P(x,y,z)$ поверхні S і часу t;

б) для умови Неймана (умови другого роду) на поверхні S задається щільність теплового потоку $q = -\kappa \dfrac{\partial T(P,t)}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$, $\vec{\mathbf{n}}$ – нормаль в точці $P(x,y,z)$ до поверхні тіла S, звідки випливає, що

$$\kappa\frac{\partial T(P,t)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\bigg|_S = f_2(P,t),$$

де $f_2(P,t) = -q(P,t)$ – виражена через тепловий потік неперервна функція;

в) для умови третього роду на поверхні S відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого T_c відома:

$$\frac{\partial T(P,t)}{\partial\vec{\mathbf{n}}}\bigg|_S + h(T - T_c) = f_3(P,t),$$

де $h = \dfrac{H}{\kappa}$, H – коефіцієнт теплообміну;

$f_3(P,t)$ – задана функція.

Для розв’язання системи (1.22) – (1.24) використаємо теорію подібності, оскільки аналітичне розв’язання є доволі складною, а може і неможливою задачею. Теорія подібності визначає умови, за яких фізичні явища в геометрично подібних об’єктах також подібні [6]. Для цього закони збереження приводять до безрозмірнісного вигляду і в результаті отримують безрозмірнісні комплекси – критерії подібності, що відповідають за збереження подібності явищ. Слід зазначити, що теорія подібності дозволяє з достатньою для практики точністю вивчати складні процеси на моделях, які є значно меншими за розмірами і часто більш простими ніж апарати натуральної величини [7].

Введемо деякі безрозмірнісні величини та безрозмірнісні комплекси для переходу до системи безрозмірнісних рівнянь. Використовуватимемо число Струхаля $\mathrm{Sh} = l^2 t_0 \nu$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = \dfrac{\nu}{\chi}$, число Грасгофа $\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta l^3 T'}{\nu^2}$, де l – характеристична довжина, а t_0 – характеристичний час.

Число Струхаля характеризує порядок відношення локальної похідної $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ і конвективної похідної $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$ [8]. Фізичний сенс числа Прандтля полягає в тому, що воно показує відношення швидкості дифузії речовини до його температуропровідності [9]. Число Грасгофа визначає перенесення тепла при конвективному теплобміні для випадку вільної конвекції, коли рух визивається різницею щільностей через нерівномірність поля температур поруч з нагрітим тілом. Число Грасгофа визначає перехід від ламінарного режиму течії до турбулентного в умовах вільної конвекції [10].

Додамо нові безрозмірнісні величини:

$$\tau = \frac{t}{t_0},\ \nabla^* = l\nabla,\ \Delta^* = l^2\Delta,\ \vec{v}^* = \frac{\vec{v}l}{\nu},\ p^* = \frac{pl^2}{p_0\nu^2},\ \theta = \frac{T'}{T_0},$$

де Δ^* – оператор Лапласа;

τ – час;

∇^* – оператор Гамільтона;

p^* – тиск;

$\vec{v}^*$ – вектор швидкості;

θ – температура.

Після підстановки отримаємо нову систему безрозмірнісних рівнянь:

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial\vec{v}^*}{\partial\tau} + (\vec{v}^*\nabla^*)\vec{v}^* = -\nabla^* p^* + \Delta^*\vec{v}^* - \mathrm{Gr}\,\theta\frac{\vec{g}}{g}, \tag{1.25}$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + \vec{v}^*\nabla^*\theta = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta^*\theta, \tag{1.26}$$

$$\mathrm{div}^*\,\vec{v}^* = 0. \tag{1.27}$$

Далі для простоти запису вважатимемо всі величини безрозмірнісними і знак $*$ опускатимемо.

Часто від просторової задачі теплової гравітаційної конвекції можна перейти до задачі в двовимірній області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, що значно спрощує систему рівнянь (1.25) – (1.27).

Для плоскопаралельних течій вводять функцію течій $\psi(x, y)$ за допомогою співвідношень

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \; v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (1.28)$$

Тоді рівняння нерозривності $\operatorname{div} \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ перетворюється на тотожність, а після підстановки (1.28) в (1.27), система (1.25) – (1.27) набуває вигляду

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \Delta^2\psi - \mathrm{Gr}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\theta.$$

Для функції течії крайові умови можуть бути отримані із розподілу швидкості рідини, що заданий на $\partial\Omega$:

$$v\big|_{\partial\Omega} = v^*(s), \; s \in \partial\Omega,$$

причому $\int\limits_{\partial\Omega} v^* \cdot \mathbf{n} ds = 0$, де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Тоді

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right|_{\partial\Omega} = v^* \cdot \mathbf{n}, \; \left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = -v^* \cdot \tau, \qquad (1.29)$$

де τ – вектор одиничної дотичної до $\partial\Omega$. Проінтегрувавши перше з співвідношень (1.29) вздовж $\partial\Omega$, отримаємо крайові умови на $\partial\Omega$ найзагальнішого вигляду

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s),\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s),\ s\in\partial\Omega.$$

На непроникній для рідини ділянці $\partial\Omega$ значення функції течії не змінюється, тобто $\psi = \mathrm{const}$. Якщо весь контур $\partial\Omega$ є непроникним, то на ньому можна прийняти, що $\psi = 0$.

Нехай $\partial\Omega^*$ – ділянка межі, через яку рідина потрапляє у область Ω або витікає з неї, і нехай задана швидкість цієї течії $v^0(s)$, $s\in\partial\Omega^*$. Тоді можна обчислити $\psi(s)$ для будь-якої точки $s\in\partial\Omega^*$ за формулою:

$$\psi(s) = \psi(s_0) + \int\limits_{s_0}^{s} v^0(s')\cdot\mathbf{n}(s')ds',$$

де $\psi(s_0)$ – значення функції течії в точці $s_0\in\partial\Omega^*$, від якої відраховують довжину ds' дуги до поточної точки $s'\in\partial\Omega^*$ з одиничним вектором $\mathbf{n}(s')$ зовнішньої нормалі.

Зазначимо, що у випадку, коли вся межа $\partial\Omega$ є непроникною нерухомою стінкою ($v_x = 0$, $v_y = 0$), крайові умови для функції течії матимуть вигляд $\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0$.

1.2 Методи чисельного аналізу течій в’язкої рідини

На цей час відома порівняно невелика кількість точних розв’язків рівнянь Ейлера та Нав’є-Стокса [11] для течій нестисливої рідини в двовимірному і тривимірному випадках, які можуть бути базою для розв’язання конкретних прикладних задач. З математичної точки зору рівняння Нав'є-Стокса належать до класу нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. Складності з їх аналізом перш за все пов'язані з нелінійністю, обумовленою наявністю конвективних членів прискорення. Це є причиною того, що до сьогодні не отримано жодного загального розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса в повному вигляді, тобто при збереженні всіх конвективних членів та всіх членів, що враховують в'язкість, і відома дуже обмежена кількість випадків, що допускають аналітичне інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса [12]. Проте пошуки методів побудови точних розв'язків рівнянь Ейлера і Нав'є-Стокса залишатимуться одним із важливих напрямів дослідження в гідромеханіці та математичній фізиці в цілому [12, 13].

Через проблеми з отриманням точних розв'язків при розв'язанні більшості прикладних задач гідродинаміки пріоритет надається чисельним методам динаміки рідини [14, 15, 16]. Для чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса існують і використовуються кілька десятків різновидів схем. Чисельні методи розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса у процесі свого розвитку взаємно збагачуються, тому об'єднання різних ідей та підходів сприяє створенню нових чи модифікованих алгоритмів їх розрахунку [17, 18]. Серед них можна виділити математичне моделювання нестаціонарних течій в'язкої теплопровідної рідини на основі методу R-функцій і проекційних методів [19, 20].

Досліджено велику кількість класів течій рідини. Розглянемо один з цих класів, а саме – плоскопаралельну течію. Плоскопаралельною називається течія, коли рух рідини відбувається паралельно якій-небудь площині, причому у всіх точках, що знаходяться на одному перпендикулярі до цієї площини, швидкості частинок, тиск і інші характеристики течії однакові. Щоб дослідити плоскопаралельні течії, використовують наступні математичні моделі [21, 22]:

а) рівняння Нав'є Стокса за відсутності масових сил у природних змінних (v_x, v_y, p):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \Delta v_x, \tag{1.30}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \nu \Delta v_y, \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \tag{1.32}$$

б) рівняння Нав’є-Стокса для функції течії ψ:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi; \tag{1.33}$$

в) рівняння Нав’є-Стокса відносно завихореності ζ та функції течії ψ:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nu \Delta \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \tag{1.34}$$

$$-\Delta\psi = \zeta. \tag{1.35}$$

Більша частина чисельних методів, що використовується для розв’язання (1.30) – (1.32), (1.33) та (1.34), (1.35), описана в [23 – 25].

Для розв’язання задач гідродинаміки можна використовувати, зокрема, метод фіктивних областей, метод скінченних елементів і метод скінченних різниць. Розглянемо їх більш детально.

Основна ідея методу фіктивних областей полягає в тому, щоб розв’язувати задачу не у вихідній складній області D_0, а в деякій іншій, більш геометрично простій області D, причому $D_0 \subset D$. Наприклад, за D можна обрати n-вимірний паралелепіпед. Це дозволяє створювати програмне забезпечення одразу для досить широкого класу задач з довільними розрахунковими областями.

В роботах [26, 27] наведено теоретичне обґрунтування застосовності методу фіктивних областей для задач динаміки в’язкої рідини у змінних “швидкість, тиск”, “функція течії, завихореність”, а в роботах [28, 29] наведено результати його практичного використання.

Розглянемо використання методу фіктивних областей для розв’язання задачі про нестаціонарний рух в’язкої теплопровідної рідини в змінних “швидкість, завихореність, температура” в однозв’язній двовимірній області. В обмеженій області D_0 з межею ∂D_0 необхідно визначити компоненти швидкості u, v, завихореність ω і температуру θ з системи рівнянь:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=\nu\Delta\omega+\beta g\frac{\partial\theta}{\partial x}, \tag{1.36}$$

$$\Delta u=-\frac{\partial\omega}{\partial y}, \tag{1.37}$$

$$\Delta v=\frac{\partial\omega}{\partial x}, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\theta)+\frac{\partial}{\partial y}(v\theta)=\chi\Delta\omega,\ (x,y)\in D_0,\ t\in(0,T], \tag{1.39}$$

при початкових:

$$\omega=\alpha(x,y),\ \theta=\zeta(x,y),\ (x,y)\in\bar{D}_0,\ t=0, \tag{1.40}$$

і граничних умовах:

$$u=U(x,y,t),\ v=V(x,y,t),\ \omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\ \theta=\Phi(x,y,t),$$
$$(x,y)\in\bar{D}_0,\ t\in(0,T]. \tag{1.41}$$

Для наближеного розв’язання задачі (1.36) – (1.41) в нерегулярній області D_0 використаємо метод фіктивних областей у варіанті з продовженням за молодшими коефіцієнтами [26]. Відповідно до загальної ідеї метода доповнимо D_0 фіктивною областю D_1 до прямокутної області D.

