

И.П. ЗАХАРОВ

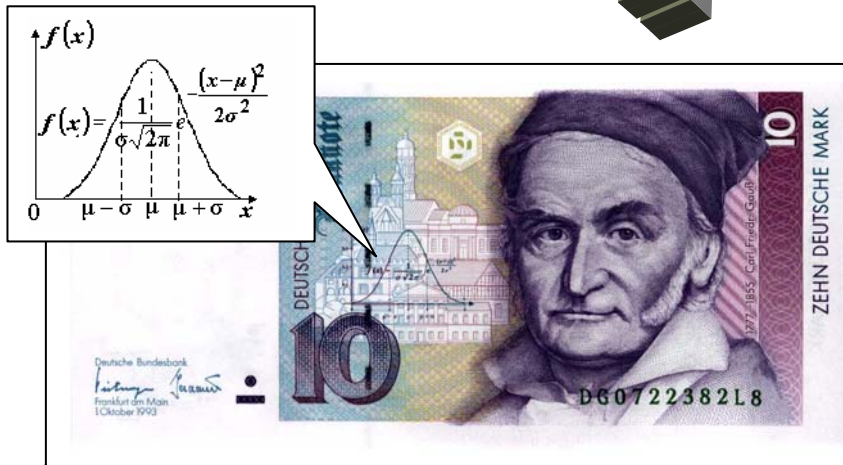
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Министерство образования и науки Украины
Институт содержания и методов обучения
Харьковский государственный технический
университет радиоэлектроники

И.П. Захаров

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие



**ХАРЬКОВ
2000 г.**

РЕКОМЕНДОВАНО
научно – методическим советом.
Протокол №1 от 22.10.99

Харьков 2000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая метрология является предметом базового курса специальности “Метрология и измерительная техника”. В отличие от практической метрологии, занимающейся вопросами практического применения разработок теоретической метрологии и положений законодательной метрологии, и законодательной метрологии, формулирующей обязательные технические и юридические требования по применению единиц физических величин, эталонов, методов и средств измерений, направленных на обеспечение единства и необходимой точности измерений в интересах общества, теоретическая метрология изучает общие теоретические основы измерений.

Основными разделами теоретической метрологии традиционно являются:

- основы обеспечения единства измерений (включая стандартизацию единиц физических величин, их воспроизведение и методы передачи их размера);
- теория погрешностей и методы обработки результатов измерений;
- методы и средства измерительной техники.

В этой последовательности производится изложение материала в учебном пособии.

Излагаемый курс – первый в цепочке метрологических дисциплин, изучаемых в рамках специальности. Поэтому вопросам изучения терминологии и классификации основных понятий метрологии в нем уделено достаточно большое внимание.

Для закрепления изучаемого материала и облегчения контроля его усвоения в конце каждого раздела приводится перечень контрольных вопросов, задач и упражнений. Учебное пособие содержит приложения, в которых вынесены статистические таблицы, необходимые для обработки результатов измерений.

1 ОСНОВЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

1.1 Сущность понятия “измерение”

Слово “метрология” произошло от двух греческих слов: “метрон” - мера и “логос” - учение, т.е. дословно - учение о мерах. В современном понимании *метрология* - это наука об измерениях, которая включает как теоретические, так и практические аспекты измерений во всех отраслях науки и техники. Для осмысления сущности понятия “измерение” вспомним, что окружение человека представляет собой совокупность физических объектов и явлений. Последние воспринимаются и характеризуются человеком с помощью физических величин (ФВ) и их размеров.

Физическая величина - это свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам, но индивидуальное в количественном отношении для каждого из них (ДСТУ 2681-94. Метрологія. Терміни та визначення).

Например, все тела обладают массой и температурой, но для каждого из них эти параметры различны.

Количественной характеристикой ФВ служит ее размер.

Размер ФВ - это количественное содержание физической величины в данном объекте.

В процессе практической деятельности человеку приходится сравнивать между собой размеры ФВ. Эти сравнения для различных ФВ могут осуществляться тремя различными способами, по трем различным шкалам: порядка, интервалов и отношений.

Сравнение по шкале порядка.

Это сравнение размеров ФВ по принципу “больше – меньше”, без выяснения, на сколько или во сколько раз один размер больше другого. Расположенные в порядке возрастания (ранжира) разные размеры одной и той же ФВ образуют *шкалу порядка*.

Определенные точки на шкале порядка фиксируются в качестве опорных (реперных), выражаемых, как правило, в баллах.

По реперным шкалам сравниваются, например, интенсивность землетрясений, сила морского волнения, уровень знаний, чувствительность фотопленки и т.д.

Недостаток шкалы порядка - неопределенность интервалов между реперными точками. Поэтому с баллами нельзя производить математических операций (складывать, вычитать, делить, умножать).

Сравнение по шкале интервалов.

Шкала интервалов отличается от шкалы порядка тем, что она составлена из равных, строго определенных интервалов.

Примером шкалы интервалов является шкала времени, шкала температуры.

В первом случае время сравнивается по шкале, разбитой на интервалы, равные периоду обращения Земли вокруг Солнца (летоисчисление). Эти интервалы делятся на более мелкие (сутки), равные периоду обращения Земли вокруг своей оси. Сутки делятся на часы, часы – на минуты, минуты – на секунды и т.д.

При сравнении температур пользуются шкалами, получаемыми путем пропорционального деления интервала между двумя реперными точками. Так, в температурной шкале Цельсия один градус является сотой частью интервала между температурой таяния льда, принимаемой за начало отсчета, и температурой кипения воды.

По шкале интервалов можно уже судить не только о том, что один размер больше другого, но и о том, на сколько больше, т.е. для шкалы интервалов определены такие математические действия как сложение и вычитание.

Таким образом, для шкалы интервалов известным является масштаб шкалы, а начало отсчета может быть выбрано произвольно, поэтому недостатком шкал интервалов является то, что по ним невозможно определить отношение между различными размерами.

Сравнение по шкале отношений.

В шкалах отношений в качестве одной из реперных точек принимают такую, в которой размер ФВ равен нулю. Примером может служить температурная шкала Кельвина. В ней за начало отсчета принята температура, при которой прекращается тепловое движение молекул. Шкала отношений является наиболее совершенной из всех рассмотренных шкал. На ней определено наибольшее число математических операций: сложение, вычитание, деление, умножение.

Итак, от сравнения размеров ФВ по шкале порядка, мы перешли к сравнению их по шкалам интервалов и отношений, предполагающим разбиение шкалы на некоторые *единичные интервалы*.

В результате сравнения по шкалам интервалов и отношений мы получаем *оценку* размера ФВ в виде некоторого числа принятых для нее единиц, называемую *значением* ФВ.

Отображение ФВ их значениями с помощью эксперимента и вычислений с использованием специальных технических средств, называется *измерением*.

Таким образом, сущность измерения состоит в сравнении двух ФВ: измеряемой, которая выражает интересующую нас особенность исследуемого объекта и известной, которая присуща специально созданному объекту, называемому мерой (рис. 1.1). Операция сравнения производится с помощью средства измерительной техники (СИТ).

Средство измерительной техники - техническое средство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические характеристики.

Мера - измерительное устройство, реализующее воспроизведение и (или) хранение ФВ одного или нескольких размеров, значения которых известны с необходимой точностью.

Сущность измерения как процесса сравнения выражает *основное уравнение измерения*

$$Q=q[Q], \quad (1.1)$$

где Q - измеряемая величина;

q - числовое значение величины;

$[Q]$ - единица измерения.

Результат измерения по ряду причин отличается от размера измеряемой ФВ. Это отличие называется *погрешностью измерения*.

Измерение одной и той же ФВ может производиться в различных местах и условиях, в различное время, различными методами и приборами в различных режимах. При этом будут получены разные результаты и погрешности измерения. Для того, чтобы результатам таких измерений можно было в одинаковой степени доверять, необходимо обеспечить единство измерений.

Под *единством измерений* понимают такое их состояние, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах измерений, а погрешности измерений известны и с заданной вероятностью не выходят за установленные границы.

Для обеспечения единства измерений требуется решение триединой задачи:

- 1) стандартизация системы единиц ФВ;
- 2) воспроизведение размера единиц с помощью эталонов;
- 3) передача размера единиц от эталонов рабочим СИТ.

1.2 Единицы физических величин и их системы

Из уравнения измерения (1.1) видно, что числовые значения измеряемых величин зависят от того, какие используются единицы измерения.

Если допустить произвол в выборе единиц измерения, то это приведет к нарушению единства измерений. Поэтому стандартизации единиц измерений и их совокупности, называемой *системой единиц*, в метрологии придается первостепенное значение.

В вопросе выбора единиц ФВ все крупные области измерений в процессе своего развития проходили несколько этапов.

1-й этап. Единицы ФВ появляются по мере их практической необходимости. Они плохо определены и еще хуже взаимосвязаны, часто находятся во взаимном противоречии.

2-й этап. Появление *абсолютных систем единиц*, содержащих ограниченное число *основных единиц* и *производные единицы*, определяемые через основные.



Рисунок 1.1 – Сущность измерений

3-й этап. Трансформация систем единиц таким образом, чтобы была возможность воспроизведения единиц с максимальной точностью с помощью *эталонов* и *эталонных методов*. В результате появляется современная *метрическая система* мер, определяемая через международные прототипы метра и килограмма. Аналогично определялись международные электрические единицы (через эталон - для ома и эталонный метод - для ампера), а также международная шкала температур, определяемая посредством реперных точек, т.е. точек кипения и затвердевания ряда веществ (кислород, сера, серебро, золото и др.).

4-й этап. Создание универсальной системы естественных мер, базирующейся на *макроскопических квантовых эффектах* (сверхпроводимости, сверхтекучести, и квантовом эффекте Холла и т.д.).

Принципы формирования рациональной системы единиц сформулировал Гаусс в 1832 г.:

- а) составление системы уравнений, выражающих зависимость между всеми величинами, для которых необходимо установить единицы измерения;
- б) выбор основных единиц на основании анализа системы уравнений;
- в) образование производных единиц;
- г) образование кратных и дольных единиц (кратные единицы равны целому числу основных или производных единиц, дольные - составляют определенную долю основной или производной единицы).

По мере развития науки возникло огромное множество систем единиц, что тормозило научно-технический прогресс. Поэтому в 1960 г. XI-я Генеральная конференция по мерам и весам приняла Международную систему единиц ФВ, известную у нас как система СИ. Эта система введена в 1982 г. и законодательно закреплена в Украине в ДСТУ 3651. 0-2 - 97 "Метрология. Единицы физических величин".

В системе семь основных единиц (табл.1.1): единица длины - метр, единица массы - килограмм, единица времени - секунда, единица силы тока - ампер, единица термодинамической температуры - кельвин, единица силы света - кандела, единица количества вещества - моль.

В ДСТУ даны обозначения, наименования и определения перечисленных единиц (табл. 1.1), а также правила образования кратных и дольных единиц, их наименований и обозначений (табл. 1.2), производные и внесистемные единицы, физические постоянные и характеристические числа, их понятия, наименования и обозначения. Приведенные в ДСТУ физические величины их единицы, наименования, обозначение и правила применения соответствуют аналогичным требованиям международных стандартов ISO 31:1992 и ISO 1000:1992.

В системе СИ используются десятичные *кратные* и *дольные* единицы, которые образуются с помощью множителей, а их названия и обозначения – из названий и обозначений исходных единиц с помощью соответствующих приставок.

Таблица 1.1- Основные единицы международной системы СИ

Физическая величина		Единицы физических величин		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			Международ.	Русское
Длина	L	метр	m	м
Масса	M	килограмм	kg	кг
Время	T	секунда	s	с
Сила тока	I	ампер	A	А
Сила света	J	кандела	cd	кд
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K	К
Количество вещества	N	моль	mol	моль

Таблица 1.2 - Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименование

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		Международное	Русское			Международное	Русское
10 ²⁴	Йотта	Y	Й	10 ⁻¹	Деци	d	д
10 ²¹	Зетта	Z	ЗТ	10 ⁻²	Санتي	c	с
10 ¹⁸	Экса	E	Э	10 ⁻³	Милли	m	м
10 ¹⁵	Пета	P	П	10 ⁻⁶	Микро	μ	мк
10 ¹²	Тера	T	Т	10 ⁻⁹	Нано	n	н
10 ⁹	Гига	G	Г	10 ⁻¹²	Пико	p	п
10 ⁶	Мега	M	М	10 ⁻¹⁵	Фемто	f	ф
10 ³	Кило	k	к	10 ⁻¹⁸	Атто	a	а
10 ²	Гекто	h	г	10 ⁻²¹	Зепто	z	зп
10 ¹	Дека	da	да	10 ⁻²⁴	Йокто	y	й

При образовании *кратных и дольных единиц* необходимо придерживаться следующих правил:

1) присоединение к наименованию единицы двух и более приставок подряд не допускается, например, вместо микромикрофард следует писать пикофард;

2) приставка пишется слитно с наименованием единицы, к которой она присоединяется;

3) если единица образована как произведение или отношение единиц, приставку следует присоединять к наименованию первой единицы, входящей в произведение или в отношение, например, килоампер/метр, а не ампер/ миллиметр;

4) наименования кратных и дольных единиц от единицы возведенной в степень, следует образовывать путем присоединения приставки к наименованию исходной единицы, например, квадратный километр;

5) обозначения кратных и дольных единиц от единицы возведенной в степень, следует образовывать добавлением соответствующего показателя степени к обозначению кратной или дольной от этой единицы, причем показатель означает возведение в степень кратной или дольной единицы (вместе с приставкой), например, 5 км² = 5 (10³ м)² = 5 · 10⁶ м².