В розширеній області D розглянемо допоміжну задачу методу фіктивних областей з малим додатнім параметром ε для наближеного розв’язку u^ε, v^ε, ω^ε, θ^ε:

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon\omega^\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(v^\varepsilon\omega^\varepsilon)=\nu\left[\Delta\omega^\varepsilon-c^\varepsilon\left(\omega^\varepsilon-\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}\right)\right]+\beta g\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}, \quad (1.42)$$

$$\Delta u^\varepsilon-c^\varepsilon(u^\varepsilon-U)=-\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial y}, \quad (1.43)$$

$$\Delta v^\varepsilon-c^\varepsilon(v^\varepsilon-V)=\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial x}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u^\varepsilon\theta^\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial y}(v^\varepsilon\theta^\varepsilon)=\chi[\Delta\theta^\varepsilon-c^e(\theta^\varepsilon-\Phi)],\ (x,y)\in D,\ t\in(0,T], \quad (1.45)$$

$$\omega^\varepsilon=\alpha^\varepsilon(x,y),\ \theta^\varepsilon=\zeta^\varepsilon(x,y),\ (x,y)\in\bar{D},\ t=0, \quad (1.46)$$

$$u^\varepsilon=U(x,y,t),\ v^\varepsilon=V(x,y,t),\ \omega^\varepsilon=\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y},\ \theta^\varepsilon=\Phi(x,y,t),$$

$$\partial D,\ t\in(0,T], \quad (1.47)$$

де

$$c^\varepsilon(x,y),\ \alpha^\varepsilon(x,y),\ \zeta^\varepsilon(x,y)=\begin{cases}0, & \alpha(x,y),\ \zeta(x,y),\ (x,y)\in D_0,\\ 1/\varepsilon^2,\ 0, & 0,\qquad (x,y)\in D_1.\end{cases} \quad (1.48)$$

Функції $U(x,y,t)$, $V(x,y,t)$, $\Phi(x,y,t)$ гладко продовжуються у фіктивну область D_1.

Якісний аналіз допоміжної задачі методу фіктивних областей (1.42) – (1.48) показує, що її розв’язки u^ε, v^ε, ω^ε, θ^ε наближено задовольняють усім співвідношенням вихідної задачі (1.36) – (1.41) в області D_0, і отже, можуть бути прийняті за наближений розв'язок задачі (1.36) – (1.41) при достатньо малих значеннях параметра продовження ε.

Розглянемо тепер метод скінченних елементів. Основна ідея цього методу полягає у розбитті області течії на скінченні елементи. В двовимірному просторі це зазвичай трикутники або чотирикутники, а в трьохвимірному випадку найбільш часто використовуються тетраедри або шестигранники.

В методі скінченних елементів шукана функція апроксимується лінійною комбінацією координатних функцій. Для отримання рівнянь методу, шукані рівняння інтегруються за всією розрахунковою областю з деякою вагою, де за вагові функції приймаються координатні функції. В найбільш простих випадках використовуються лінійні у межах кожного елементу функції форми, що гарантує неперервність розв'язку на межах елементів.

Важливою перевагою методу є можливість його використання для задач зі складними просторовими конфігураціями. Даний метод відносно просто аналізувати математично [30].

В роботах [31, 32] розглянуті можливості використання метода скінченних елементів для розв'язання задач гідродинаміки в змінних "швидкість, тиск", "функція течії, завихореність".

Розглянемо використання методу скінченних елементів для чисельного моделювання плоскої течії в'язкої нестисливої рідини. Розв'язання цієї задачі проводитимемо за допомогою введення змінних функції течії та завихореності.

Плоска течія нестисливої в'язкої рідини описується функцією течії ψ, за допомогою якої записуються компоненти швидкості $\vec{V}$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \; w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.49}$$

і завихореністі ω, що визначається формулою

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Розв’язок задачі – пара функцій ψ, ω – задовольняє безрозмірнісній системі рівнянь

$$-\Delta\psi = \omega, \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\omega) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega. \tag{1.51}$$

Розглянемо спрощену модельну постановку задачі про течію в прямокутному каналі висоти H і довжини L, на осьовій лінії якого розташовано тіло γ – круговий циліндр одиничного діаметру. На вхід In ($x = 0$) подається течія з рівномірним одиничним профілем швидкості ($u = 1$, $w = 0$). На непроникних горизонтальних стінках каналу Bot ($y = 0$) і Top ($y = H$) нехтуємо тертям, а на поверхні циліндра γ ставимо умову прилипання. На вихідному перерізі каналу Out ($x = L$) ставиться гранична умова вільного виходу рідини. В першому наближенні дані граничні умови можна записати так:

$$In,\ Bot,\ Top:\ \psi = 0,\ \omega = 0, \tag{1.52}$$

$$\gamma:\ \psi = \psi_\gamma = H/2,\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \tag{1.53}$$

$$Out:\ \frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\omega) = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{1.54}$$

Для строгого визначення граничного значення функції течії використовується додаткова нелокальна гранична умова

$$\int_\gamma \frac{\partial\omega}{\partial n} ds = 0,$$

чисельна реалізація якої значно ускладнює задачу. Досвід багатьох розрахунків показав, що при розташуванні циліндра на осі каналу $y = \frac{H}{2}$, відносні відхилення ψ_γ від половини витрати не перевершують долі процента, тому вважатимемо, що $\psi_\gamma = \frac{H}{2}$.

Опишемо метод розв'язання задачі (1.49) – (1.54). Для рівняння переносу вихору запишеться двошарова напівдискретна схема, що є явною за конвекцією:

$$\omega - \frac{\tau}{\mathrm{Re}}\Delta\omega = \breve{\omega} - \tau\nabla\cdot(\vec{V}\breve{\omega}). \tag{1.55}$$

Нехай на нижньому часовому шарі розв'язок задачі, а саме $\breve{\omega}$, $\breve{\psi}$ – знайдено. Для переходу на поточний часовий шар і визначення розв'язку ψ, ω реалізується наступний алгоритм.

Крок 1. Розв'язується задача для функції течії $-\Delta\psi = \breve{\omega}$ з головною граничною умовою $\psi\big|_\gamma = \psi_\gamma$.

Крок 2. Визначається поле швидкості $\vec{V} = (u, w)$, $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $w = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$.

Крок 3. Розраховується функція ω_γ як розв'язок задачі $\omega_\gamma = -\Delta\psi$ з крайовою умовою $\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_\gamma = 0$.

Крок 4. Розв'язується задача для завихореності (1.55) з граничною умовою Діріхле $\omega\big|_\gamma = \omega_\gamma$.

Детально реалізація кроків алгоритму розглянуто у роботі [32].

Розглянемо метод скінченних різниць. Основна ідея цього методу полягає в прямій заміні похідних, що входять в вихідні рівняння, їх дискретними (різницевими) аналогами. Цей метод є одним з найперших і найпростіших методів розв'язання диференційних рівнянь особливо у випадку його використання в задачах з простою геометрією.

Найчастіше метод використовується на регулярних сітках, коли лінії координатної сітки є локальними координатними лініями. В методі скінченних різниць вихідне диференційне рівняння апроксимується системою лінійних алгебраїчних рівнянь, де невідомими є значення змінних розв'язків у вузлах сітки. При цьому кожний доданок вихідного диференційного рівняння представляється відповідним скінченно-різницевим відношенням. В результаті отримується система алгебраїчних рівнянь відносно невідомих вузлових значень. Перевагою цього метода є те, що він може бути використаний для будь-якого типу сітки. Недоліком цього метода є те, що в загальному випадку закони збереження не будуть враховуватися. Крім того, має місце обмеження над складністю геометрії розрахункової області.

В роботах [33, 34] розглянуті можливості використання методу скінченних різниць для розв'язання задач гідродинаміки в змінних "швидкість, тиск", "функція течії, завихореність".

Розглянемо загальну схему використання методу скінченних різниць на прикладі розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}-\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right),$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}-\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0\,.$$

Після введення функції течії та рівняння, що визначатиме компоненти вихору, отримаємо рівняння:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\Omega_z\,, \tag{1.56}$$

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial y^2}\right). \tag{1.57}$$

Для чисельного розв’язання рівнянь (1.56), (1.57) досліджувана область течії покривається розрахунковою сіткою. Розглянемо випадок рівномірної прямокутної сітки з кроком Δx і Δy за осями координат. Задамо також рівномірний розрахунковий крок за часом Δt. Далі на всіх вузлах сітки для моменту часу $t = 0$ визначаються початкові умови. Наступним кроком записується скінченно-різницевий аналог рівнянь (1.56), (1.57)

$$\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = -\Omega_{z_{i,j}}^{n+1}, \tag{1.58}$$

$$\frac{\Omega_{z_{i,j}}^{n+1} - \Omega_{z_{i,j}}^{n}}{\Delta t} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n} - \psi_{i,j-1}^{n}}{2\Delta y}\frac{\Omega_{z_{i+1,j}}^{n} - \Omega_{z_{i-1,j}}^{n}}{2\Delta x} - \frac{\psi_{i+1,j}^{n} - \psi_{i-1,j}^{n}}{2\Delta x}\frac{\Omega_{z_{i,j+1}}^{n} - \Omega_{z_{i,j-1}}^{n}}{2\Delta y} =$$

$$= \nu\left[\frac{\Omega_{z_{i+1,j}}^{n} - 2\Omega_{z_{i,j}}^{n} + \Omega_{z_{i-1,j}}^{n}}{(\Delta x)^2} + \frac{\Omega_{z_{i,j+1}}^{n} - 2\Omega_{z_{i,j}}^{n} + \Omega_{z_{i,j-1}}^{n}}{(\Delta y)^2}\right].$$

В правій частині рівняння (1.58) використовуються нові значення Ω_z у внутрішніх вузлах розрахункової сітки, пошук нових ψ виконується ітераційним шляхом (методом послідовних наближень).

Використовуючи скінченнно-різницевий аналог рівнянь (1.49), знайдемо нові складові швидкості u:

$$u_x = \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y},\ u_y = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x}.$$

Нарешті розглянемо метод послідовних наближень. Основна ідея цього методу полягає в тому, що розв’язок нелінійної задачі зводиться до розв’язання послідовності лінійних задач.

В роботах [35] розглянуті можливості використання метода послідовних наближень до задач гідродинаміки в змінних “функція течії, температура”, в плоскій однозв’язній обмеженій області з кусково гладкою межею.

Необхідно визначити функцію течії ψ та температури θ із наступної системи рівнянь Нав’є-Стокса:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y},\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{1.59}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ 0<t\le T, \tag{1.60}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{1.61}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x},\ (x,y)\in\Omega,\ t>0, \tag{1.62}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ 0<t\le T, \tag{1.63}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}. \tag{1.64}$$

Нехай $(u_0(x,y,t), v_0(x,y,t))$ – розв’язок наступної задачі

$$\frac{\partial(-\Delta u_0)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u_0 - \beta\frac{\partial v_0}{\partial x} = 0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} - \kappa\Delta v_0 = 0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0,$$

$$u_0\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t),\ \frac{\partial u_0}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = g_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ t\ge 0,$$

$$u_0\big|_{t=0} = \psi_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega},$$

$$v_0\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t),\ s\in\partial\Omega,\ 0<t\le T,$$

$$v_0\big|_{t=0} = \theta_0(x,y),\ (x,y)\in\bar{\Omega}.$$

Для задачі (1.59) – (1.64) зробимо заміну:

$$\psi = u_0 + u\,,\ \theta = v_0 + v\,,$$

де (u,v) – нова пара невідомих функцій.

Використання методу послідовних наближень зводить нелінійну систему рівнянь (1.59) – (1.64) до розв’язання наступних лінійних задач:

$$\frac{\partial(-\Delta u^{(k+1)})}{\partial t} + \nu\Delta^2 u^{(k+1)} = J(\Delta(u_0 + u^{(k)}), u_0 + u^{(k)}) + \beta\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}\,,\ \text{в}\ \Omega,\ t > 0, \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial v^{(k+1)}}{\partial t} - \kappa\Delta v^{(k+1)} = J(u_0 + u^{(k)}, v_0 + v^{(k)}) + \beta\frac{\partial v^{(k)}}{\partial x}\,,\ \text{в}\ \Omega,\ 0 < t \le T\,, \quad (1.66)$$

$$u^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ v^{(k+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0\,, \quad (1.67)$$

$$u^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0\,, \quad (1.68)$$

$$v^{(k+1)}\Big|_{t=0} = 0\,, \quad (1.69)$$

$$\left.\frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,,\ k = 0,1,2,...\,, \quad (1.70)$$

де J_1, J_2 – оператори, що діють в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ за правилами

$$J_1(u) = J(\Delta(u_0 + u), u_0 + u)\,,\ J_2(u) = J(u_0 + u, v_0 + v)$$

на області визначення

$$D_{J_1} = \left\{ u \middle| u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{J_2} = \left\{ (u,v) \middle| (u,v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times \left(C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\right), u\big|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Одним з методів, який часто використовують для розв'язання задач гідродинаміки є метод R-функцій, що був розроблений академіком НАН України В. Л. Рвачевим та його учнями. Апарат теорії R-функцій В. Л. Рвачева дозволяє аналітично описати межу довільного геометричного об'єкта [36]. Основною ідеєю цього методу у застосуванні до розв'язання крайових задач є побудова жмутків функцій, що враховуватимуть геометрію області та точно задовольнятимуть крайовим умовам досліджуваної задачі.

Метод R-функцій в задачах гідродинаміки в'язкої рідини використовувався Ламтюговою С.М. (задачі обтікання тіл в'язкою рідиною), Артюхом А.В. (нестаціонарні плоскопаралельні течії), Сидоровим М.В. (стаціонарні плоскопаралельні течії) та іншими [37, 38].

1.3 Формальна та змістовна постановка задачі

Більшість явищ, що спостерігаються в атмосфері й океані, а також проблеми гідромеханіки, фізіології кровообігу, організація технологічних процесів в силу помірних швидкостей руху середовища можна вивчати у рамках моделі нестисливої в'язкої рідини. На сьогодні існує досить велика кількість різного роду задач, повне дослідження яких може бути проведено в більшості випадків лише шляхом обчислювального експерименту або за допомогою ретельно поставленого фізичного експерименту. Однак технологічні процеси і явища, що мають практичний інтерес або не піддаються всебічному фізичному моделюванню, або затрати на проведення таких експериментів занадто великі.

Задачі які представляють практичний інтерес, як правило, характеризуються багатовимірністю, нелінійністю, нестаціонарністю, наявністю вільних границь і описуються рівняннями Нав'є-Стокса. Нелінійність цих рівнянь і наявність малого параметра при старших похідних утворюють серйозні складнощі при їх аналітичному розв'язанні.

Отже, у плоскій однозв'язній обмеженій області Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ розглянемо нестаціонарний рух плоскопаралельної течії в'язкої теплопровідної рідини у наближенні Бусінеска.

Система рівнянь Нав'є-Стокса в наближенні Бусінеска в природних змінних має вигляд

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\vec{v} + \mathrm{grad}\,p - \nu\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\vec{v} - \beta\vec{e}\theta = 0\,,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,\theta - \kappa\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\theta = 0\,,$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0\,,$$

де ν – кінематична в'язкість;

β – коефіцієнт об'ємного розширення;

κ – коефіцієнт теплопровідності;

$\vec{e} = (0,1)$ – вектор, який задає напрям виштовхуючої сили.

Введемо функцію течії за допомогою співвідношення (1.28) та позбавимося від тиску p за допомогою перехресного диференціювання. Вважатимемо, що масові сили потенційні.

Тоді отримаємо наступну систему рівнянь

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\,, \tag{1.71}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{1.72}$$

Систему (1.71), (1.72) слід доповнити крайовими і початковими умовами.

Початкові та крайові умови для функції течії (1.71) отримаємо, якщо задамо $v\big|_{t=0}$, $v\big|_{\partial\Omega}$, тобто:

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y)\,,\ (x,y)\in\bar{\Omega}\,,$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t)\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t)\,,\ s\in\partial\Omega\,,\ 0<t\le T\,,$$

де ψ_0 – початкове значення функції течії;

$\frac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 – деякі розподіли нормальної і дотичної складової швидкості потоку відповідно;

$\vec{n}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$.

Початкові та крайові умови для температури (1.72) отримаємо, якщо задамо $\theta\big|_{t=0}$, $\theta\big|_{\partial\Omega}$, тобто:

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(x,y)\,,\ (x,y)\in\bar{\Omega}\,,$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t)\,,\ s\in\partial\Omega\,,\ 0<t\le T\,,$$

де θ_0 – початковий розподіл температури;

h_0 – розподіл температури на межі $\partial\Omega$.

Отже, функції течії ψ та температури θ є розв’язками задачі:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi - \beta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{1.73}$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x,y)\,,\ (x,y)\in\bar{\Omega}\,, \tag{1.74}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = f_0(s,t)\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s,t)\,,\ s\in\partial\Omega\,,\ 0<t\le T\,, \tag{1.75}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x}\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{1.76}$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(x,y)\,,\ (x,y)\in\bar{\Omega}\,, \tag{1.77}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = h_0(s,t)\,,\ s\in\partial\Omega\,,\ 0<t\le T\,. \tag{1.78}$$

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу математичних моделей течій в’язкої теплопровідної рідини, зокрема, у наближенні Бусінеска, а також аналізу чисельних методів, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження нестаціонарних течій в’язкої теплопровідної рідини з використанням методу R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна.

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування методу R-функцій, методу послідовних наближень та нелінійного методу Гальоркіна для розв’язання задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестаціонарної течії в’язкої теплопровідної рідини в плоскій однозв’язній обмеженій області з кусково-гладкою межею.

Для досягнення поставленої мети, необхідно:

– ознайомитися з теоретичним відомостями методу R-функцій та нелінійного методу Гальоркіна для нестаціонарних задач;

– застосувати метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна до розв’язання задачі моделювання нестаціонарної течії в’язкої теплопровідної рідини в прямокутній області;

– розробити чисельний алгоритм розв’язання поставленої задачі;

– реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи математичний пакет Wolfram Mathematica 11;

– провести обчислювальний експеримент для різних параметрів моделі;

– провести аналіз адекватності отриманого розв’язку.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Структурний метод (метод R-функцій) в обчислювальній гідродинаміці

У просторі $\mathbb{R}^2$ задамо геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Поставимо задачу побудови функції $\omega(x, y)$, що є додатною в Ω, від'ємною поза Ω та дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Тоді межа $\partial\Omega$ області Ω визначатиметься в неявній формі за допомогою рівняння $\omega(x, y) = 0$ [39].

Означення 2.1 Функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів, називається R-функцією, що відповідає розбиттю числової осі на проміжки $(-\infty, 0)$ і $[0, +\infty)$.

Нехай задана булева функція $Y = F(X_1, ..., X_n)$. Тоді функція $y = f(x_1, ..., x_n)$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, називатиметься R-функцією, якщо

$$S_2[f(x_1, ..., x_n)] = F[S_2(x_1), ..., S_2(x_n)], \tag{2.1}$$

де $S_2(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t > 0. \end{cases}$

Означення 2.2 Супроводжуючою для R-функції f називатимемо таку булеву функцію F, яка задовольнятиме (2.1).

Введемо систему

$$H_2 = \{0, \bar{X}, X_1 \wedge X_2, X_1 \vee X_2, X_1 \sim X_2, X_1 \Rightarrow X_2, X_1 \mid X_2\}, \tag{2.2}$$

яку називатимемо повною системою супроводжуючих функцій.