Производные единицы СИ следует образовывать из основных и дополнительных единиц СИ по правилу образования когерентных производных единиц, которое осуществляется следующим образом.

В общем случае производная величина Q может быть выражена через основные величины A, B, C, \dots как

$$Q = K A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots, \quad (1.2)$$

где α, β, γ - показатели размерности, K - некоторый безразмерный коэффициент.

Выражая размеры производной и основных величин через их значения, можно записать

$$q[Q] = K a^\alpha [A]^\alpha b^\beta [B]^\beta c^\gamma [C]^\gamma \dots, \quad (1.3)$$

Поскольку справедливо выражение

$$q = K a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots, \quad (1.4)$$

то с его учетом (1.3) можно переписать в следующем виде:

$$[Q] = [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma \dots \quad (1.5)$$

Таким образом, когерентные производные единицы образуют при помощи простейших уравнений связи между величинами, в которых коэффициенты равны 1.

Пример. Если для образования единицы энергии используют уравнение

$$E = \frac{1}{2} m V^2,$$

где E - кинетическая энергия;

m - масса материальной точки;

V - скорость движения точки,

то когерентную единицу энергии в системе СИ образуют следующим образом

$$[E] = \frac{1}{2} (2[m][V]^2) = \frac{1}{2} (2\text{кг})(1\text{м}/\text{с})^2 = 1\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2 \cdot \text{м} = 1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}.$$

Следовательно, единицей энергии в системе СИ является джоуль. В приведенном примере он равен кинетической энергии тела массой 2 кг, движущегося со скоростью 1 м/с.

1.3 Воспроизведение единиц физических величин

Второй задачей обеспечения единства измерений является задача воспроизведения размера единиц ФВ.

Размеры единиц могут воспроизводиться там же, где выполняются измерения, либо информация о них должна передаваться с места их воспроизведения. В зависимости от этого различают децентрализованное и централизованное воспроизведение единиц.

Централизованное воспроизведение осуществляется с помощью специальных технических средств, называемых эталонами.

Слово “эталон” означает мерило, образец. Эталон воспроизводит единицу ФВ с наивысшей достижимой точностью.

Эталон – СИТ, обеспечивающее воспроизведение и (или) хранение единицы измерений одного или нескольких значений, а также передачу размера этой единицы другим СИТ.

Классификация эталонов приведена на рис. 1.2.

По приоритету воспроизведения и хранения единицы разделяют первичные, вторичные и рабочие эталоны.

Первичный эталон – обеспечивает воспроизведение и (или) хранение единицы измерений в соответствии с ее определением и передачу ее размера с наивысшей в стране точностью. Пример - комплекс, состоящий из платино-иридиевого эталона кг в совокупности с эталонными весами.

Первичный эталон, официально признанный в качестве исходного для страны, называется *государственным*. Он утверждается Госстандартом, на него издается ГОСТ.

Основные единицы СИ воспроизводятся с помощью госэталонов, т.е. централизовано. В международной практике государственные эталоны называются национальными, а эталоны, хранимые в Международном бюро мер и весов, - международными.

Вторичный эталон – эталон, который получает размер единицы непосредственно от государственного эталона данной единицы и передает ее рабочим эталонам или рабочим СИТ. Он создается для уменьшения износа первичного эталона. По своему метрологическому назначению вторичные эталоны делятся на эталоны-копии и эталоны-сравнения.

Эталон-копия - эталон, получающий размер единицы непосредственно от государственного эталона данной единицы и может заменить в соответствии с поверочной схемой государственный эталон в случае его отказа. Он не всегда может быть физической копией госэталона.

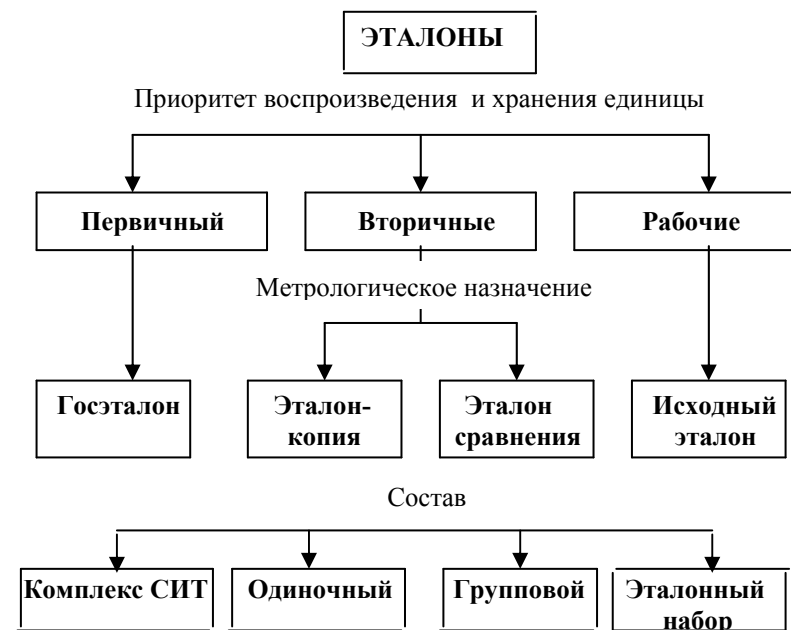


Рисунок 1.2 - Классификация эталонов

Эталон сравнения - применяется для взаимного сличения эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть сличаемы непосредственно. Пример эталона-сравнения - группа нормальных элементов, применяемых для сличения госэталона вольта с эталоном вольта Международного бюро мер и весов.

Рабочие эталоны - применяются для поверки или калибровки рабочих СИТ. Например, рабочий эталон кг, изготовленный из нержавеющей стали.

Рабочий эталон, имеющий наивысшие метрологические свойства среди эталонов, имеющихся на предприятии или в организации, называется *исходным эталоном*.

Эталоны могут осуществляться в виде:

- комплекса СИТ;
- одиночных эталонов;
- групповых эталонов;
- эталонных наборов.

Госэталоны всегда осуществляются в виде комплекса СИТ и вспомогательных устройств, обеспечивающих воспроизведение единицы, ее хранение и передачу рабочим эталонам.

Одиночный эталон - состоит из одного СИТ, обеспечивающего воспроизведение и хранение единиц самостоятельно без участия других СИТ.

Групповой эталон – в состав которого входит группа СИТ одного типа, номинального значения или диапазона измерения, применяемых совместно для повышения точности воспроизведения единицы или ее хранения. Размер единицы, хранимой групповым эталоном, определяется как среднее арифметическое размеров СИТ. Отдельные СИТ, входящие в групповой эталон могут применяться в качестве одиночных эталонов.

Эталонные наборы - наборы СИТ, позволяющих хранить единицу или измерять величину в определенных пределах. Например, эталон единицы плотности жидкостей в виде набора денсиметров. Эталонные наборы и групповые эталоны могут быть постоянного и переменного состава.

Государственные эталоны хранятся в метрологических институтах в специальных условиях. Для проведения работ с госэталонами назначаются особые ответственные лица - ученые - хранители эталонов.

Кроме национальных эталонов существуют также международные, которые хранятся в Международных бюро мер и весов. Проводятся систематические сличения Международных эталонов с национальными. Эталоны метра и килограмма сличают 1 раз в 25 лет. Электрические и световые - 1 раз в 3 года.

1.3.1 Эталон единицы длины

В конце XVIII в., в период введения метрической системы мер, был принят первый эталон единиц длины - метр. За метр приняли одну десятимиллионную часть четверти Парижского меридиана. В 1799 г. на основе геодезических измерений (триангуляций) части дуги меридиана от Дюнкера до Барселоны экспедициями ученых во главе с Мешеном и Деламбером был изготовлен эталон метра в виде платиновой концевой меры, переданной на хранение в национальный Архив Франции и получившей название “метра Архива”. Метр Архива представляет собой платиновую линейку шириной около 25 мм, толщиной около 4 мм с расстоянием между концами, равным 1 м.

Повторные измерения длины дуги меридиана, выполненные в XIX в., показали, что длина принятого метра несколько короче подлинного “естественного” метра. Так как в дальнейшем, при более точных измерениях, вероятно, можно было получить различные значения основной единицы длины, Международная комиссия по прототипам метрической системы, созданная по инициативе Петербургской академии наук, в 1872 г. решила отказаться от естественного эталона метра и принять в качестве исходной меры длину метра Архива. В соответствии с решением этой комиссии был изготовлен 31 эталон метра в виде штриховой меры из сплава платины и иридия. Из них метр номер 6 оказался при 0 °С равным метру Архива и

был принят в качестве международного прототипа метра. Остальные 30 эталонов были распределены между различными государствами.

Эталон метра представляет собой платино - иридиевый брусок длиной 102 см, имеющий в поперечном сечении форму X, как бы вписанную в воображаемый квадрат, сторона которого равна 20 мм. Платино - иридиевый эталон метра номер 28, полученный Россией в 1889 г., был в последующем утвержден в качестве Государственного эталона. Единица длины - метр определяется расстоянием между осями двух средних штрихов, нанесенных на брусок при 0 °С.

Хотя эталон был изготовлен из сплава иридия и платины, отличающегося значительной твердостью и большим сопротивлением к окислению, не было полной уверенности в том, что длина эталона с течением времени не изменится. Это объясняется тем, что металлические стержни, подвергшиеся ранее термической и механической обработке, получают внутренние упругие напряжения, которые вызывают медленные микроструктурные изменения их структуры. При периодических сличениях национальных эталонов с международным прототипом нельзя обнаружить малых изменений их длины, т.к. все эталоны изготовлены из одного и того же сплава и, следовательно, претерпевают одни и те же изменения. Кроме того, штрихи, нанесенные на бруски имеют значительную ширину, что ограничивает погрешность сличения на уровне 10^{-7} м.

Поэтому необходимо было ввести новый естественный эталон метра. В 1895 г. II Генеральная конференция по мерам и весам признала, что естественным свидетелем размера метра может являться длина волны монохроматического света. После изучения спектральных линий ряда элементов было найдено, что наибольшую точность воспроизведения единицы длины обеспечивает оранжевая линия изотопа криптона-86. XI Генеральная конференция по мерам и весам (1960 г.) приняла выражение размера метра в следующем виде: “Метр - длина, равная 1 650 763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86”. Как известно, квант световой энергии излучается или поглощается атомом при переходе из одного стационарного состояния в другое. Частота излучения (поглощения) пропорциональна разности энергий состояний

$$f=(E_2-E_1)/h,$$

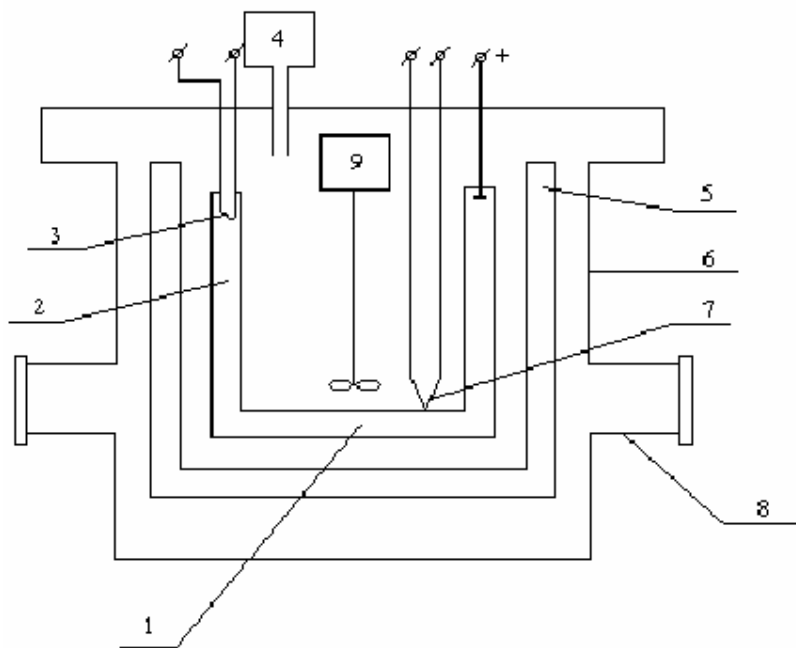
где E_1 и E_2 - уровни энергий; h - постоянная Планка.

Если $E_2 > E_1$ происходит излучение электромагнитных волн, если $E_2 < E_1$ - поглощение. При распространении излучения в вакууме со скоростью c , длина волны монохроматического света равна

$$\lambda=ch/(E_2-E_1).$$

При исследовании спектров различных веществ было обнаружено, что элементы с четным номером в таблице Менделеева и четной атомной

массой (т.н. четно-четные элементы) имеют линии спектра с простым контуром. Наиболее тонкие и симметричные линии излучения соответствуют переходу между вышеупомянутыми уровнями атома криптона-86. Метр в длинах световых волн воспроизводится интерференционным методом на специальной установке с помощью лампы, заполненной изотопом криптона-86. Схема лампы с криптоном приведена на рис. 1.3.