Тоді достатньо повну систему R-функцій $\Re_0$, для якої (2.2) є супроводжуючою і яка найчастіше використовується на практиці, можна задати у вигляді

$$y_1 \equiv -1;\; y_2 \equiv \overline{x} \equiv -x;$$

$$y_3 \equiv x_1 \wedge_0 x_2 \equiv \left(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right);$$

$$y_4 \equiv x_1 \vee_0 x_2 \equiv \left(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right);$$

$$y_5 \equiv x_1 \sim_0 x_2 \equiv 2x_1x_2\left[\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right]^{-1};$$

$$y_6 \equiv x_1 \rightarrow_0 x_2 \equiv x_2 - x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2};$$

$$y_7 \equiv x_1 \mid_0 x_2 \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1 - x_2.$$

Нехай для області Ω задана характеристична функція, що має вигляд $\chi(\omega(x,y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x,y) < 0, \\ 1, & \omega(x,y) \ge 0. \end{cases}$ Побудуємо предикат:

$$\chi = F(\chi_1,\ \chi_2,\ ...,\ \chi_m) = F((\omega_1 \ge 0),\ (\omega_2 \ge 0),\ ...,\ (\omega_m \ge 0)), \qquad (2.3)$$

де $Y = F(X_1,\ X_2,\ ...,\ X_m)$ – булева функція;

$\chi_i = (\omega_i(x,y) \ge 0)$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ m$, – система характеристичних функцій.

Вважатимемо, що область Ω складається з підобластей $\Omega_1,\ \Omega_2,\ ...,\ \Omega_m$, що за допомогою логічних операцій над множинами, а саме: “$\bigcap$” – перетину, “$\neg$” – доповнення і “$\bigcup$” – об’єднання визначається предикатом вигляду (2.3). Це також позначатимемо у вигляді

$$\Omega = F(\{\Omega_1,\ \Omega_2,\ ...,\ \Omega_m\},\ \{\bigcap,\ \bigcup,\ \neg\}). \qquad (2.4)$$

Вважатимемо, що допоміжні підобласті $\Omega_1,\ \Omega_2,\ ...,\ \Omega_m$ мають більш простий вигляд, ніж Ω, і для кожної з цих підобластей задане рівняння межі $\omega_i(x,y) = 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Рівняння межі $\omega(x,y) = 0$ області Ω може бути отримано у аналітичному вигляді, якщо використати метод R-функцій [39].

Для того, щоб перейти від предикатної форми запису (2.4) до найбільш вживаного у аналітичній геометрії запису, необхідно зробити заміну кожної з областей Ω_i на $\omega_i(x, y)$, області Ω на $\omega(x, y)$, а символів $\{\bigcap, \bigcup, \neg\}$ на $\{\wedge_0, \vee_0, -\}$, що називаються символами R-операцій. Отже, використовуючи аналітично задані функції, можна отримати після заміни аналітичний вираз, що повністю визначатиме межу $\omega(x, y) = 0$ області Ω. Зауважимо, що для внутрішніх точок виконується умова $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх $\omega(x, y) < 0$.

Розглянемо деякі диференціальні властивості функції $\omega(x, y)$, яка описує геометрію області Ω.

Означення 2.3. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ називатимемо нормалізованим рівнянням $\partial\Omega$, якщо для нього виконуватимуться наступні умови:

$$\omega(x, y) > 0 \text{ для всіх } (x, y) \in \Omega,$$

$$\omega(x, y) < 0 \text{ для всіх } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega \cup \partial\Omega),$$

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 1, \tag{2.5}$$

де $\vec{n}$ – внутрішня нормаль до $\partial\Omega$.

Зауважимо, що рівність (2.5) виконується у всіх регулярних точках межі $\partial\Omega$.

Розглянемо один зі способів побудови нормалізованого рівняння за рівнянням межі $\partial\Omega$ [39].

Теорема 2.1. Функція $\omega \equiv \dfrac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \left|\operatorname{grad} \omega_1\right|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умовам $\left.\omega_1\right|_{\partial\Omega} = 0$, $\left.\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 1$ для всіх регулярних точок $\partial\Omega$, якщо $\omega_1(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ задовольняє умовам $\left.\omega_1(x, y)\right|_{\partial\Omega} = 0$ та $\left.\dfrac{\partial \omega_1}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} > 0$.

В області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ розглянемо крайову задачу:

$$Au = f, \tag{2.6}$$

$$L_i u = \varphi_i, \tag{2.7}$$

де L_i – оператор крайових умов на $\partial\Omega_i$, $i = 1, ..., m$;

$\partial\Omega_1, ..., \partial\Omega_m$ – покриття межі $\partial\Omega$;

A – оператор, який діє в функціональний простір $Y(\Omega)$ з функціонального простору $X(\Omega)$ на області визначення D_A.

Виділимо з рівностей (2.7) q умов:

$$L'_k u = \varphi'_k,\ k = 1, ..., q. \tag{2.8}$$

Означення 2.4. Структурою розв'язку, що враховує (2.8), називатимемо формулу $u = B(\Phi)$, де $B : \mathfrak{M} \to X(\Omega)$, а Φ – елемент деякої множини $\mathfrak{M}$, якщо для всіх $\Phi \in \mathfrak{M}$ виконується

$$L'_k B(\Phi) = \varphi'_k,\ k = 1, ..., q.$$

Структуру, яка враховує всі крайові умови (2.7), називатимемо загальною структурою. Структуру називатимемо частковою, якщо вона задовольнятиме лише частині умов (2.6). Рівняння $u = B(\Phi)$ називатимемо загальним розв'язком для (2.6), якщо задовольняється тільки рівняння (2.6). Розв'язок u^*, що задовольняє умовам (2.6), (2.7) називатимемо точним.

Структура $B(\Phi)$ називається повною, якщо $u^* \in D_B$, де $D_B = \{u : u = B(\Phi), \Phi \in \mathfrak{M}\} \subset X(\Omega)$. Структура $B(\Phi)$ називається неповною, якщо $u^* \notin D_B$.

Нехай $\Phi = (\Phi_1, ..., \Phi_k)$. У структурі $u = B(\Phi)$ покладемо $\Phi_s = \sum_{i=1}^{m_s} c_{is}\psi_i^{(s)}$, $s = 1, ..., k$, де $\{\psi_i^{(s)}\}$ – обрана послідовність поліномів. Вважатимемо, що $N = m_1 + ... + m_k$. Після підстановки в $u = B(\Phi)$ виразів Φ_s, $s = 1, ..., k$, отримаємо N-параметричну сім'ю так званих координатних функцій. Зауважимо, що вона незалежно від обрання сталих c_{is} задовольнятиме крайовим умовам. Використовуючи будь-який проекційний чи варіаційний метод (Гальоркіна, Рітца, найменших квадратів, тощо), можна знайти невідомі сталі c_{is}.

Як приклад, запишемо структуру розв'язку для рівняння другого порядку з умовою Діріхле

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_0,$$

де $\varphi_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Ця структура матиме вигляд

$$u = \varphi + \omega\Phi,$$

де $\omega = 0$ в Ω, $\omega > 0$ в Ω і $\left|\nabla\omega\right| \neq 0$ на $\partial\Omega$;

$\varphi = EC\varphi_0$.

Зауважимо, що EC – оператор продовження функції φ_0 всередину області.

Розглянемо випадок, коли функція φ_0 має різні аналітичні вирази φ_i на різних ділянках $\partial\Omega$, тобто задається на межі $\partial\Omega$ у вигляді:

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi_1, & x \in \partial\Omega_1, \\ ... & ... \\ \varphi_m, & x \in \partial\Omega_m, \end{cases}$$

де $\bigcup_{i=1}^{m} \partial\Omega_i = \partial\Omega$, $\operatorname{int}\partial\Omega_i \cap \operatorname{int}\partial\Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тоді

$$\varphi = EC\varphi_0 = \frac{\varphi_1\tau_1 + \ldots + \varphi_m\tau_m}{\tau_1 + \ldots + \tau_m},$$

де $\omega_i > 0$ ззовні $\partial\Omega_i$, $\tau_i = \omega_i^{-1}$, $\partial\Omega_i = (\omega_i = 0)$.

Для рівняння четвертого порядку з однорідними крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

де $\vec{\mathbf{n}}$ – зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$, структура розв'язку матиме вигляд

$$u = \omega^2\Phi,$$

де $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$.

Розглянемо випадок, коли крайові умови для рівняння четвертого порядку мають вигляд

$$u\big|_{\partial\Omega} = f_0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}\right|_{\partial\Omega} = g_0,$$

де $\vec{\mathbf{n}}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$. Структура розв'язку для цієї задачі запишеться у вигляді

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi,$$

де $f = ECf_0$, $g = ECg_0$ – продовження відповідно функцій f_0, g_0 в Ω.

2.2 Метод Гальоркіна для нелінійних задач

Нехай $\mathcal{U}$ – сепарабельний нормований простір з базисом, F – відображення $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}^*$. Розглянемо рівняння:

$$F(u) = 0. \tag{2.9}$$

Метод Гальоркіна для наближеного розв'язання (2.9) полягає в наступному. Спочатку у просторі $\mathcal{U}$ задається базис, тобто лінійно незалежна система елементів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, яка має ту властивість, що будь-який елемент із $\mathcal{U}$ записується у єдиний спосіб у вигляді

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(u)\varphi_k .$$

Використовуючи цей базис, побудуємо послідовність $\{\mathcal{U}_n\}$ скінченновимірних підпросторів, де $\mathcal{U}_n$ – n-вимірний підпростір, що натягнутий на перші n елементів базису $\{\varphi_k\}$, тобто на $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Наближенням Гальоркіна розв'язку рівняння (2.9) називається елемент $u_n \in \mathcal{U}_n$, тобто

$$\left\langle \varphi_i,\ F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) \right\rangle = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Система (2.10), розв'язок якої визначає наближення Гальоркіна u_n, називається системою Гальоркіна.

Нехай P_n – оператор проектування $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}_n$ і P_n^* – спряжений оператор, що проектує $\mathcal{U}^*$ на n-вимірний підпростір $\mathcal{U}_n^*$.

Розглянемо проекційний метод для наближеного розв'язання рівняння (2.9). Проекційний метод наближеного розв'язання рівняння (2.9) полягає в тому, що дане рівняння замінюється рівнянням в скінченновимірному просторі

$$P_n^* F(P_n u) = 0, \tag{2.11}$$

причому розв'язок останнього рівняння називається наближеним розв'язком вихідного рівняння. Покажемо, що рівняння (2.11) еквівалентно системі (2.10). Дійсно, якщо h – довільний елемент із $\mathcal{U}^*$, то рівняння (2.11) еквівалентно рівнянню

$$0 = \left\langle h, P_n^* F(P_n u) \right\rangle = \left\langle P_n h, F(P_n u) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i,\ F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left\langle \varphi_i,\ F\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) \right\rangle,$$

а це рівняння через довільність β_i еквівалентне системі (2.10). Таким чином, метод Гальоркіна розв'язання рівняння (2.9) співпадає з проекційним методом розв'язання цього рівняння.