1 - светящийся капилляр; 2 - газоразрядная трубка с криптоном; 3 - нагретый катод; 4 - манометр; 5 - сосуд Дьюара; 6 - герметически закрывающаяся камера; 7 - термопара; 8 - окуляр; 9 - мотор с лопаткой для перемешивания жидкого азота

Рисунок 1.3 - Схема лампы с криптоном-86

С целью получения необходимых условий для излучения линии кrypton заключают в капилляр и охлаждают жидким азотом до 50-60 К. Возбуждение атомов криптона производят путем пропускания через него электрического тока (напряжения порядка 1500 В). Осуществление этого метода дало возможность снизить погрешность воспроизведения метра, примерно до $4 \cdot 10^{-9}$ м.

В 1983 г. XVII Генеральная конференция по мерам и весам приняла следующее определение метра: "Метр - единица длины, равная пути, проходимому в вакууме светом за $1/299792458$ долю секунды". При таком определении метра длина не может считаться основной ФВ, так как выражается через скорость и время. Поэтому за этим решением XVII Генеральной конференции должно последовать изменение структуры Международной системы единиц.

Принятое новое определение позволило воспроизводить единицу длины с помощью единого эталона времени-частоты-длины. Минимальная погрешность, которая может быть достигнута в этом случае, равна погрешности современного эталона частоты-времени. В качестве источника колебаний в этом эталоне применяется высокостабильный лазер с известной относительно эталона времени частотой f . Он служит эталоном элементарной длины, равной $\lambda=c/f$. С помощью такого лазера интерференционным путем удобно измерять расстояние порядка метра. Делается это путем подсчета числа полуволн, укладываемых на измеряемой длине. Поэтому в состав эталона времени-частоты-длины введен высокоточный вакуумный модуляционный интерферометр Фабри-Перо, расположенный во ВНИИМ им. Менделеева (г. С. - Петербург). Кроме того, для измерения частоты лазерного излучения, принадлежащей к оптическому диапазону, с помощью эталона времени и частоты, работающего в радиочастотном диапазоне, необходимо было создание радиооптического частотного моста (РОЧМ), который решает эту задачу, используя принцип последовательного повышения частоты. Таким образом, на базе двух институтов был создан единый технический комплекс - эталон частоты-длины-времени. Территориальная разобщенность этих институтов потребовала введения в состав эталона перевозного He-Ne/CH₄ лазера, длина волны которого устанавливается по выходному лазеру РОЧМ и служит для измерения длины волны He-Ne/I₂-лазера, входящего в состав интерферометра.

Единица длины - метр воспроизводится со среднеквадратическим отклонением $2,5 \cdot 10^{-11}$ м, а неисключенный остаток систематической погрешности составляет $1,2 \cdot 10^{-11}$, что на два порядка меньше погрешности результата воспроизведения метра по стандартному определению с помощью криптоновой лампы.

1.3.2 Эталон единицы массы

Определение единицы массы - килограмма - было дано III Генеральной конференцией по мерам и весам 1901 г. в следующем виде:

"Килограмм - единица массы - представлен массой международного прототипа килограмма".

При установлении метрической системы мер в качестве единицы

массы была принята масса 1 кг, равная массе 1 дм³ чистой воды при температуре ее наибольшей плотности (4 °С).

В этот период были проведены точные измерения массы известного объема воды путем последовательного взвешивания в воздухе и воде пустого бронзового цилиндра, размеры которого были тщательно определены.

Изготовленный на основе этих взвешиваний первый прототип килограмма представлял собой платиновую цилиндрическую гирию высотой 39 мм, равной его диаметру. Он был передан на хранение в Национальный Архив Франции.

В XIX в. было произведено повторное тщательное измерение массы 1 дм³ воды, при этом было установлено, что эта масса немного (приблизительно на 0,28 г) меньше массы прототипа Архива.

Для того, чтобы при дальнейших, более точных взвешиваниях, не менять значения единицы массы, Международной комиссией по эталонам метрической системы в 1872 г. было решено за единицу массы принять массу прототипа килограмма Архива.

В 1883 г. были изготовлены 42 прототипа килограмма из платино-иридиевого сплава (90% платины и 10% иридия) фирмой Джонсон, Маттей и К° и копии №12 и №26 получены по жребию Россией в 1889 г. согласно Метрической конвенции. Эталон хранится на кварцевой подставке под двумя стеклянными колпаками в стальном шкафу особого сейфа, находящегося в термостатированном помещении ГП “ВНИИМ им. Д.И.Менделеева”, г. С.-Петербург.

В состав государственного первичного эталона единицы массы кроме гири входят эталонные весы номер 1 (Рупрехта) и номер 2 (ВНИИМ) на 1кг с дистанционным управлением, служащие для передачи размера единицы массы от прототипа номер 12 эталонам-копиям и от эталонов-копий рабочим эталонам (2 эталонам 1 раз в 10 лет).

Погрешность воспроизведения массы эталоном килограмма не превышает $2 \cdot 10^{-9}$. Таким образом, эталон килограмма позволяет записывать результат измерения массы в лучшем случае числом из девяти цифр. Несмотря на все предосторожности, как показывают результаты международных сличений, за 90 лет масса эталонной гири увеличилась на 0,02 мг. Объясняется это адсорбцией молекул из окружающей среды, оседанием пыли на поверхность гири и образованием тонкой коррозионной пленки.

В связи с развитием работ по созданию новых эталонов единиц ФВ, основанных на атомных постоянных, предлагается использование в качестве эталона массы нейтрона. Другое предложение основано на воспроизведении единицы массы через счетное число атомов какого-нибудь химического элемента, например изотопа кремния-28. Для этого необходимо повысить точность определения числа Авогадро, на что сейчас направлены усилия многих лабораторий мира.

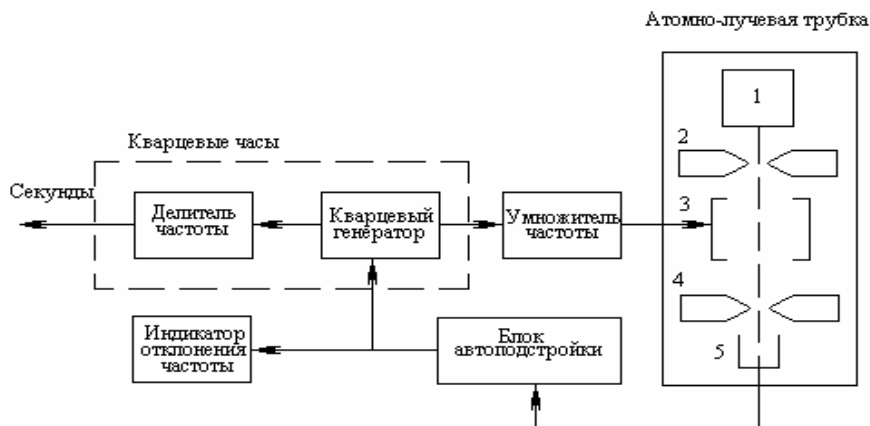
1.3.3 Эталон единиц времени и частоты

Еще в древности счет времени основывался на периоде обращения Земли вокруг своей оси. До недавнего времени секунду определяли как 1/86400 часть средних солнечных суток (т. к. продолжительность суток в течение года изменяется). Позднее было обнаружено, что вращение Земли вокруг своей оси происходит неравномерно. Относительная погрешность определения единицы времени в соответствии с этим определением составляла около 10^{-7} , что было недостаточно для метрологического обеспечения измерителей времени и частоты. Поэтому в основу определения единицы времени положили период вращения Земли вокруг Солнца - тропический год (т.е. интервал между двумя весенними равноденствиями). Размер секунды был определен как 1/31556925,9744 часть тропического года. Поскольку тропический год также изменяется (около 5 с за 1000 лет), то за основу был взят тропический год, отнесенный к 12 ч эфемеридного времени (равномерно текущее время, определяемое астрономическим путем) 0 января 1900 года, что соответствует 12 ч 31 декабря 1899 г. Это определение секунды было зафиксировано в Международной системе единиц 1960 г. Данное определение позволило на 3 порядка (в 1000 раз) снизить погрешность определения единицы времени.

Успехи квантовой физики позволили использовать частоту излучения или поглощения при энергетических переходах в атомах цезия и водорода для определения размера единицы времени. XIII Генеральная конференция по мерам и весам в 1967 г, приняла новое определение единицы времени - секунды: “Секунда – это время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133”.

Выбор количества колебаний произведен таким образом, чтобы привязать “цезиевую” секунду к “тропической”.

В соответствии с определением единицы времени воспроизведение ее осуществляется цезиевым репером (рис. 1.4). Основой эталона является атомно-лучевая трубка. Атомы цезия-133 испускаются нагретым до температуры 100-150 °С источником 1. Пучок этих атомов попадает в область неоднородного магнитного поля, создаваемого магнитом 2. Угол отклонения атомов в таком магнитном поле определяется их магнитным моментом. Поэтому неоднородное магнитное поле позволяет выделить из пучка атомы, находящиеся на определенном энергетическом уровне. Эти атомы направляются в объемный резонатор 3, пролетая через который взаимодействуют с переменным электромагнитным полем СВЧ. Частота электромагнитных колебаний может регулироваться в небольших пределах.



1 - источник атомов цезия-133; 2, 4 - магниты; 3 - резонатор; 5 – детектор

Рисунок 1.4 - Структурная схема цезиевого репера

При совпадении ее с частотой, соответствующей энергии квантовых переходов, происходит поглощение энергии СВЧ-поля и атомы переходят в основное состояние. Отклоняющей магнитной системой 4 они направляются в детектор 5. Ток детектора при настройке резонатора на частоту квантовых переходов оказывается максимальным. Это служит основой стабилизации частоты в цезиевом репере, в котором электромагнитные колебания кварцевого генератора умножаются до частоты спектральной линии цезия, принятой за рабочую. В резонаторе атомно-лучевой трубки энергия высокочастотных колебаний поглощается атомами цезия.

При отклонении частоты кварцевого генератора (собственная нестабильность частоты равна 10^{-8} от номинального значения) интенсивность переходов атомов и, следовательно, плотность атомного пучка на выходе трубки резко сокращается.

Блок автоподстройки, связанный с трубкой, вырабатывает сигнал ошибки, возвращающий частоту кварцевого генератора к номинальному значению. Стабильность цезиевого репера составляет 10^{13} . Делитель частоты, находящийся в кварцевых часах, позволяет получить на их выходе требуемые частоты и временные интервалы (в том числе и частоту 1 Гц).

Долговременная стабильность цезиевого репера частоты невелика. Поэтому для хранения единиц времени и частоты в состав государственного первичного эталона входит водородный мазер (рис. 1.5).

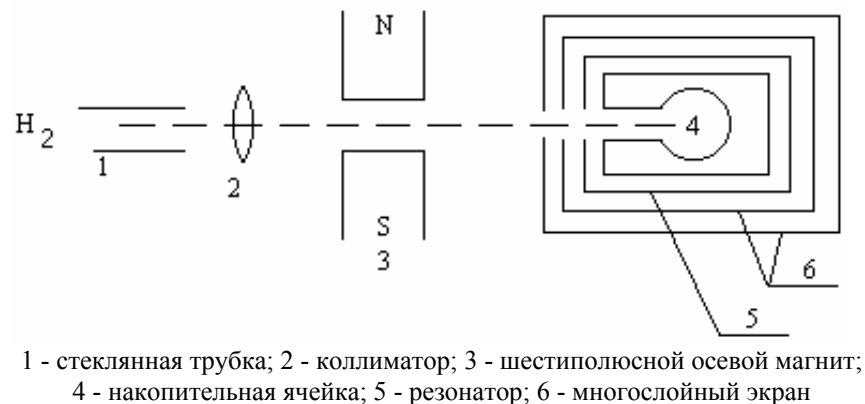


Рисунок 1.5 - Мазер на атомарном водороде

В стеклянной трубке 1 под действием высокочастотного электрического разряда происходит диссоциация молекул водорода. Пучок атомов водорода через коллиматор 2, обеспечивающий его направленность, попадает в неоднородное магнитное поле шестиполусного осевого магнита 3, где претерпевает пространственную сортировку. В результате последней на вход накопительной ячейки 4, расположенной в объемном резонаторе 5, попадают лишь атомы водорода, находящиеся на верхнем энергетическом уровне. Находящийся внутри многослойного экрана 6 высокочастотный резонатор настроен на частоту используемого квантового перехода. Взаимодействие возбужденных атомов с высокочастотным полем резонатора (в течение примерно 1 с) приводит к их переходу на нижний энергетический уровень с одновременным излучением квантов энергии на резонансной частоте 1420405751,8 Гц. Это вызывает самовозбуждение генератора, частота которого отличается высокой стабильностью ($5 \cdot 10^{-14}$). Значение этой частоты периодически поверяется по цезиевому реперу.

Наряду с водородным мазером для хранения шкал времени в состав государственного первичного эталона единиц времени и частоты и шкал времени входит группа квантово-механических часов. Общий диапазон временных интервалов, воспроизводимых эталоном, составляет $10^{-8} \div 10^8$ с. Эталон расположен в ГП ВНИИФТРИ г. Москва.