Лема 2.1. Нехай $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ – неперервний монотонний оператор, де $\mathcal{U}$ – дійсний сепарабельний нормований простір, що задовольняє на сфері $\|u\|_{\mathcal{U}} = r > 0$ умові

$$\left\langle u, F(u) \right\rangle > 0.$$

Тоді наближення Гальоркіна u_n задовольняє нерівності $\|u_n\|_{\mathcal{U}} < r$ і система Гальоркіна (2.10) розв'язна при будь-якому n.

Лема 2.2. Нехай наближення Гальоркіна u_n, що задовольняють системам (2.10), існують при будь-якому n, причому $\|u_n\| \le r$. Тоді якщо F – обмежений оператор, то послідовність $\{F(u_n)\}$ слабко збігається до нуля.

2.3 Застосування методів *R*-функцій та нелінійного методу Гальоркіна до моделювання нестаціонарних течій в’язкої теплопровідної рідини

Для розв’язання задачі (1.73) – (1.78) використаємо методи *R*-функцій та Гальоркіна.

Крайовим умовам (1.75), (1.78) задовольняють наступні жмутки функцій

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi,$$
$$\theta = h + \omega \Upsilon,$$

де $\Phi = \Phi(x, y, t)$ та $\Upsilon = \Upsilon(x, y, t)$ – невизначені компоненти структур;

$f = ECf_0$, $g = ECg_0$, $h = ECh_0$ – продовження відповідно функцій f_0, g_0, h_0 в Ω.

Нехай Φ та Υ достатньо гладкі, тоді у задачі (1.73) – (1.78) можна зробити заміну

$$\psi = \varphi + u,$$
$$\theta = h + v,$$

де $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$.

Отже, для функцій u і v отримаємо наступну систему рівнянь:

$$-\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \nu \Delta^2 u - \beta \frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= J(\Delta(\varphi + u), \varphi + u) + F, \ (x, y) \in \Omega, \ t > 0, \tag{2.12}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x, y), \ (x, y) \in \overline{\Omega}, \tag{2.13}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \ s \in \partial\Omega, \ 0 < t \le T, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \kappa\Delta v = J(\varphi + u, h + v) + G\,,\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{2.15}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0(x,y)\,,\ (x,y)\in\overline{\Omega}\,, \tag{2.16}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ s\in\partial\Omega\,,\ 0<t\le T\,, \tag{2.17}$$

де $J(u,v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$;

$F = \frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi - \nu\Delta^2\varphi + \beta\frac{\partial h}{\partial x}$;

$G = -\frac{\partial h}{\partial t} + \kappa\Delta h$

$u_0 = \psi_0 - \varphi\big|_{t=0}$, $v_0 = \theta_0 - h\big|_{t=0}$.

Вважатимемо, що u_0, $v_0 \in L(\Omega)$, $F(t)$, $G(t)\in L_2(0,T;L_2(\Omega))$.

В просторі $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ розглянемо оператори A, E, B_1, B_2, що діятимуть за правилами $Au = \Delta^2 u$, $Ev = \frac{\partial v}{\partial x}$, $B_1 u = -\Delta u$, $B_2 v = -\Delta v$ на областях визначень

$$D_A = \left\{ u \,\middle|\, u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^4(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{B_1} = \left\{ u \,\middle|\, u\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega),\ u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{B_2} = \left\{ v \,\middle|\, v\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega),\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_E = \left\{ v \,\middle|\, v\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}),\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

В роботі [35] доведено, що оператори A і B лінійні і додатно означені, J_1, J_2 – нелінійні, оператор E лінійний.

Введемо оператори J_1 та J_2, що діють в $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ за правилами

$$J_1(u) = J(\Delta(\varphi + u), \varphi + u)\,,\; J_2(u,v) = J(\varphi + u, h + v)$$

на області визначення

$$D_{J_1} = \left\{ u \,\middle|\, u \in C^3(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega}),\, u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$$D_{J_2} = \left\{ (u,v) \,\middle|\, (u,v) \in C^1(\overline{\Omega}) \times (C^1(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})),\, u\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Зрозуміло, що $D_A \subset D_{B_1}$, $D_A \subset D_{J_1}$, $D_A \times D_{B_2} \subset D_{J_2}$.

Тепер запишемо задачу (2.12) – (2.17) у операторній формі, тобто

$$\frac{d}{dt} B_1 u + \nu A u - \beta E v = J_1(u) + F\,,\; (x,y) \in \Omega\,,\; t > 0\,, \tag{2.18}$$

$$\frac{dv}{dt} + \kappa B_2 v = J_2(u,v) + G\,,\; (x,y) \in \Omega\,,\; t > 0\,, \tag{2.19}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0\,,\; (x,y) \in \overline{\Omega}\,, \tag{2.20}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0\,,\; (x,y) \in \overline{\Omega}\,. \tag{2.21}$$

Для будь-яких функцій u_1, u_2 з множини D_A введемо енергетичну норму $\|u\|_A^2$ та енергетичний добуток $[u_1,u_2]_A$, тобто

$$\|u\|_A^2 = \iint\limits_{\Omega} (\Delta u)^2\, dxdy\,, \tag{2.22}$$

$$[u_1,u_2]_A = (Au_1,u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint\limits_{\Omega} \Delta u_1 \cdot \Delta u_2 dxdy\,. \tag{2.23}$$

Нехай множина D_A поповнена в нормі (2.22), тоді для оператора A отримаємо енергетичний простір H_A.

Для будь-яких функцій u_1, u_2 з множини D_{B_1} введемо енергетичну норму $\|u\|_{B_1}^2$ та енергетичний добуток $[u_1, u_2]_{B_1}$, тобто

$$\|u\|_{B_1}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dxdy, \tag{2.24}$$

$$[u_1, u_2]_{B_1} = (B_1 u_1, u_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dxdy. \tag{2.25}$$

Нехай множина D_{B_1} поповнена в нормі (2.24), тоді для оператора B_1 отримаємо енергетичний простір H_{B_1}.

Для будь-яких функцій v_1, v_2 з множини D_{B_2} введемо енергетичну норму $\|v\|_{B_2}^2$ та енергетичний добуток $[v_1, v_2]_{B_2}$, тобто

$$\|v\|_{B_2}^2 = \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy, \tag{2.26}$$

$$[v_1, v_2]_{B_2} = (B_2 v_1, v_2)_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} \nabla v_1 \cdot \nabla v_2 dxdy. \tag{2.27}$$

Нехай множина D_{B_2} поповнена в нормі (2.26), тоді для оператора B_2 отримаємо енергетичний простір H_{B_2}.

Введемо наступну множину функцій

$$W_T = \{(w_1, w_2) \,|\, (w_1, w_2) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)) \times L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),$$
$$(w_1', w_2') \in L_2(0,T; L_2(\Omega) \times L_2(0,T; L_2(\Omega)), \, w_1(T) = 0, w_2(T) = 0\}.$$

Означення 2.5. Пару функцій $(u(t), v(t))$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (2.18) – (2.21), якщо виконуватимуться наступні умови:

а) $(u(t), v(t)) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)) \times L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$;

б) для будь-якої пари елементів $(w_1(t), w_2(t)) \in W_T$ виконуються рівності:

$$-\int_0^T \left[u, \frac{dw_1}{dt}\right]_{B_1} dt + \nu \int_0^T [u, w_1]_A dt - \beta \int_0^T (Ev, w_1)_{L_2(\Omega)} dt =$$

$$= \int_0^T (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)} dt + \int_0^T (F, w_1)_{L_2(\Omega)} dt,$$

$$-\int_0^T \left(v, \frac{dw_2}{dt}\right)_{L_2(\Omega)} dt + \kappa \int_0^T [v, w_2]_{B_2} dt = \int_0^T (J_2(u,v), w_1)_{L_2(\Omega)} dt + \int_0^T (G, w_2)_{L_2(\Omega)} dt.$$

Тепер задачу (2.18) – (2.21) можна записати у варіаційній формі

$$\left[\frac{du}{dt}, w_1\right]_{B_1} + \nu [u, w_1]_A - \beta (Ev, w_1)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= (J_1(u), w_1)_{L_2(\Omega)} + (F, w_1)_{L_2(\Omega)}, \ 0 < t \le T, \tag{2.28}$$

$$\left[\frac{dv}{dt}, w_2\right]_{L_2(\Omega)} + \kappa [v, w_2]_{B_2} = (J_2(u,v), w_2)_{L_2(\Omega)} + (G, w_2)_{L_2(\Omega)}, \ 0 < t \le T, \tag{2.29}$$

$$(u, w_1)_{L_2(\Omega)} = 0, \ t = 0, \tag{2.30}$$

$$(v, w_2)_{L_2(\Omega)} = 0, \ t = 0. \tag{2.31}$$

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції u та v шукатимемо у вигляді

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i, \tag{2.32}$$

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t) \upsilon_i, \tag{2.33}$$

де $c_i(t)$, $d_i(t)$ – невідомі функції;

$\{\varphi_i\}$, $\{\upsilon_i\}$ – такі координатні послідовності, що:

а) $\varphi_i \in H_A$, $\upsilon_i \in H_{B_2}$ для будь-якого i;

б) $\varphi_1, ..., \varphi_n$ та $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ є лінійно незалежними для будь-якого n;

в) $\{\varphi_i\}$ повна в H_A, а $\{\upsilon_i\}$ повна в H_{B_2}.

Отримаємо систему звичайних диференційних рівнянь після підстановки (2.32), (2.33) в (2.28) – (2.31), тобто для визначення $c_i(t)$ та $d_i(t)$ матимемо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} c_i(t)[\varphi_i, \varphi_j]_{B_1} + \nu \sum_{i=1}^{n} c_i(t)[\varphi_i, \varphi_j]_A - \beta \sum_{i=1}^{n} d_i(t)(E\upsilon_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \left(J_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i \right), \varphi_j \right)_{L_2(\Omega)} + (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.34}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} d_i(t)(\upsilon_i, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)} + \kappa \sum_{i=1}^{n} d_i(t)[\upsilon_i, \upsilon_j]_{B_2} =$$

$$= \left(J_2\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i, \sum_{i=1}^{n} d_i(t)\upsilon_i \right), \upsilon_j \right)_{L_2(\Omega)} + (G, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.35}$$

$$c_i(0) = 0, \; i = 1, 2, ..., n, \tag{2.36}$$

$$d_i(0) = 0, \; i = 1, 2, ..., n. \tag{2.37}$$

де $j = 1, 2, ..., n$.