1.3.4 Эталон единицы силы электрического тока

Из определения силы тока как физической величины видно, что единица силы тока равна количеству электричества, проходящего через поперечное сечение проводника в единицу времени. Поэтому естественно

было бы принять за основную электрическую единицу некоторый заряд, например равный заряду электрона или определенного числа электронов. Однако в настоящее время нет возможности осуществить с достаточной точностью эталон, опирающийся на такое определение. Вследствие этого пришлось отказаться от единицы количества электричества как основной электрической единицы и принять в качестве таковой единицу силы тока - ампер. Размер ампера можно было бы воспроизводить по следующим действиям, которые оказывает ток в окружающей среде:

- по выделению теплоты при прохождении по проводнику;
- по осаждению вещества на электродах при прохождении тока через электролит;
- по пондеромоторным (механическим) действиям тока на магнит или проводник с током.

В 1893 г. Международный конгресс электриков в Чикаго принял первый эталон силы электрического тока - ампер, установив так называемый международный ампер. Ампер воспроизводился с помощью серебряного вольтметра и имел следующее определение: *международный ампер* – неизменяющийся ток, который проходя через водный раствор азотнокислого серебра, при соблюдении приложенной спецификации выделяет 0,001118 г серебра в 1 с.

IX Генеральная конференция по мерам и весам в 1948 г. приняла следующее определение ампера: “Ампер - сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади круглого поперечного сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, вызывал бы между этими проводниками силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины”. Это определение позволило получить наилучшую точность воспроизведения ампера.

Приведенная формулировка содержит понятие бесконечно тонких и бесконечно длинных проводников, которые на практике осуществить невозможно. Однако, на основе закона Ампера можно рассчитать с достаточной степенью точности силу взаимодействия токов, протекающих по проводникам конечных размеров.

В качестве эталона ампера были приняты токовые весы (рис. 1.6).

Токовые весы представляют собой рычажные равноплечие весы, в которых подвешенная слева подвижная катушка уравнивается грузом, положенным на правую чашку весов. Подвижная катушка входит во вторую неподвижную коаксиально расположенную катушку. При прохождении по этим последовательно соединенным катушкам постоянного электрического тока подвижная катушка опускается, поэтому на правую чашку весов следует положить добавочный груз. В соответствии с законом Ампера сила взаимодействия токов в катушках будет равна

$$F = kI_1I_2 = kI^2,$$

где $I_1 = I_2 = I$ - сила тока в катушках;

k - коэффициент пропорциональности, зависящий от формы и размеров катушек, принятого значения относительной магнитной проницаемости среды и др.

С другой стороны, в соответствии со вторым законом Ньютона

$$F = mg,$$

где m - масса уравнивающего груза;

g - ускорение свободного падения в месте расположения весов.

Приравняв эти выражения, получаем расчетную формулу для силы тока

$$I = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Государственный первичный эталон ампера представляет собой комплекс измерительных средств в следующем составе.

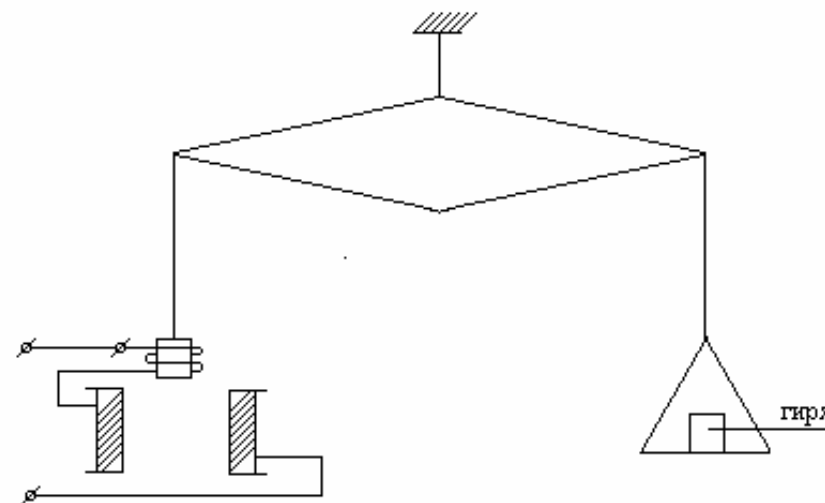


Рисунок 1.6 - Токовые весы

1. Токовые весы с гирей массой 8,16044 г и с дистанционным управлением.
2. Аппаратура для передачи размера единицы, в которую входит катушка сопротивления Р342, получившая свое значение от первичного эталона Ома.

Погрешность воспроизведения размера единицы тока не превышает 0,001%. Эталон находится в ГП “ВНИИМ им. Менделеева”, г. С.-Петербург.

В связи с успехами квантовой метрологии появилась возможность воспроизводить единицу силы тока более точно с помощью косвенных измерений в соответствии с выражением $I = U/r$. При этом размер единицы U электрического напряжения – вольт – воспроизводится с помощью квантового эффекта Джозефсона (пп. 1.4.1), а размер единицы r электрического сопротивления – ом – с помощью квантового эффекта Холла (пп. 1.4.2). Среднеквадратическое отклонение косвенного воспроизведения ампера составляет $5 \cdot 10^{-8}$, а неисключенная систематическая погрешность – $2 \cdot 10^{-7}$. Таким образом, погрешность воспроизведения ампера возросла более чем на два порядка.

1.3.5 Эталон единицы температуры

Измерения температуры T с момента изобретения термометра основывались на применении того или иного термометрического вещества, изменяющего свой объем или давление при изменении температуры. Отсчет температуры в этих случаях осуществляется по равномерной шкале

$$T = (\theta - \theta_0) \frac{T_1 - T_0}{\theta_1 - \theta_0},$$

где $\theta, \theta_0, \theta_1$ – соответственно отсчет по шкале термометра и положения реперных точек T_0, T_1 . В качестве реперных (опорных) точек выбирали точки калибровки термометра, соответствовавшие температурам перехода термометрического вещества из одного агрегатного состояния в другое (температуры плавления и кипения). В этих точках температура вещества остается постоянной все время пока осуществляется переход.

В 1715 г. Фаренгейт создал ртутный термометр и предложил для построения термодинамической шкалы две точки: температуру смеси льда с солью и нашатырем, которую он обозначил 0, и температуру тела человека, которую он обозначил числом 96.

Шкала Реомюра (1736 г.) имеет две постоянные точки, более удобные для воспроизведения: точку таяния льда 0 и точку кипения воды 80 град.

Шкала Цельсия имеет те же реперные точки, что и шкала Реомюра, только расстояние между ними делится на 100 градусов. Показания термометров зависели от рода термометрического вещества и условий его теплового расширения (рис. 1.7).

Томсон (Кельвин) показал, что можно установить температурную шкалу, которая не зависит от рода термодинамического вещества. Единственной реперной точкой в ней предлагалось сделать тройную точку воды,

(точка равновесия воды в твердой, жидкой и газообразной фазах).

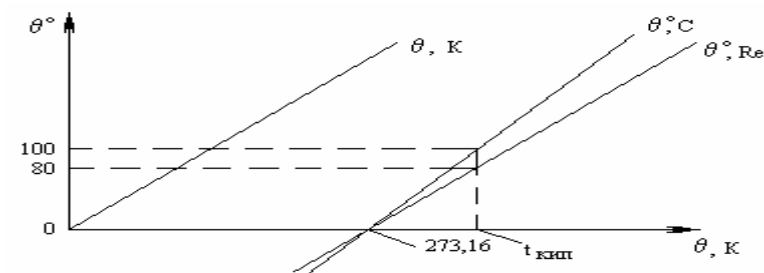


Рисунок 1.7 - Температурные шкалы

Эта точка может быть воспроизведена с точностью 0,0001 °C. Схема сосуда, воспроизводящего тройную точку воды, изображена на рис. 1.8. За температуру реперной точки была принята температура 273,16 К, что на 0,01 градус больше температуры таяния льда. Один кельвин это 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды. Остальная шкала должна была строиться на основании формулы

$$T_2 = T_1 Q_2 / Q_1,$$

где Q_1 - количество тепла, получаемого от нагревателя любым телом;

Q_2 - количество тепла, отдаваемого телом холодильнику при обратимом цикле Карно;

T_1 и T_2 - температуры нагревателя и холодильника, причем температуре T_2 придают значение тройной точки воды. В этом случае для определения температуры T_1 необходимо знать лишь отношение количеств теплоты.

Воспроизведение термодинамической шкалы температур представляет большую трудность. Поэтому IX Генеральная конференция по мерам и весам в 1948 г. установила *практическую* температурную шкалу, воспроизводимую по определенным постоянным реперным точкам. Температура в реперных точках определяется газовым термометром, использующим соотношение между объемом, давлением и температурой идеального газа. Это наиболее точные, но очень трудоемкие измерения, выполняемые лишь в немногих ведущих метрологических лабораториях мира. Основная сложность их состоит в учете несоответствия реального газа идеальному.

В 1968 г. XIII Генеральная конференция по мерам и весам установила 12 реперных точек в диапазоне от 13,8 К – тройная точка водорода до 1337,58 К – точка затвердевания золота. В промежутках между реперными точками значения температуры воспроизводятся с помощью эталонных термометров, использующих свойства расширения тел или изменения их сопротивления и т.п. В 1990 г. международная практическая шкала тем-

ператур (МТШ-90) была уточнена и расширена (от 0,65 К - давление насыщенных паров ^3He и ^4He до 1357,77 – точка плавления меди).

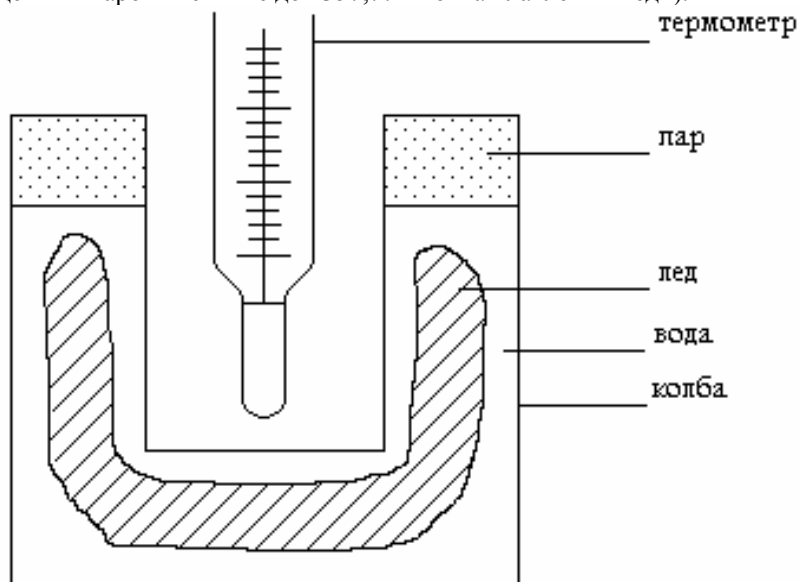


Рисунок 1.8 - Схема сосуда, воспроизводящего тройную точку воды

Среднеквадратическое отклонение воспроизведения кельвина в этом диапазоне составляет от $5 \cdot 10^{-4}$ до 10^{-2} при неисключенной систематической погрешности $3 \cdot 10^{-3}$.

В Харьковском ГНПО “Метрология” создан государственный эталон для воспроизведения температуры на основе плазменных источников излучения в диапазоне 10000-150000 К со среднеквадратическим отклонением не более $3 \cdot 10^{-2}$.

1.3.6 Эталон единицы силы света

Сила света источника видимого излучения определяется световым потоком, воспринимаемым глазом человека, с учетом различной его чувствительности к различным участкам частотного спектра. В различное время единица силы света определялась по-разному. В Германии с 1869 г. использовалась парафиновая свеча диаметром 20 мм и высотой пламени 50 мм. В 1893 г. Международным конгрессом электриков за единицу силы света была принята амил-ацетатная лампа с высотой пламени 40 мм при его ширине 8 мм. Поскольку на французском языке свеча – chandelle, то наименование “кандела” стало применяться к единице силы света.

Кандела – сила света в заданном направлении от источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср. Кандела воспроизводится при помощи эталонного устройства – полного излучателя (рис. 1.9).

Полный излучатель, называемый иногда абсолютно черным телом, представляет собой небольшую трубочку из окиси тория диаметром около 2,5 мм, погруженную в чистую платину. Платина, в свою очередь, находится в сосуде, спрессованном из порошка плавленной окиси тория, окруженном порошком из окиси тория. Все это помещено во внешний сосуд из плавленого кварца. Внешний сосуд окружен небольшим числом витков медной охлаждаемой водой трубки.

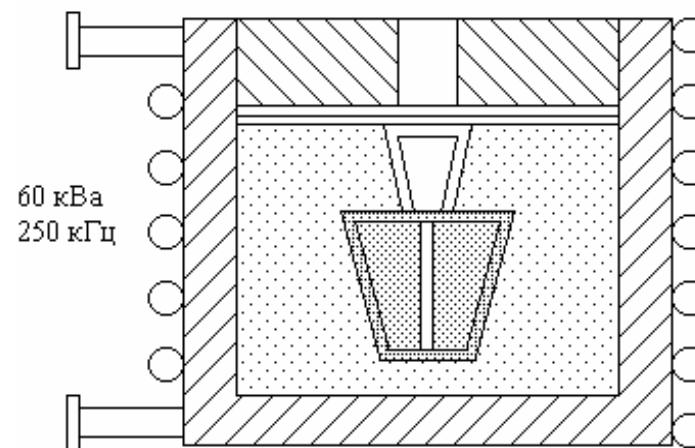


Рисунок 1.9 - Полный излучатель

По трубке пропускается ток высокой частоты (около 250 кГц), который нагревает платину до ее плавления. Вместе с платиной нагревается и трубочка из тория. Свет излучается из полости трубочки через отверстие в верхней ее части. Яркость полного излучения при температуре затвердевания платины сравнивается с помощью фотометра с яркостью особых ламп накаливания, используемых в качестве вторичных эталонов. Частота монохроматического излучения полного излучателя находится в зеленой области видимого света и соответствует максимальной чувствительности человеческого глаза.

Воспроизведению канделы приписана погрешность 0,5 % по результатам международных сличений.

1.3.7 Единица количества вещества

Моль равен количеству вещества, содержащему столько же структурных элементов, сколько атомом содержится в 0,012 кг углерода - 12.

В указанной массе изотопа углерода-12 содержится $6,022 \cdot 10^{23}$ атомов. Это число называется числом Авогадро. Если число структурных элементов, составляющих вещество, известно, то деление его на число Авогадро дает количество вещества в молях. Можно при необходимости воспроизвести 1 моль любого вещества как $6,022 \cdot 10^{23}$ его структурных элементов. Масса 1 моля водорода составляет 2 г, кислорода 32 г, воды -18 г и т.д.

Поскольку для определения количества вещества достаточно знать массу вещества и количество содержащихся в нем структурных элементов, то в эталоне моля нет необходимости. Важно точно знать число Авогадро, на что сейчас направлены усилия многих метрологических лабораторий в мире. В настоящее время относительное среднеквадратическое отклонение определения числа Авогадро составляет $6 \cdot 10^{-7}$.

1.4 Квантовая метрология

При создании системы единиц ФВ всегда стремились в качестве эталонов брать так называемые естественные константы, которые мало зависят от внешних условий и были бы максимально стабильными.

В начале XX в. немецкий физик М.Планк показал, что основные единицы могут быть составлены из фундаментальных физических констант: скорости света c , постоянной Планка \hbar и гравитационной постоянной γ . Значения этих констант фигурируют в виде коэффициентов в уравнениях основных физических теорий - классической и квантовой электродинамике и общей теории относительности. Зная эти константы, можно вычислить единицы длины

$$l = \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см},$$

времени

$$t = \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ с}$$

и массы

$$m = \sqrt{\frac{\hbar c}{\gamma}} \approx 10^{-5} \text{ г}.$$

Однако, планковские единицы лежат очень далеко от используемых на практике диапазонов. Кроме того, значение гравитационной постоянной, как и постоянной Планка, до сих пор известно с недостаточной точностью. Но самым главным недостатком планковских единиц является то,

что они не воспроизводятся с помощью реальных физических объектов. Именно поэтому планковские единицы до сих пор не используются в метрологии.

Реальная возможность создания универсальной системы естественных мер появилась после открытия так называемых макроскопических квантовых эффектов: Джозефсона, Холла, Мейснера, Мёссбауэра.

1.4.1 Эталон вольты на эффекте Джозефсона

Эффект Джозефсона возникает в контактах двух сверхпроводников, разделенных тонким слоем диэлектрика (рис. 1.11).



Рисунок 1.11 - Схематическое изображение джозефсоновского перехода

Как известно, в вакууме электроны отталкиваются друг от друга по закону Кулона. В твердом теле, помимо электронов, имеются положительно заряженные ионы решетки. Притягиваясь к электронам, они экранируют их заряд. В некоторых веществах при достаточно низких температурах суммарное взаимодействие электронов может соответствовать их слабому притяжению. В этом случае электроны образуют так называемые куперовские пары. Такие пары, в отличие от отдельных электронов, имеют нулевой спин (т.е. подчиняются статистике Бозе). Это позволяет большому числу пар скапливаться в одном и том же квантовом состоянии. Если средняя скорость куперовских пар отлична от нуля, т.е. существует незагашающийся электрический ток, то говорят, что имеет место явление сверхпроводимости.

Если приложить к двум сторонам Джозефсоновского перехода разность потенциалов U , то при туннелировании куперовской пары электронов из одного сверхпроводника в другой избыток ее энергии $2eU$ излучается в виде кванта света - фотона. Частота ν_0 этого кванта определяется законом сохранения энергии:

$$h\nu_0 = 2eU.$$

Это явление называется нестационарным эффектом Джозефсона.

Если наоборот, облучать джозефсоновский переход излучением частотой ν , то при совпадении этой частоты с характерной для данного напряжения U частотой ν_0 , возникает резонансное взаимодействие. Такой же резонанс наступает при $\nu_0 = \nu/n$, где n - любое целое число, в результате чего на вольт-амперной характеристике перехода появляются особенности (рис. 1.12) в виде ступенек при напряжениях

$$U = \frac{nh}{2e} \nu.$$

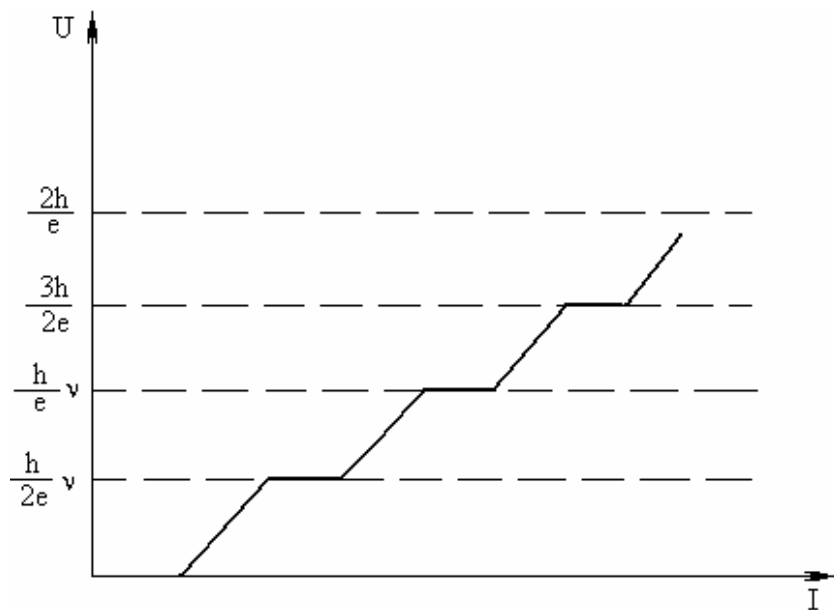


Рисунок 1.12 - Вольтамперная характеристика джозефсоновского перехода

Заряд электрона e является такой же фундаментальной физической константой, как и упоминавшиеся выше h , c , γ . Величина $h/2e$, называемая квантом магнитного потока, значение которой определяется с большей точностью, чем значения h и e в отдельности. Поскольку частота в настоящее время является наиболее точно измеряемой величиной, точность воспроизведения напряжения с помощью эффекта Джозефсона ограничивается точностью значения $h/2e$. Стандартное отклонение при воспроизведении вольта составляет в настоящее время $5 \cdot 10^{-9}$.

На основании эффекта Джозефсона выполнены эталоны единиц на-

пряжения - вольта во всех промышленно развитых стран с начала 1980 г. В состав эталона обычно входит дискретный переход, возбуждаемый СВЧ- излучением на частоте 8...10 ГГц, Значение квантованного напряжения составляет при этом 4...10 мВ. Столь низкое значение воспроизводимого напряжения вынуждает включать в состав эталона масштабные преобразователи напряжения различной конструкции и нормальные элементы, приводящие к потере точности. В связи с этим, в последнее время были созданы интегральные схемы, включающие в себя порядка 1000 переходов Джозефсона и позволяющие воспроизводить напряжение непосредственно в 1 В и выше.

Из общефизических соображений и проведенных экспериментов следует, что стабильность эталонов на основе эффекта Джозефсона может достигать 10^{16} , что открывает широкие перспективы для совершенствования естественного эталона вольта.

1.4.2 Эталон ома на основе квантового эффекта Холла

Квантовый эффект Холла был открыт в 1980 г. Фон-Клитцингом. Суть его состоит в том, что в специальных структурах типа металл-диэлектрик-полупроводник (рис 1.13) при температуре жидкого гелия и в сильном магнитном поле электрическое сопротивление принимает строго фиксированные дискретные значения

$$R_H = \frac{h}{e^2 n} = \frac{\mu_0 c}{2n\alpha},$$

где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума;

$$\alpha = \frac{\mu_0 c e^2}{2h} - \text{постоянная тонкой структуры.}$$

Если на металлическую пластинку подается положительное напряжение U_0 , тогда часть электронов из кремниевого полупроводника Si подтянется к границе диэлектрика SiO_2 и окажется заключенной в тонком слое - канале, ограниченном на рис. 1.13 пунктиром, поскольку диэлектрик для электронов непроницаем, а обратно в полупроводник им не дает вернуться притяжение к металлической пластине.

Запертые в канале толщиной d электроны, согласно квантовой механике, будут занимать самый низкий из возможных дискретных энергетических уровней, соответствующих движению поперек слоя, а их волновые функции будут размазаны по толщине канала. Если подать напряжение на электроды "исток-сток", то между ними потечет ток I . Если, кроме того, приложить магнитное поле B перпендикулярно плоскости канала, то электроны, изгибая свои траектории в поле B начнут скапливаться у боковых краев структур, пока возникшая разность потенциалов между холловски-

ми контактами не воспрепятствуют их дальнейшему накоплению. Это классический эффект Холла, характеризуемый холловским сопротивлением $R_H = U_H/I$. Как показано в курсе общей физики, величина R_H обратно пропорциональна плотности электронов ρ_e в канале (рис. 1.14).

Однако, при учете квантового характера движения электронов в магнитном поле возникает другая ситуация. Согласно квантовой механике, энергия электронов в плоскости слоя может принимать только дискретные значения.

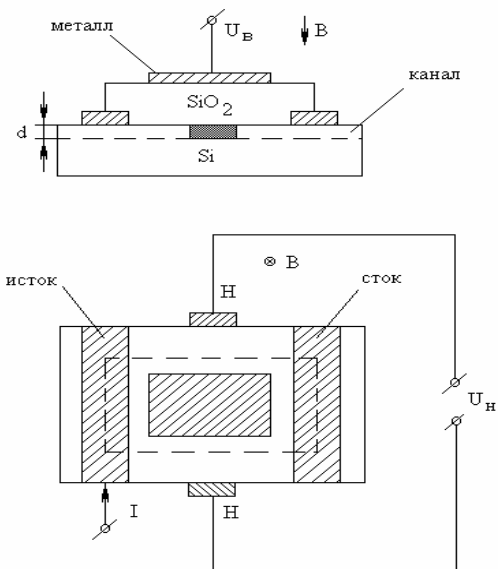


Рисунок 1.13 - Холловская структура типа металл-диэлектрик-полупроводник

Таким образом, движение электрона оказывается квантованным по всем трем координатам. Следствием этого является наличие на зависимости R_H от плотности электронов в слое ρ_e плоских участков – плато с квантованными значениями согласно приведенной выше формулы (рис. 1.14). На практике величину ρ_e регулируют, изменяя U_B . Этот эффект называется квантовым эффектом Холла.

Полученные экспериментальные результаты делают этот метод воспроизведения сопротивления предпочтительным по сравнению с другими. Среднеквадратическое отклонение воспроизведения единицы сопротивления с помощью квантового эталона не превышает $3 \cdot 10^{-8}$ при неисключенной систематической погрешности $3 \cdot 10^{-7}$.

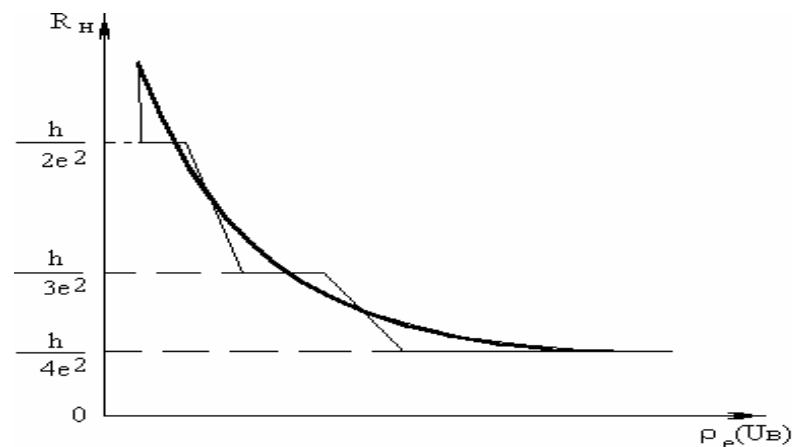


Рисунок 1.14 - Зависимость холловского сопротивления от плотности электронов в слое

1.5 Передача размеров единицы ФВ от эталонов рабочим СИТ

1.5.1 Основные принципы

Как уже говорилось, третьей задачей обеспечения единства измерений является передача размера единицы ФВ от эталонов рабочим СИТ.

Известно, что информация о размерах единиц должна быть заложена в СИТ при его выпуске в обращение в виде *номинального значения меры, шкалы СИТ или в градуировочных таблицах и графиках*. Правильность и точность этой информации устанавливается на *государственных испытаниях* головных образцов СИТ, предназначенных для серийного производства, либо при *метрологической аттестации нестандартизованных СИТ*, т.е. выпускаемых в единичном экземпляре. Сохранность же информации контролируется при первичной и всех последующих *поверках* СИТ. Когда при непосредственной передаче информации о размере единиц мерам и отметкам шкал отсчетных устройств приписываются значения, выраженные в этих единицах, то эта процедура называется *градуировкой*.