Розпишемо праву частину (2.34) більш детально

$$\left(J_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\varphi_i \right), \varphi_j \right) = \iint_{\Omega} J_1(\Delta(\varphi + u_n), \varphi + u_n)\varphi_j dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} J_1(\varphi + u_n, \varphi_j)\Delta(\varphi + u_n)dxdy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial(\varphi + u_n)}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi + u_n)}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] \Delta(\varphi + u_n)dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + \frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right] [\Delta\varphi + \Delta u_n]dxdy =$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right]\Delta\varphi dxdy+$$

$$+\iint_\Omega\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}+\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}-\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right]\Delta u_n dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right]\Delta\varphi dxdy+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\iint_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\Delta\varphi dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\iint_\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\Delta\varphi_i dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}c_i^2(t)\iint_\Omega\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\Delta\varphi_i dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n}c_i(t)c_k(t)\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\Delta\varphi_k+\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)\Delta\varphi_i\right]dxdy\,.$$

Розпишемо праву частину (2.35) більш детально

$$\left(J_2\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\varphi_i,\sum_{i=1}^{n}d_i(t)\upsilon_i\right),\upsilon_j\right)_{L_2(\Omega)}=\iint_\Omega J_2(\varphi+u_n,h+v_n)\upsilon_j dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((\varphi+u_n)\frac{\partial(h+v_n)}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left((\varphi+u_n)\frac{\partial(h+v_n)}{\partial x}\right)\right]\upsilon_j dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left((\varphi+u_n)\frac{\partial(h+v_n)}{\partial y}\right)\upsilon_j dxdy-\iint_\Omega\frac{\partial}{\partial y}\left((\varphi+u_n)\frac{\partial(h+v_n)}{\partial x}\right)\upsilon_j dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial(h+v_n)}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial y}-\frac{\partial(h+v_n)}{\partial y}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x}\right](\varphi+u_n)dxdy=\iint_\Omega J(h+v_n,\upsilon_j)(\varphi+u_n)dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial y}(\varphi+u_n)+\frac{\partial v_n}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial y}(\varphi+u_n)-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x}(\varphi+u_n)-\frac{\partial v_n}{\partial y}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x}(\varphi+u_n)\right]dxdy=$$

$$=\iint_\Omega\left[\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x}\right]\varphi dxdy+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\iint_\Omega\left[\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\upsilon_j}{\partial x}\right]\varphi_i dxdy+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} d_i(t) \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x} \right] \varphi dxdy +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_i(t) c_k(t) \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial y} - \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x} \right] \varphi_k dxdy .$$

Запишемо задачу (2.34) – (2.37) у наступному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}_i(t) b_{ij}^{(1)} + \nu \sum_{i=1}^{n} c_i(t) a_{ij} - \beta \sum_{i=1}^{n} d_i(t) e_{ij} - J_1(t) - l_j(t) = 0 , \tag{2.38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{d}_i(t) r_{ij} + \kappa \sum_{i=1}^{n} d_i(t) b_{ij}^{(2)} - J_2(t) - m_j(t) = 0 , \tag{2.39}$$

$$c_i(0) = 0 ,\ i = 1,2,...,n , \tag{2.40}$$

$$d_i(0) = 0 ,\ i = 1,2,...,n , \tag{2.41}$$

де $b_{ij}^{(1)} = [\varphi_i, \varphi_j]_{B_1}$, $r_{ij} = (\upsilon_i, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)}$, $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A$, $b_{ij}^{(2)} = [\upsilon_i, \upsilon_j]_{B_2}$, $l_j(t) = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$, $m_j(t) = (G, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)}$, $e_{ij} = (E\upsilon_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}$, $J_1(t) = \left(J(\Delta(u_0 + u_n), u_0 + u_n), \varphi_j \right)_{L_2(\Omega)}$, $J_2(t) = \left(J(u_0 + u_n, v_0 + v_n), \upsilon_j \right)_{L_2(\Omega)}$.

Використовуючи матричні позначення $C(t) = \{c_i(t)\}$, $D(t) = \{d_i(t)\}$, $B_1 = \{[\varphi_i, \varphi_j]_{B_1}\}$, $A = \{[\varphi_i, \varphi_j]_A\}$, $E = \{(Ev_j, \varphi_i)_{L_2(\Omega)}\}$, $L(t) = \{(F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $R = \{(\upsilon_i, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $B_2 = \{[\upsilon_i, \upsilon_j]_{B_2}\}$, $M(t) = \{(G, \upsilon_j)_{L_2(\Omega)}\}$, $J_1(t) = \left\{ \left(J(\Delta(u_0 + u_n), u_0 + u_n), \varphi_j \right)_{L_2(\Omega)} \right\}$, $J_2(t) = \left\{ \left(J(u_0 + u_n, v_0 + v_n), \upsilon_j \right)_{L_2(\Omega)} \right\}$ задача (2.38) – (2.41) прийме наступний вигляд

$$B_1 C'(t) + \nu A C(t) - \beta E D(t) - J_1(t) - L(t) = 0 ,\ 0 < t \le T , \tag{2.42}$$

$$R D'(t) + \kappa B_2 D(t) - J_2(t) - M(t) = 0 ,\ 0 < t \le T , \tag{2.43}$$

$$C(0) = 0 , \tag{2.44}$$

$$D(0) = 0 , \tag{2.45}$$

де B_1, B_2, A, R – квадратні матриці порядку n;

$C(t)$, $D(t)$, $L(t)$, $M(t)$, $J_1(t)$, $J_2(t)$ – матриці стовпці.

Розглянемо твердження, що доведено у роботі [35].

Твердження 2.1. Наведених властивостей достатньо для того, щоб розв'язок задачі Коші (2.42) – (2.45) існував і був єдиним, тобто для будь-якого n наближення Гальоркіна до розв'язку задачі (2.12) – (2.17) визначені і будуються єдиним чином.

Теорема 2.2. Нехай u_0, $v_0 \in L_2(\Omega)$. Тоді варіаційна задача (2.28) – (2.31) має єдиний узагальнений розв'язок при малих числах Рейнольдса, Прандтля і Пекле причому $u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_A)$, $v \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_{B_1})$.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 11 як система символьної математики

Системи комп'ютерної алгебри з'явилися на початку 1960-х і розвивалися в основному в двох напрямках: теоретична фізика і створення штучного інтелекту. Слід відмітити, що СКА в своєму розвитку слідували за операційними системами, а іноді СКА створювалася і працювала тільки з однією операційною системою.

Першими популярними системами комп'ютерної алгебри були muMATH, Reduce, Derive, Macsyma. Зараз найбільш оптимальні комерційні системи – Mathematica, Mathlab і Mathcad, що широко використовуються математиками, вченими та інженерами з усього світу.

Mathematica – одна з найпотужніших систем, що має надзвичайно велику функціональну наповненість (має навіть синтезування звуку) [40]. Ця система є єдиною платформою для розробки, що повністю інтегрує обчислення в робочий процес від початку до кінця. Вона відрізняється від інших програмних продуктів охопленням широкого кола задач оскільки її розробники мають мету об'єднати всі відомі математичні методи, що використовуються для розв'язання наукових задач, в уніфікованому і узгодженому вигляді, включаючи аналітичні і чисельні розрахунки.

За основу була використана спеціально розроблена мова символьного програмування, що може оперувати дуже великим спектром різних об'єктів з використанням невеликої кількості базисних конструкцій. Однак спочатку програма не отримала великої популярності у зв'язку зі складністю її освоєння і неможливості її використання без вивчення об'ємної документації. Тільки в 1991 році, коли розробники усунули більшість помилок Mathematica 2.0, а також вбудували більш простий інтерфейс і підключили вказівки для інтегрованих функцій, програма почала швидко набирати популярність.

Mathematica 11 дає можливість спеціалістам розв'язувати велику кількість складних завдань, не вдаючись в тонкості програмування. Завдяки цьому програма отримала широку розповсюдженість в таких областях як фізика, біологія, економіка. Вона також використовується для виконання і оформлення інженерних проектів.

Вміння проводити аналітичні розрахунки – одна з головних переваг цієї програми. Mathematica вміє перетворювати і спрощувати алгебраїчні вирази, диференціювати і обчислювати визначені та невизначені інтеграли, розв’язувати алгебраїчні та диференціальні рівняння, розкладати функції у ряди тощо.

Таким чином, система Mathematica є унікальним за своєю повнотою довідником по різноманітним математичним поняттям, алгоритмам і функціям. Вона забезпечує найвищу ступінь візуалізації обчислень, починаючи від подання вихідних даних і закінчуючи виведенням проміжних і кінцевих результатів обчислення. Отже, головним для системи стає надання користувачеві серйозних і часом нових знань у різних галузях людського інтелекту.

3.2 Алгоритм розв’язання задачі моделювання нестаціонарних течій в’язкої теплопровідної рідини

Використовуючи необхідну інформацію, що наведена у п. 2.3, побудуємо алгоритм для розв’язання початково-крайової задачі (1.73) – (1.78). Етапи цього алгоритму полягають у наступному:

а) задаємо фізичні параметри κ, ν, β процесу;

б) задаємо початкові та крайові умови для функції температури та течії;

в) будуємо нормалізовану функцію $\omega(x, y)$ за допомогою методу R-функцій;

г) будуємо координатні функції $\{\varphi_i\}$, $\{\upsilon_i\}$;

д) формуємо матриці та вектори $C(t)$, $D(t)$, B_1, A, E, $L(t)$, B_2, $M(t)$, R, $J_1(t)$, $J_2(t)$ для побудови системи диференціальних рівнянь (2.42) – (2.45);

є) розв'язуємо систему диференціальних рівнянь, що отримана на минулому етапі, для знаходження $d_k(t)$, $c_k(t)$, $k = 1, 2, ..., n$;

ж) будуємо наближені розв'язки $u_n(x, y, t)$, $v_n(x, y, t)$ згідно (2.32) та (2.33);

з) будуємо функцію течії та функцію температури згідно з формулами

$$\theta(x, y, t) = h(x, y, t) + v_n(x, y, t),$$
$$\psi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + u_n(x, y, t);$$

і) будуємо графічне подання наближеного розв'язку – лінії рівня функції температури, течії, завихореності, поле тиску та векторне поле швидкостей.

3.3 Опис програми

За допомогою математичного пакету Mathematica 11.1 було програмно реалізовано алгоритм, що наведений у п. 2.4. Опишемо блоки програми.

У першому блоці встановлюються геометричні та фізичні параметри системи.

У другому блоці будуються система функцій $\{\tau_i\}$, що є повною в $L_2(\Omega)$ та функція $\omega(x, y)$, яка описує досліджувану область з використанням апарату R-функцій.

У третьому блоці будуються координатні функції φ_i та υ_i.

У четвертому блоці будуються матриці, що задовольняють системі (2.42) – (2.45).

У п'ятому блоці формуються системи (2.42), (2.43) при різних значеннях чисел Gr та Pe.

У шостому блоці розв'язуються системи (2.42) – (2.45) при різних значеннях чисел Gr та Pe.

У сьомому блоці шукаються наближені розв'язки v_n за допомогою методу Гальоркіна, будуються функції температури $\theta(x,y,t)$ та графічно зображуються лінії рівня для температури $\theta(x,y,t)$ при різних значеннях чисел Gr, Pe і параметру t.

У восьмому блоці шукаються наближені розв'язки u_n за допомогою метода Гальоркіна, будуються функції течії $\psi(x,y,t)$ та графічно зображуються лінії рівня для $\psi(x,y,t)$ при різних значеннях чисел Gr, Pe і параметру t.

У дев'ятому блоці будуються векторні поля швидкості при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

У десятому блоці графічно зображуються лінії рівня для функцій завихореності $\zeta(x,y,t)$ при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

У одинадцятому блоці шукаються $\max\limits_{y\in[0,1]} v_x(0,5;y)$, $\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$ при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

У дванадцятому блоці шукаються $(x_{\text{v.c.}}, y_{\text{v.c.}})$ та значення функцій $\psi(x,y,t)$, $\zeta(x,y,t)$ в цих координатах вихорового центру при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

У тринадцятому блоці шукаються норми функції температури $\|\theta\|_{L_2(\Omega)}$, значення теплового потоку $q(0,25;0,25)$ за напрямком $\vec{l}=(0,5;1)$ в точці $(0,25;0,25)$ та значення функції температури в точках максимума при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

У чотирнадцятому блоці графічно зображуються лінії рівня для поля тиску $p(x,y)$ при різних значеннях чисел Gr та Pe і в різні моменти часу t.

Код програми наведено в додатку А.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент для задачі (1.73) – (1.78) було проведено для квадратної області $\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<1,\,0<y<1\}$ при $\mathrm{Re}=100$ та різних числах Gr і Pe. Геометрія досліджуваної області описується функцією

$$\omega(x,y)=[x(1-x)]\wedge_0[y(1-y)],$$

де $\wedge_0$ – знак R-кон'юнкції.

Відповідно до того, що рух течії розпочинається зі стану спокою, початкові та крайові умови для функції течії мають наступний вигляд

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega}=0\,,\ \psi\big|_{t=0}=0\,.$$

Початкові та крайові умови для функції температури у зв'язку з підігрівом області Ω зверху, мають наступний вигляд:

$$\theta\big|_{\partial\Omega}=\begin{cases} x(1-x)(1-e^{-t}), & y=1,\\ 0, & x=0, x=1, y=0,\end{cases}\qquad \theta\big|_{t=0}=0\,.$$

Остаточно, задачу для функції течії і температури записуємо так

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\nu\Delta^2\psi-\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y},\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\kappa\Delta\theta=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x},\ (x,y)\in\Omega\,,\ t>0\,, \tag{3.2}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega}=0\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega}=0\,,\ t\ge 0\,, \tag{3.3}$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0\,,\ (x, y) \in \bar{\Omega}\,, \tag{3.4}$$

$$\theta\big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} x(1-x)(1-e^{-t}), & y = 1, \\ 0, & x = 0,\, x = 1,\, y = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \partial\Omega\,,\ t \ge 0\,, \tag{3.5}$$

$$\theta\big|_{t=0} = 0\,,\ (x, y) \in \bar{\Omega}\,. \tag{3.6}$$

Шукатимемо розв'язок задачі (3.1) – (3.6) у вигляді жмутків функцій

$$\psi = \omega^2 \Phi\,, \qquad \theta = h + \omega \Upsilon\,,$$

де

$$h(x, y, t) = \frac{x^2(1-x)^2 y}{1 - y + xy(1-x)}(1 - e^{-t})\,.$$

Використовуючи поліноми Лежандра, побудуємо систему функцій $\{\tau_i\}$, що буде повною в $L_2(\Omega)$. Для цього оберемо

$$\tau_{ij}(x, y) = P_i(2x-1) P_j(2y-1)\,,\ i + j = 0, 1, \ldots,$$

де $P_k(z)$ – поліном Лежандра k-го стtпеня.

Обчислимо поліноми Лежандра за формулою Родріга

$$P_k(z) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^2 - 1)^k\,,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Використаємо 21 координатну функцію для апроксимації невизначених компонент структури розв'язку Φ та Υ.

На рис. Б.1 – Б.4, Б.6 – Б.9, Б.11 – Б.14, Б.16 – Б.19, Б.21 – Б.24, Б.26 – Б.29, Б.31 – Б.34, Б.36 – Б.39, Б.41 – Б.44, Б.46 – Б.49, Б.51 – Б.54, Б.56 – Б.59, Б.61 – Б.64, Б.66 – Б.69, Б.71 – Б.74, Б.76 – Б.79 Додатку Б наведено лінії рівня функції течії, функції температури, векторне поле швидкостей та лінії рівня завихореності при різних числах Gr, Pe та різних значеннях $t \in (0, 5]$.

Підставивши (1.24) в (1.33), (1.34), отримаємо диференціальні рівняння для визначення компонент градієнту поля тиску, а саме

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu \Delta v_x - \frac{\partial v_x}{\partial t} - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} =$$

$$= \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \nu \Delta v_y - \frac{\partial v_y}{\partial t} - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} =$$

$$= -\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \tag{3.8}$$

Після застосування для диференціальних рівнянь (3.7), (3.8) процедури відновлення функції за її повним диференціалом, отримаємо відновлене рівняння поля тиску $p(x, y)$

$$p(x, y) = \int_{M_0 M} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + C =$$

$$= \int_{M_0 M} \left(\nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx +$$

$$+ \left(-\nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) dy + C,$$

де $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ – фіксована та довільна точки області Ω.

На рис. Б.5, Б.10, Б.15, Б.20, Б.25, Б.30, Б.35, Б. 40, Б.45, Б.50, Б.55, Б.60, Б.65, Б.70, Б.75, Б.80 наведено поля тиску при різних числах Gr, Pe, різних значеннях $t \in (0, 5]$, $C = 0$ та $M_0(0{,}5; 0{,}5)$.

В таблиці 3.1 наведено характеристики функції температури при різних параметрах моделі. Тут $(x_{\text{t.c.}}, y_{\text{t.c.}})$ – координати максимуму функції температури, $\theta(x_{\text{t.c.}}, y_{\text{t.c.}})$ – значення температури в точках максимума, $q(0,25;0,25)$ – значення теплового потоку за напрямком $\vec{l} = (0,5;1)$ в точці $(0,25;0,25)$, де $q(x,y) = \kappa\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\cos\beta\right)$, $\|\theta\|_{L_2(\Omega)}$ – норма функції температури у просторі $L_2(\Omega)$.

Таблиця 3.1 – Характеристики функції температури

	t	$(x_{\text{t.c.}}, y_{\text{t.c.}})$	$\theta(x_{\text{t.c.}}, y_{\text{t.c.}})$	$\|\theta\|_{L_2(\Omega)}$	$q(0,25;0,25)$
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=1$	0,5	(0,5, 1)	0,098367	0,025786	3,297472
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=1$	1,5	(0,5, 1)	0,194217	0,050926	6,517107
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=1$	3,0	(0,5, 1)	0,237553	0,062292	7,972578
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=1$	5,0	(0,5, 1)	0,248316	0,065114	8,333758
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=50$	0,5	(0,5, 1)	0,098367	0,025366	0,061778
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=50$	1,5	(0,5, 1)	0,194217	0,050766	0,128723
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=50$	3,0	(0,5, 1)	0,237553	0,062243	0,158799
$\mathrm{Gr}=1,\ \mathrm{Pe}=50$	5,0	(0,5, 1)	0,248316	0,065080	0,165988
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=1$	0,5	(0,5, 1)	0,098367	0,025786	3,297132
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=1$	1,5	(0,5, 1)	0,194217	0,050921	6,512536
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=1$	3,0	(0,5, 1)	0,237553	0,062277	7,956828
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=1$	5,0	(0,5, 1)	0,248316	0,065092	8,303157
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=50$	0,5	(0,5, 1)	0,098367	0,025353	0,061502
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=50$	1,5	(0,5, 1)	0,194217	0,050570	0,124462
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=50$	3,0	(0,5, 1)	0,237553	0,061563	0,144055
$\mathrm{Gr}=50,\ \mathrm{Pe}=50$	5,0	(0,5, 1)	0,248316	0,063974	0,137776

В таблиці 3.2 наведено характеристики функції течії у вихоровому центрі при різних параметрах моделі. Тут $(x_{\text{v.c.}}, y_{\text{v.c.}})$ – координати вихорового центру, $\zeta(x_{\text{v.c.}}, y_{\text{v.c.}})$, $\psi(x_{\text{v.c.}}, y_{\text{v.c.}})$ – значення функції вихора швидкості та течії у вихоровому центрі, де $\zeta(x,y,t) = -\Delta\psi(x,y,t)$.

Таблиця 3.2 – Характеристики функції течії

	t	$(x_{v.c}, y_{v.c})$	$\psi(x_{v.c}, y_{v.c})$	$\zeta(x_{v.c}, y_{v.c})$
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	0,5	(0,261728; 0,665625)	0,000247	0,016187
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	1,5	(0,261704; 0,665583)	0,001677	0,109981
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	3,0	(0,261576; 0,665723)	0,004755	0,31192
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	5,0	(0,261189; 0,666168)	0,009297	0,610346
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	0,5	(0,261762; 0,670554)	0,000231	0,015222
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	1,5	(0,261713; 0,667035)	0,001644	0,108001
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	3,0	(0,261577; 0,666379)	0,004712	0,309372
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	5,0	(0,261184; 0,666570)	0,009246	0,607311
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	0,5	(0,261674; 0,665693)	0,012340	0,809439
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	1,5	(0,260501; 0,666923)	0,083872	5,514379
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	3,0	(0,254042; 0,669611)	0,237252	15,808430
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	5,0	(0,239089; 0,647885)	0,450451	31,261390
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	0,5	(0,261699; 0,670698)	0,011514	0,760486
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	1,5	(0,260449; 0,668949)	0,081576	5,376907
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	3,0	(0,253894; 0,671721)	0,230023	15,354540
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	5,0	(0,238777; 0,651009)	0,431266	29,921210

В таблиці 3.3 наведено характеристики функції течії в перерізі та норми наближених розв'язків у просторі $L_2(\Omega)$ при різних параметрах моделі. Тут $v_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$, $\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$ – норми координат швидкості v_x та v_y у просторі $L_2(\Omega)$, $\max\limits_{y\in[0,1]} v_x(0,5;y)$ – максимум координати швидкості v_x у перерізі $x = 0,5$, $\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$, $\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$ – норми вихора швидкості та функції течії у просторі $L_2(\Omega)$.