Использовать для градуировки, аттестации и поверки рабочих СИТ непосредственно государственные первичные эталоны нельзя. Эти эталоны являются национальным достоянием и используются чрезвычайно редко, чтобы исключить их выход из строя. Поэтому, производительность их невелика и для передачи информации о размере единиц обширному парку рабочих СИТ приходится прибегать к многоступенчатой процедуре, схема которой показана на рис. 1.15.

Передача размеров единиц рабочим СИТ осуществляется посредством рабочих эталонов (РЭ).

РЭ, которые имеют наивысшие метрологические свойства среди эталонов на предприятии или в организации называются исходными. В зависимости от точности, РЭ подразделяют на разряды.

РЭ находятся в метрологических институтах или лабораториях Государственной метрологической службы.

1.5.2 Поверочные схемы

Для обеспечения правильной передачи информации о размере единиц ФВ во всех звеньях метрологической цепи должен быть установлен определенный порядок. Этот порядок приводится в поверочной схеме.

Поверочная схема представляет собой нормативный документ, регламентирующий метрологическое соподчинение СИТ, которые принимают участие в передаче размеров единицы ФВ от эталона к другим рабочим СИТ с указанием методов и погрешностей передачи.

В зависимости от области распространения, поверочные схемы подразделяются на государственные, ведомственные, локальные.

Государственные схемы распространяются на весь парк СИТ в стране и утверждаются в виде ГОСТов.

Поверочные схемы состоят из текстовой части и чертежа. На чертеже указываются:

- наименования СИТ;
- диапазон значений ФВ;
- обозначения и оценки погрешностей СИТ;
- наименования методов и погрешности передачи размера единицы.

Наименования эталонов и СИТ указываются в прямоугольниках, причем первичный эталон заключают в прямоугольник, образованный двойной линией.

Наименования методов передачи размеров единиц помещают в горизонтальные овалы между наименованиями поверяемого рабочего СИТ и соответствующего РЭ. Погрешность метода поверки указывается в том же овале.

Чертеж поверочной схемы состоит из полей, расположенных друг над другом и разделенных штриховыми линиями, число которых зависит от структуры поверочной схемы. Поля имеют наименования, указываемые в левой части чертежа, отделенной вертикальной сплошной линией. Пример компоновки элементов ведомственной (локальной) поверочной схемы показан на рис. 1.16.

Передача размера единиц от эталонов рабочим СИТ осуществляется путем поверки или калибровки.

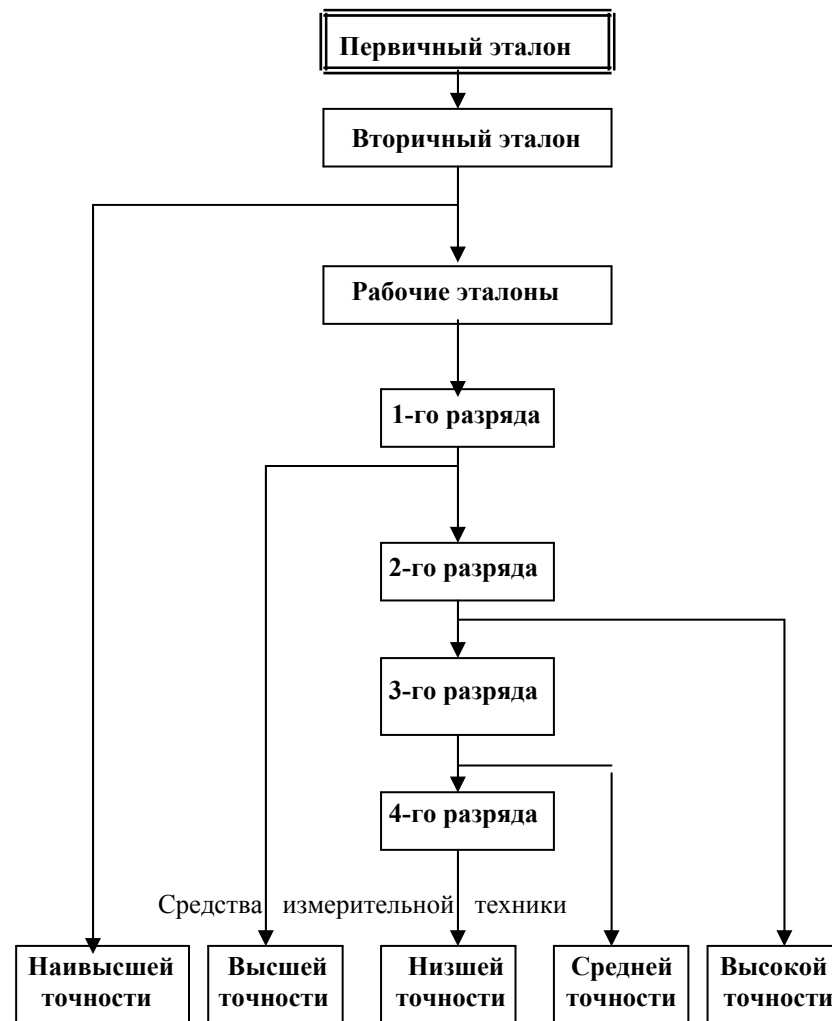


Рисунок 1.15 - Схема многоступенчатой процедуры передачи информации о размере единицы от эталона СИТ

Поверка СИТ – установление пригодности СИТ, на которые распространяется государственный метрологический надзор, к применению на основании результатов контроля их метрологических характеристик.

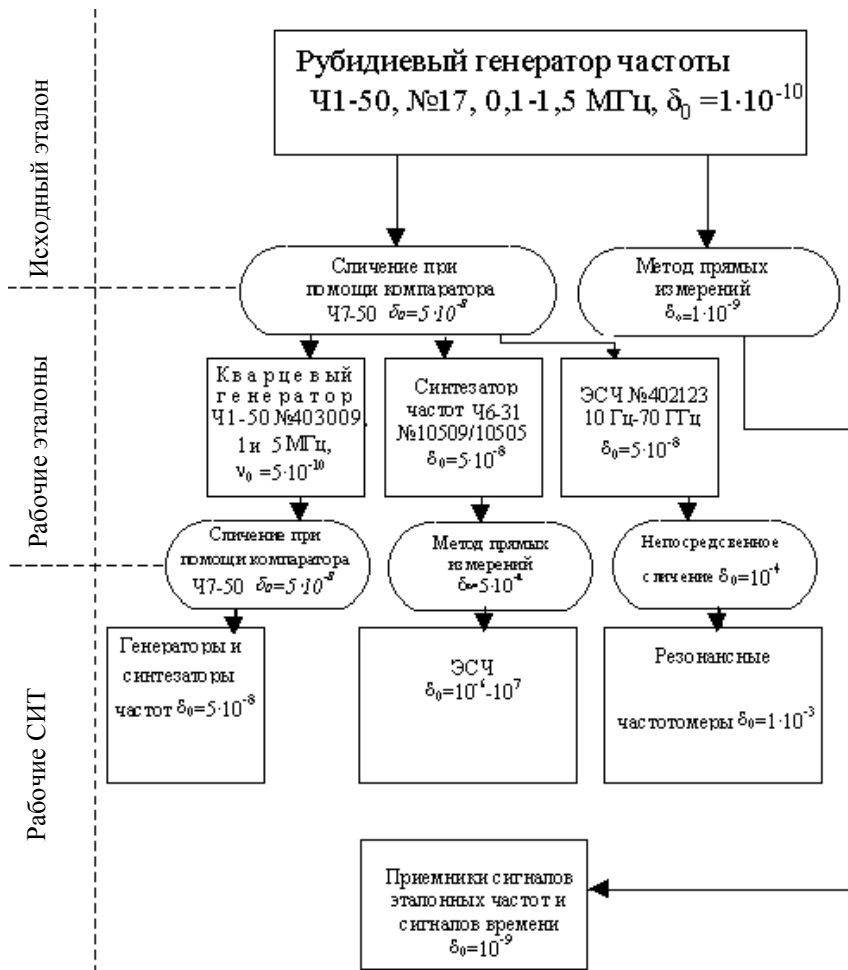


Рисунок 1.16 - Поверочная схема для СИТ времени и частоты

Калибровка СИТ – определение в известных условиях или контроль метрологических характеристик СИТ, на которые не распространяется государственный метрологический надзор.

Различают первичную, периодическую, внеочередную, инспекционную и выборочную поверки.

Первичная поверка выполняется при выпуске СИТ из производства, или их ремонта, а также, в случае необходимости, при введении в эксплуатацию.

Периодическая поверка выполняется на протяжении эксплуатации через установленный промежуток времени, называемый межповерочным интервалом.

Внеочередная поверка выполняется до срока очередной периодической поверки.

Инспекционная поверка осуществляется при проведении государственного метрологического надзора.

Выборочная поверка – поверка группы СИТ, отобранных из партии определенным образом, по результатам которой устанавливается пригодности всей партии.

Методы поверки (калибровки) подразделяются на:

- непосредственное сличение поверяемого СИТ с РЭ того же вида;
- сличение поверяемого СИТ с однородным РЭ с помощью компаратора;
- прямое измерение поверяемым СИТ величины, воспроизводимой эталонной мерой;
- прямое измерение величины, воспроизводимой поверяемой мерой эталонным СИТ;
- косвенное измерение величины, воспроизводимой мерой с помощью подвергаемым поверке СИТ;
- независимая поверка, т.е. поверка СИТ относительных величин, не требующих передачи размера от эталонов;
- поэлементная поверка, при которой метрологические характеристики СИТ устанавливают по метрологическим характеристикам его элементов или частей.

1.6 Контрольные вопросы

1. В чем отличия шкал порядка, интервалов и отношений, употребляемых для сравнения размеров ФВ? Приведите примеры этих шкал.
2. Какие задачи необходимо решать для обеспечения единства измерений?
3. Какие этапы проходили системы единиц в процессе своего совершенствования?
4. Опишите основные принципы формирования рациональной системы единиц.
5. Какие единицы в процессе создания систем необходимо выбирать в качестве основных?
7. Как образуются производные единицы?
8. Что такое краткая и дольная единица? Изложите основные правила их образования.
9. Чем отличается централизованное воспроизведение единиц от децентрализованного?

10. Укажите разницу между первичным и рабочим эталонами.
11. Зачем необходимы вторичные эталоны? Какие типы вторичных эталонов Вы знаете?
12. В каком составе могут быть представлены эталоны?
13. Почему в качестве эталонов длины и массы были выбраны метр и килограмм Архива, а не первоначальные естественные эталоны?
14. Какова погрешность воспроизведения единицы длины метром Архива? Какими физическими процессами обусловлено несовершенство этого эталона?
15. Опишите принцип воспроизведения единицы длины с помощью криптоновой лампы.
16. Что представляет собой государственный первичный эталон массы и какова погрешность воспроизведения этой единицы?
17. Какими физическими процессами обусловлено изменение массы эталонной гири?
18. Какие принципы предлагаются в качестве основы естественного эталона массы?
19. Какие астрономические постоянные были положены в основу воспроизведения единицы времени?
20. Опишите принцип воспроизведения единицы времени с помощью цезиевого репера. Во сколько раз повышается стабильность кварцевого генератора при включении его в состав цезиевого репера частоты?
21. Для чего необходимо включение в состав государственного первичного эталона времени и частоты водородного мазера? Опишите принцип действия последнего.
22. Опишите принцип воспроизведения единиц времени, частоты и длины с помощью единого эталона этих величин. Какая физическая величина является основной при таком воспроизведении перечисленных единиц?
23. Какие физические эффекты можно положить в основу воспроизведения единицы силы электрического тока?
24. Опишите принцип воспроизведения ампера с помощью токовых весов и укажите величину погрешности воспроизведения.
25. Чем отличаются температурные шкалы Фаренгейта, Реомюра, Цельсия и Кельвина?
26. Что такое практическая температурная шкала и в чем ее отличия от термодинамической?
27. Опишите схему полного излучателя для воспроизведения единицы силы света. Какова погрешность воспроизведения кандели с помощью этого эталона?
28. Как определяется единица количества вещества через число Авогадро? Какова погрешность определения числа Авогадро?
29. Как основные единицы можно выразить через фундаментальные

физические константы: скорость света, постоянную Планка и гравитационную постоянную?

30. Опишите принцип воспроизведения единиц напряжения на основе эффекта Джозефсона.
31. Как воспроизводится единица электрического сопротивления с помощью квантового эффекта Холла?
32. Каковы основные принципы передачи размера единиц ФВ от эталонов к рабочим СИТ?
33. Каким документом регламентируется порядок передачи размера единицы ФВ во всех звеньях метрологической цепи?
34. В чем отличие государственных, ведомственных и локальных поверочных схем?
35. Из каких частей состоят поверочные схемы? Что указывается на чертеже поверочной схемы.
36. Перечислите основные методы поверки (калибровки) СИТ.

2 ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

2.1 Основные положения и определения

При проведении измерений необходимо различать размер физической величины (т.н. истинное значение) и результат измерения (измеренное значение).

Классическая теория измерений по поводу истинного значения физической величины выдвигает *два основных постулата*:

- 1) существует истинное значение измеряемой величины;
- 2) истинное значение отыскать невозможно.

Последний пессимистический постулат обусловлен воздействием на процесс измерения многих сопутствующих ему факторов (неточные действия оператора, изменение условий измерения, некорректная постановка измерительной задачи, несовершенство средства измерения и т.д.).

Отклонение результата измерения X от истинного значения Q измеряемой величины называется *погрешностью измерения* (Δ).

Погрешность является отрицательным показателем качества измерений. Положительным показателем последнего является *точность*. Значение точности характеризует близость к нулю погрешности результата измерений.

Из постулатов метрологии следует, что поскольку истинное значение отыскать невозможно, то невозможно отыскать и погрешность измерения. Поэтому в метрологии погрешность не измеряют, а оценивают, заменяя истинное значение действительным. *Действительное значение* – это значение ФВ, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели может быть использовано вместо него.

Несмотря на неопределенность понятия “погрешность”, удобство использования последней заключается в возможности разделения ее на составляющие, каждая из которых обусловлена определенным фактором. Это позволяет исследовать источники погрешности, ввиду чего появляется возможность ввести поправки в результат измерения или организовать измерительный эксперимент так, чтобы свести суммарную погрешность к допустимому уровню.

Классификация погрешностей возможна по различным признакам (рис. 2.1).

По способу выражения погрешность делят на абсолютную, приведенную и относительную.

Абсолютная погрешность – это разность между измеренным и истинным значением измеряемой величины:

$$\Delta = X - Q. \quad (2.1)$$

Отличительной особенностью абсолютной погрешности является то, что она выражена в единицах измеряемой величины.

Относительная погрешность равна выраженному в процентах отношению абсолютной погрешности к истинному или измеренному значению измеряемой величины:

$$\delta = \frac{\Delta \cdot 100\%}{Q} = \left(\frac{X}{Q} - 1\right) \cdot 100\%. \quad (2.2)$$

Приведенная погрешность равна выраженному в процентах отношению абсолютной погрешности к нормированному значению X_H измеряемой величины:

$$\gamma = \frac{\Delta}{X_H} \cdot 100\%. \quad (2.3)$$

Значение X_H равно, как правило, значению предела измерений СИТ.

По характеру изменения погрешности измерения делят на систематические и случайные.

Систематические погрешности остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях ФВ одного и того же размера.

Случайные погрешности хаотически изменяют свое значение и знак при повторных измерениях ФВ одного и того же размера.

Систематическая погрешность, в зависимости от характера изменения, может подразделяться на постоянную и переменную – периодическую или монотонную. К случайным погрешностям относятся грубые погрешности, существенно превышающие ожидаемые при данных условиях значения погрешности. Такие погрешности могут возникать, например, при резком кратковременном изменении напряжения в сети питания средства измерения. Грубые погрешности можно выявить при статистической обработке результатов измерений и исключить из их числа.

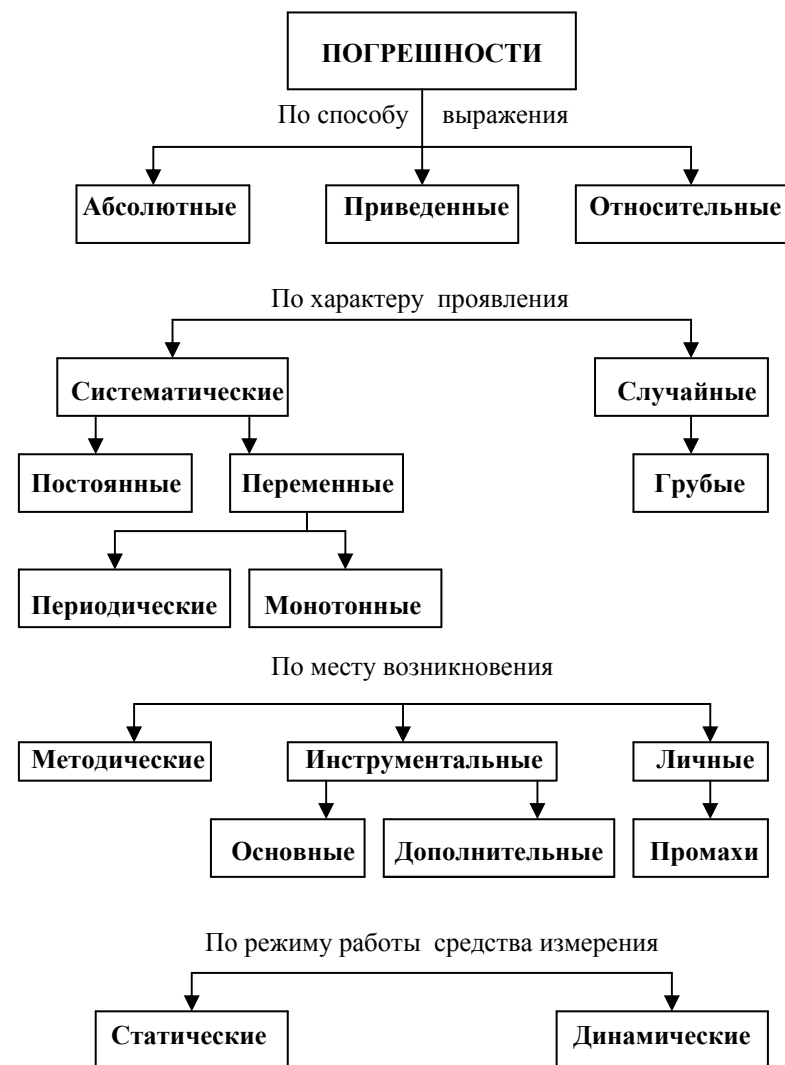


Рисунок 2.1 – Классификация погрешностей измерений

По месту (причине) возникновения различают методические, инструментальные и личные погрешности.

Методические погрешности – это погрешности, обусловленные несовершенством метода измерения, например погрешность квантования, возникающая при применении цифровых СИТ.

Инструментальные погрешности – составляющая погрешности, обусловленная несовершенством применяемых СИТ. Различают основную погрешность СИТ (погрешность в условиях, принятых за нормальные) и дополнительную погрешность, т.е. погрешность, обусловленную отклонением условий от нормальных.

Личные погрешности – погрешности оператора, например, погрешность, обусловленная явлением параллакса при считывании показаний со шкалы стрелочного прибора. Грубые личные погрешности, называемые промахами, появляются в результате ошибки при считывании показаний или описки при записи результатов измерений. Как и грубые погрешности, промахи выявляются при статистической обработке результатов измерений и исключаются из их числа.

По режиму работы средств измерения различают статические и динамические погрешности.

Статическая погрешность – это погрешность измерения ФВ, размер которой можно считать неизменным за время измерения.

Динамическая погрешность – это составляющая погрешности измерений, возникающая дополнительно к статической во время динамических измерений при которых размер измеряемой ФВ нельзя считать неизменным. Она определяется двумя факторами: динамическими свойствами СИТ и характером изменений во времени измеряемой величины.

2.2 Вероятностное представление результатов и погрешностей измерений

Учитывая присутствие погрешности в результате измерений X , последний можно представить в виде следующего выражения

$$X = Q + \Delta = Q + \Delta_c + \dot{\Delta}, \quad (2.4)$$

где Δ_c - систематическая составляющая погрешности Δ ;

$\dot{\Delta}$ - случайная составляющая погрешности Δ .

Поскольку результат измерения содержит случайную погрешность и неопределенную по величине систематическую погрешность, то он сам является случайной величиной. Как и всякая случайная величина, результат измерения полностью характеризуется величиной распределения $p(X)$. Примерный вид $p(X)$ изображен на рис. 2.2.

На этом же рисунке изображены плотности распределения случайной погрешности $p(\dot{\Delta})$ и суммарной погрешности $p(\Delta + \Delta_c) = p(\Delta)$.

Случайная погрешность по определению является центрированной случайной величиной. Поэтому ее математическое ожидание $M(\dot{\Delta}) = 0$. Наличие систематической погрешности приводит к смещению математического ожидания суммарной $\Delta = \dot{\Delta} + \Delta_c$ погрешности на величину $M(\Delta) = \Delta_c$. Плотность распределения результата измерения $p(X)$ смещена относительно суммарной погрешности на величину $Q = M(X - \Delta_c)$.

Таким образом, взаимное положение истинного значения ФВ Q и результата ее измерения X на числовой оси не определено. Поэтому мы не можем по результату измерений определить Q , но можно попытаться оценить интервал, в который с заданной (доверительной) вероятностью попадает Q . Этот интервал также называется доверительным (рис. 2.3). Термин “доверительный” выражает степень доверия к результату измерений.

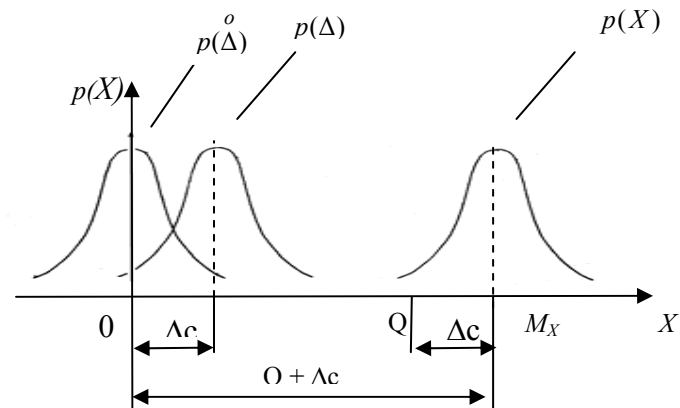


Рисунок 2.2 - Вероятностное представление результатов и погрешностей измерений

Доверительным интервалом называется интервал, границы которого симметричны относительно математического ожидания, а вероятность попадания в который результата измерений равна доверительной.

На рис. 2.3 видно, что ширина доверительного интервала 2ϵ зависит от доверительной вероятности P_d , вида распределения и его среднеквадратического отклонения, которое характеризует степень рассеяния результатов измерений вокруг математического ожидания M_X .

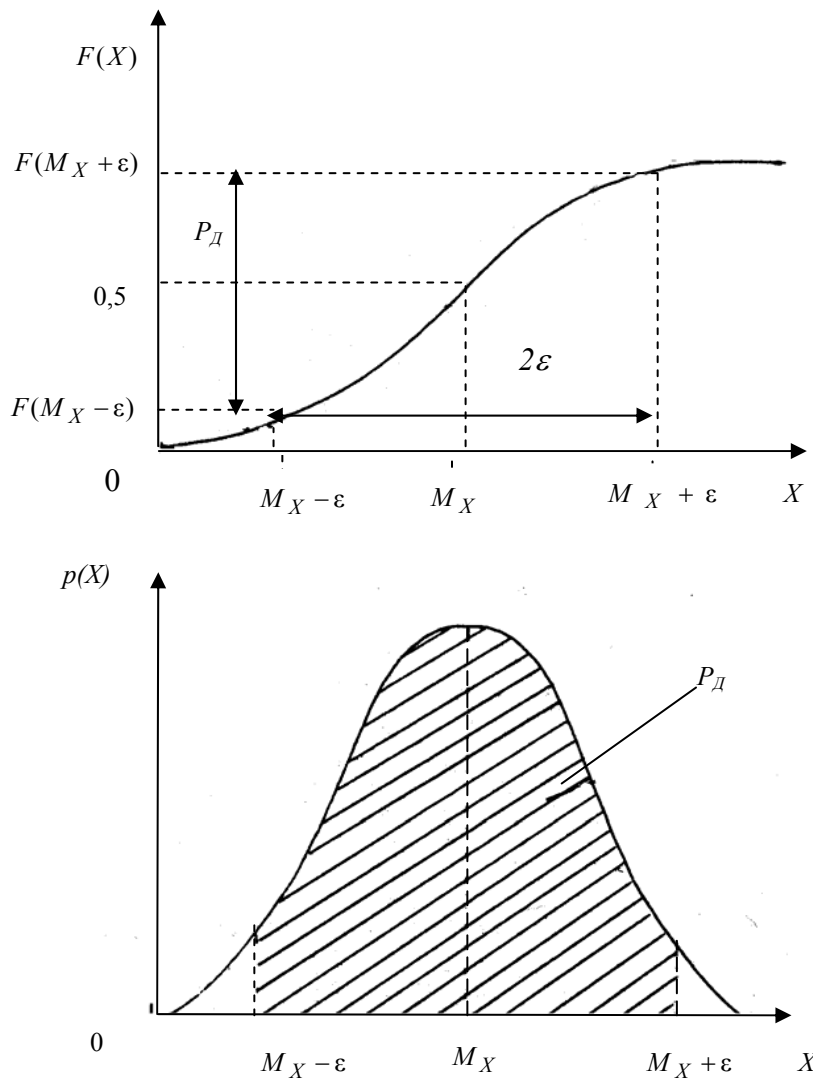


Рисунок 2.3 - Доверительная вероятность и доверительный интервал

Если закон распределения неизвестен, то для оценки доверительного интервала следует воспользоваться *неравенством Чебышева*.