Таблиця 3.3 – Характеристики функції течії в перерізі та норми наближених розв'язків у просторі $L_2(\Omega)$

	t	$\|v_x\|_{L_2(\Omega)}$	$\|v_y\|_{L_2(\Omega)}$	$\max\limits_{y\in[0,1]} v_x(0,5;y)$	$\|\zeta\|_{L_2(\Omega)}$	$\|\psi\|_{L_2(\Omega)}$
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	0,5	0,000402	0,000690	0,387376	0,009250	0,000105
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	1,5	0,002730	0,004691	0,388374	0,062851	0,000713
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	3,0	0,007742	0,013294	0,392414	0,178234	0,002022
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=1$	5,0	0,015146	0,025950	0,405855	0,348649	0,003948
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	0,5	0,000378	0,000641	0,363561	0,008677	0,000098
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	1,5	0,002680	0,004590	0,381966	0,061673	0,000698
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	3,0	0,007678	0,013165	0,389463	0,176725	0,002002
$\mathrm{Gr}=1$, $\mathrm{Pe}=50$	5,0	0,015070	0,025797	0,403833	0,346870	0,003925
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	0,5	0,020092	0,034513	0,388984	0,462540	0,005249
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	1,5	0,136782	0,233442	0,435187	3,148376	0,035537
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	3,0	0,390559	0,644470	0,625104	8,999125	0,098473
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=1$	5,0	0,757770	1,169895	0,703183	17,57667	0,179103
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	0,5	0,018860	0,032030	0,364396	0,433517	0,004870
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	1,5	0,133383	0,226546	0,422927	3,068981	0,034487
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	3,0	0,379850	0,623527	0,620608	8,755673	0,095293
$\mathrm{Gr}=50$, $\mathrm{Pe}=50$	5,0	0,726479	1,119591	0,701726	16,89140	0,171463

Отримані результати якісно добре узгоджуються з результатами, що отримані у роботі [27]. Вони були представлені на Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології та комп'ютерне моделювання» (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.) [46].

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи було досліджено метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна в частині їх використання у розв'язанні задачі математичного моделювання плоскопаралельної нестаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини в плоскій однозв'язній обмеженій області з кусково-гладкою межею. Нестаціонарна течія досліджувалася з різними фізичними параметрами. Також експериментальним шляхом була проаналізована залежність функції температури та функції течії від зміни чисел Прандтля, Грасгофа та параметру часу t.

1. Був проведений огляд існуючих математичних моделей нестаціонарної течії в'язкої теплопровідної рідини та існуючих методів для їх чисельного розв'язання. В наслідок цього було виділено використання методу R-функцій, та нелінійного методу Гальоркіна як найбільш інтуїтивно простих і ефективних методів для розв'язання задач цього класу.

2. Був проведений огляд існуючих крайових задач для функції течії та температури. Крайові умови та геометрія досліджуваної задачі, задовольнялися жмутками функцій, що вводилися за допомогою методу R-функцій. Наближений розв'язок знайдено шляхом використання методу Гальоркіна.

3. Шляхом використання підсумкових результатів, було створено алгоритм розв'язання досліджуваної початково-крайової задачі структурним методом (методом R-функцій) та нелінійним методом Гальоркіна. Побудований алгоритм був програмно реалізований у системі комп'ютерної алгебри Mathematica. Функції температури, течії та їх основні характеристики були досліджені при різних фізичних параметрах моделі. Також була проаналізована залежність характеристик функції течії та температури від різних значень чисел Грасгофа, Пекле в різні моменти часу t.

4. Розроблений у пакеті Mathematica програмний продукт є доцільним при дослідженні задач, геометрія яких може бути описана методом R-функцій, для функції температури і течії з різними типами крайових умов.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Москва : Мир, 1991. Т. 2. 552 с.

2. ПОИВС | Уравнение Эйлера. URL : http://poivs.tsput.ru/ru/Math/Equations/NonlinearEquations/EulerEquation (дата звернення: 28.09.2022).

3. В’язкість – Вікіпедія. URL : https://uk.wikipedia.org/wiki/В’язкість (дата звернення: 28.09.2022).

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Москва : Наука, 1986. 736 с.

5. Конвективный теплоообмен. URL : https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/063/670.htm (дата звернення: 28.09.2022).

6. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф. Гидрогазодинамика. Часть 1. Гидравлика : учебное пособие. Тамбов : Тамбовский государственный технический университет, 2015. 140 с.

7. Плановский А. Н., Рамм В. М., Каган С. З. Процессы и аппараты химической технологии. Москва : Химия, 1967. 848 с.

8. Число Струхаля – Вікіпедія. URL : https://uk.wikipedia.org/wiki/ Число_Струхаля (дата звернення: 28.09.2022).

9. Число Прандтля. URL : https://spravochnick.ru/arhitektura_i_stroitelstvo/chislo_prandtlya/ (дата звернення: 28.09.2022).

10. Грасгофа число – Физическая энциклопедия. URL : http://femto.com.ua/articles/part_1/0872.html (дата звернення: 28.09.2022).

11. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Москва : Наука, 1986. 382 с.

12. Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течения вязкой жидкости. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1984. 200 с.

13. Слёзкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 520 с.

14. Журавлев В. М., Зиновьев Д. А. Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула-

Хопфа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. № 4 (24). С. 174–190.

15. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R-функций // Радиоэлектроника и информатика. 2010. № 2. С. 40–46.

16. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / А. Д. Госмен, В. М. Пан, А. К. Ранчел [и др.]. Москва : Мир, 1972. 320 с.

17. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление / Е. В. Бруяцкий, А. Г. Костин, Е. И. Никифорович, Н. В. Розумнюк // Прикладная гидромеханика. 2007. Т. 10, № 2. С. 13–23.

18. Finite element modified method of characteristics for the Navier–Stokes equations. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0363(20000229)32:4%3C439::AID-FLD946%3E3.0.CO;2-Y (дата звернення: 28.09.2022).

19. Артюх А. В., Яловега И. Г. Численный анализ нестационарных линеаризованных задач вязкой теплопроводной жидкости // Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3. С. 22–28.

20. Численный анализ процессов перемешивания методом R-функций / Н. В. Гибкина, Н. С. Роговой, М. В. Сидоров, А. В. Стадникова // Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3. С. 28–34.

21. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1986. 351 с.

22. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва : Мир, 1980. 616 с.

23. Erturk E., Corke T. C., Gökçöl C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 48. P. 747–774.

24. Ozisik N. Finite Difference Methods in Heat Transfer. Boca Raton, Florida : CRC Press. 1994. 432 p.

25. Литвин О. М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ : Наук. думка, 2005. 344 с.

26. Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. Москва : Издательство Моск. ун-та, 1991. 156 с.

27. Смагулов Ш. С., Сироченко В. П., Орунханов М. К. Численное исследование течений жидкости в нерегулярных областях. Алматы : Издательство Казахского национального университета им. аль-Фараби, 2001. 276 с.

28. Смагулов Ш. С., Орунханов М. К. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса с неоднородными граничными условиями // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 10, С. 121–127.

29. Смагулов Ш. С., Темирбеков Н. М., Камаубаев К. С. Моделирование методом фиктивных областей граничного условия для давления в задачах течения вязкой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2000. Т. 3, № 1. С. 57–71.

30. Особенности метода расчета. URL : https://studylib.ru/doc/117154/2-osobennosti-metoda-rascheta (дата звернення: 28.09.2022).

31. Могилевский И. Ш., Охота В. И. Метод конечных элементов для задачи о плоском стационарном течении жидкости со свободной границей // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2007. № 5. С. 47–60.

32. Мазо А. Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. Сеточные схема метода конечных элементов. Учебное пособие. Казань, 2008. 125 с.

33. Дж. Коннор, К. Бреббиа. Метод конечных элементов в механике жидкости. Ленинград : Судостроение, 1979. 264 с.

34. Гусев А. А. Гидравлика : учебник для вузов. Москва : Юрайт, 2013. 285 с.

35. Артюх А. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом R-функцій нестаціонарних течій в'язкої нестисливої рідини : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 “Математичне моделювання та обчислювальні методи” / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2015. 251 с.

36. Лисняк А. А., Гоменюк С. И. Применение R-функций для геометрического моделирования объектов сложной формы // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. 2009. Т. № 2. С. 76–81.

37. Ламтюгова С. Н. Математичне моделювання та чисельний аналіз методом *R*-функцій задач обтікання тіл в'язкою нестисливою рідиною : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2016. 273 с.

38. Сидоров М. В. Математичне моделювання та чисельний аналіз течій в'язкої рідини в однозв'язних і багатозв'язних областях методом *R*-функцій : дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : [спец.] 01.05.02 "Математичне моделювання та обчислювальні методи" / Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. Харків, 2008. 202 с.

39. Рвачев В. Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

40. Finite element modified method of characteristics for the Navier–Stokes equations. URL : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0363(20000229)32:4%3C439::AID-FLD946%3E3.0.CO;2-Y (дата звернення: 28.09.2022).

40. Современные системы компьютерной алгебры. URL : https://studfile.net/preview/7636147/page:2/ (дата звернення: 28.09.2022).

41. Эффективные методы численного решения уравнений гидродинамики в сложных областях. URL : https://fizmathim.com/read/468900/a?#?page=3 (дата звернення: 28.09.2022).

42. Мазо А. Вычислительная гидродинамика. Ч. 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Учебное пособие. Казань, 2018. 165 с.

43. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. Москва : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. 258 с.

44. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Москва : Мир, 1988. 352 с.

45. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. 468 с.

46. Курлов Є. Е., Здорик Н. В., Сидоров М. В. Метод R-функцій та нелінійний метод Гальоркіна у задачах математичного моделювання нестаціонар-

них течій в’язкої теплопровідної рідини // Міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та комп’ютерне моделювання» : матеріали статей (м. Івано-Франківськ, 15-16 грудня 2022 р.). Івано-Франківськ : ПНУ ім. В. Стефаника, 2022. С. 168 –171.