Для вывода неравенства оценим вероятность того, что измеряемая величина не попадает в доверительный интервал $(M_X - \epsilon; M_X + \epsilon)$

$$P\{|X - M_X| \geq \epsilon\} = \int_{-\infty}^{M_X - \epsilon} p(X) dX + \int_{M_X + \epsilon}^{\infty} p(X) dX. \quad (2.5)$$

По определению дисперсия X равна

$$D_X = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(X) (X - M_X)^2 dX. \quad (2.6)$$

В формуле (2.6) положим подынтегральное выражение равным нулю на интервале $(M_X - \epsilon; M_X + \epsilon)$. В этом случае будет иметь место неравенство

$$D_X \geq \int_{-\infty}^{M_X - \epsilon} p(X) |X - M_X|^2 dX + \int_{M_X + \epsilon}^{\infty} p(X) |X - M_X|^2 dX. \quad (2.7)$$

Так как по начальному условию $\epsilon \leq |X - M_X|$, то заменив в неравенстве (2.7) $|X - M_X|$ на ϵ мы усиливаем это неравенство, получая

$$D_X \geq \epsilon^2 \int_{-\infty}^{M_X - \epsilon} p(X) dX + \epsilon^2 \int_{M_X + \epsilon}^{\infty} p(X) dX. \quad (2.8)$$

Правая часть неравенства (2.8) совпадает с правой частью выражения (2.5). Учитывая это, можно записать $P_D = P\{|x - M_x \leq \epsilon\} \geq 1 - \frac{D_x}{\epsilon^2}$, откуда

$$\epsilon \leq \frac{\sigma_X}{\sqrt{1 - P_D}}. \quad (2.9)$$

В предельном случае

$$\epsilon = \frac{\sigma_X}{\sqrt{1 - P_D}} = t_p \sigma_X,$$

где $t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - P_D}}$ - т.н. *доверительный коэффициент*, зависящий от

доверительной вероятности. Зависимость $t_p(P_D)$, для неизвестного закона распределения, вытекающая из неравенства Чебышева, представлена в табл. 2.1.

Значения t_p , получаемые из неравенства Чебышева, оказываются чрезмерно завышенными, особенно при $P \rightarrow 1$. Поэтому для симметричных законов распределения можно воспользоваться неравенством Кампа – Мейделя

$$P_D \geq 1 - \frac{4}{9t_p^2}, \quad (2.10)$$

откуда

$$t_p = \frac{2}{3\sqrt{1-P_D}}. \quad (2.11)$$

Значения t_p , полученные из неравенства Кампа-Мейделя для известных симметричных законов распределения, приведены в табл.2.1.

Таблица 2.1 - Зависимости доверительного коэффициента $t_p(P_D)$ для различных законов распределения

Закон распределения	Доверительная вероятность P_D			
	0,9	0,95	0,99	0,9973
Неравенство Чебышева	1,63	4,5	10	19
Неравенство Кампа-Мейделя	1,1	3	6,7	12
Равновероятный	1,56	1,65	1,71	$\sqrt{3}$
Симпсона	1,67	1,9	2,2	$\sqrt{6}$
Нормальный	1,64	2	2,58	3
Лапласа	1,63	2,12	3,26	4,18
Арксинуса	1,4	1,4	1,41	$\sqrt{2}$

Для известных законов распределения значения доверительного коэффициента можно найти из выражения

$$P_D = F(M_X + \varepsilon) - F(M_X - \varepsilon) = \int_{M_X - \varepsilon}^{M_X + \varepsilon} p(X) dX, \quad (2.12)$$

подставляя вместо $F(M_X \pm \varepsilon)$ соответствующие аналитические выражения для интегральной функции распределения результатов или погрешностей измерения.

Равновероятное распределение (рис. 2.4, а).

Плотность распределения

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & X \in [a; b]; \\ 0, & X \notin [a; b]. \end{cases} \quad (2.13)$$

Интегральная функция распределения

$$F(X) = \int_{-\infty}^X p(u) du = \begin{cases} \frac{X-a}{b-a}, & X \in [a; b]; \\ 0, & X \leq a; \\ 1, & X \geq b. \end{cases} \quad (2.14)$$

Числовые характеристики распределения – математическое ожидание

$$M_X = \frac{b+a}{2}; \text{ среднее квадратическое отклонение } \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}.$$

Доверительная вероятность

$$P_D = F(M_X + \varepsilon) - F(M_X - \varepsilon) = \frac{M_X + \varepsilon - a - M_X + \varepsilon + a}{b-a} = \frac{2\varepsilon}{b-a} = \frac{2\varepsilon}{\sigma_X \sqrt{12}}. \quad (2.15)$$

Отсюда $\varepsilon = \sigma_X \sqrt{3} P_D; \quad t_p = \sqrt{3} P_D.$

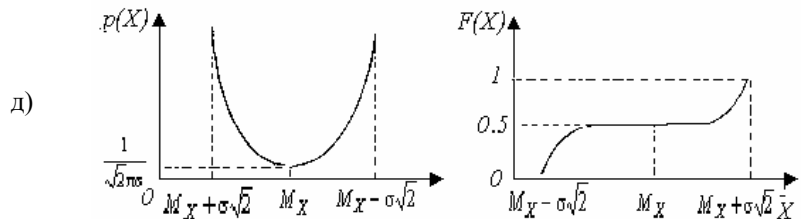
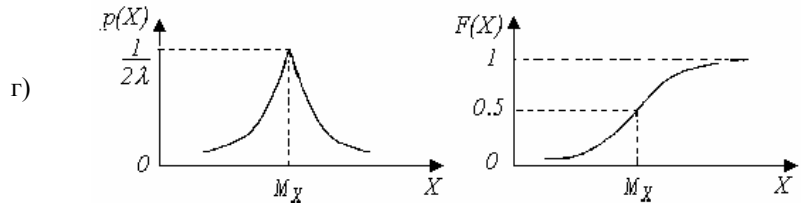
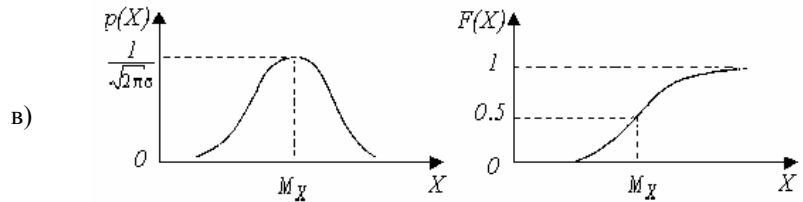
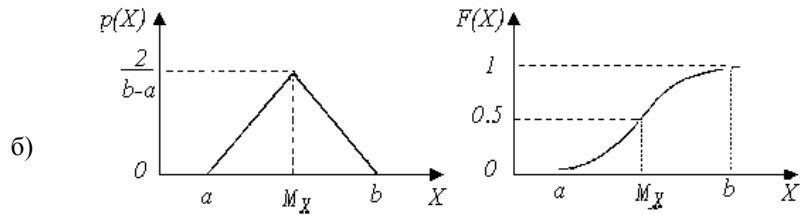
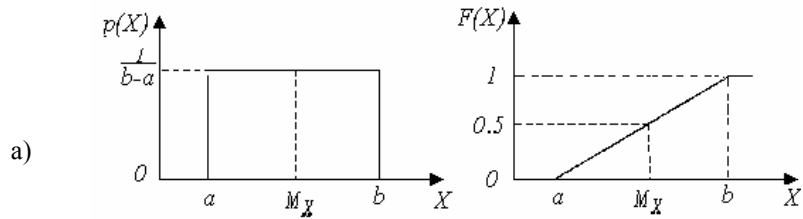
Треугольное распределение (Симпсона) (рис. 2.4, б).

Плотность распределения

$$p(X) = \begin{cases} \frac{4(X-a)}{(b-a)^2}, & X \in [a; M_X]; \\ \frac{4(b-X)}{(b-a)^2}, & X \in [M_X; b]; \\ 0, & X \notin [a; b]. \end{cases} \quad (2.16)$$

Интегральная функция распределения

$$F(X) = \begin{cases} \frac{2(X-a)^2}{(b-a)^2}, & X \in [a; M_X]; \\ 1 - \frac{2(b-X)^2}{(b-a)^2}, & X \in [M_X; b]; \\ 0, & X \leq a; \\ 1, & X \geq b. \end{cases} \quad (2.17)$$



а - равновероятный; б - треугольный (Симпсона); в - нормальный (Гаусса); г - двойной экспоненциальный (Лапласа); д - арксинуса;

Рисунок 2.4 - Законы распределения результатов и погрешностей измерений

Числовые характеристики:

$$M_X = \frac{b+a}{2}; \quad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{24}}.$$

Доверительная вероятность

$$P_D = 1 - 2 \frac{(b - M_X - \varepsilon)^2}{(b-a)^2} - 2 \frac{(M_X - \varepsilon - a)^2}{(b-a)^2} = 1 - 4 \frac{(M_X - \varepsilon - a)^2}{(b-a)^2} =$$

$$= 1 - 4 \frac{\left(\frac{b+a}{2} - \varepsilon - a\right)^2}{(b-a)^2} = 1 - \frac{(b-a-2\varepsilon)^2}{(b-a)^2} = 1 - \left(1 - \frac{2\varepsilon}{b-a}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sigma_X \sqrt{6}}\right)^2. \quad (2.18)$$

Отсюда

$$\varepsilon = \sigma_X \sqrt{6} (1 - \sqrt{1 - P_D}); \quad t_p = \sqrt{6} (1 - \sqrt{1 - P_D}). \quad (2.19)$$

Нормальный закон (Гаусса) (рис.2.4, в).

Плотность распределения

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(X-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}. \quad (2.20)$$

Интегральная функция распределения

$$F(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^X e^{-\frac{(u-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} du. \quad (2.21)$$

Доверительная вероятность

$$P_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{M_X - \varepsilon}^{M_X + \varepsilon} e^{-\frac{(X-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} dX.$$

Вводим замену переменного $\frac{X - M_X}{\sigma_X} = t$, откуда $dt = \frac{dX}{\sigma_X}$ и вместо

$M_X \pm \varepsilon$ в пределах интегрирования необходимо записать

$$t(M_X \pm \varepsilon) = \frac{M_X \pm \varepsilon - M_X}{\sigma_X} = \pm \frac{\varepsilon}{\sigma_X} = \pm t_p,$$

т.е.
$$P_D = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_p}^{t_p} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_p} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(t_p),$$

где $\Phi(t_p)$ - функция Лапласа.

Отсюда получаем

$$t_p = \Phi^{-1}(P_D/2). \quad (2.22)$$

Значение функции Φ^{-1} , обратной функции Лапласа, табулированы (табл. А1).

Двойное экспоненциальное распределение (Лапласа) (рис.2.4,г).

Плотность распределения

$$p(X) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|X-M_X|}{\lambda}}. \quad (2.23)$$

Интегральная функция распределения

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{X-M_X}{\lambda}}, & X < M_X; \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{X-M_X}{\lambda}}, & X \geq M_X. \end{cases} \quad (2.24)$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{2}\lambda.$$

Доверительная вероятность

$$P_D = 1 - \frac{1}{2} e^{\frac{M_X - M_X - \varepsilon}{\lambda}} - \frac{1}{2} e^{\frac{M_X - \varepsilon - M_X}{\lambda}} = 1 - e^{-\frac{\varepsilon}{\lambda}}.$$

Отсюда

$$\varepsilon = -\frac{\sigma_X}{\sqrt{2}} \ln(1 - P_D); \quad t_p = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 - P_D). \quad (2.25)$$

Распределение по закону арксинуса (рис. 2.4, д).

Плотность распределения

$$p(X) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{2\sigma_X^2 - (X - M_X)^2}}, & X \in (M_X - \sigma_X \sqrt{2}; M_X + \sigma_X \sqrt{2}); \\ 0, & X \notin (M_X - \sigma_X \sqrt{2}; M_X + \sigma_X \sqrt{2}). \end{cases} \quad (2.26)$$

Интегральная функция распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & X < M_X - \sigma_X \sqrt{2}; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{X - M_X}{\sigma_X \sqrt{2}}, & X \in [M_X - \sigma_X \sqrt{2}; M_X + \sigma_X \sqrt{2}]; \\ 1, & X > M_X + \sigma_X \sqrt{2}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Доверительная вероятность

$$P_D = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{M_X + \varepsilon - M_X}{\sqrt{2}\sigma_X} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{M_X - \varepsilon - M_X}{\sqrt{2}\sigma_X} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\sigma_X}.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{2}\sigma_X \sin \frac{P_D \pi}{2}, \quad t_p = \sqrt{2} \sin \frac{P_D \pi}{2}. \quad (2.28)$$

Зависимости доверительных коэффициентов t_p от доверительной вероятности P_D для различных законов распределения приведены на рис. 2.5. В таблице 2.1 даны значения t_p для приведенных выше законов распределения для наиболее употребимых вероятностей 0,9; 0,95; 0,99; 0,9973.

2.3 Случайные погрешности

Случайной мы называем погрешность, которая хаотично меняет свой размер и знак при повторных измерениях ФВ одного и того же размера, проводимых в одинаковых условиях.

Из этого определения вытекает *способ обнаружения случайной погрешности*, заключающийся в анализе результатов многократных наблюдений ФВ неизменного размера. Его удобно проводить, имея графическое изображение результатов последовательных наблюдений измеряемой величины $X_i = f(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Оценивание случайной погрешности производится путем определения ее границ ε_X , связанных с оценкой среднеквадратического отклонения (СКО) результатов наблюдений выражением

$$\varepsilon_X = \pm t_p \hat{\sigma}_X, \quad (2.29)$$

где t_p - доверительный коэффициент.

Как следует из выражения (2.29) для отыскания ε_X необходимо:

- 1) произвести оценку СКО $\hat{\sigma}_X$, которую невозможно найти без отыскания оценки математического ожидания \hat{M}_X ;
- 2) определить закон распределения случайной погрешности для нахождения t_p .

Рассмотрим решение этих задач.

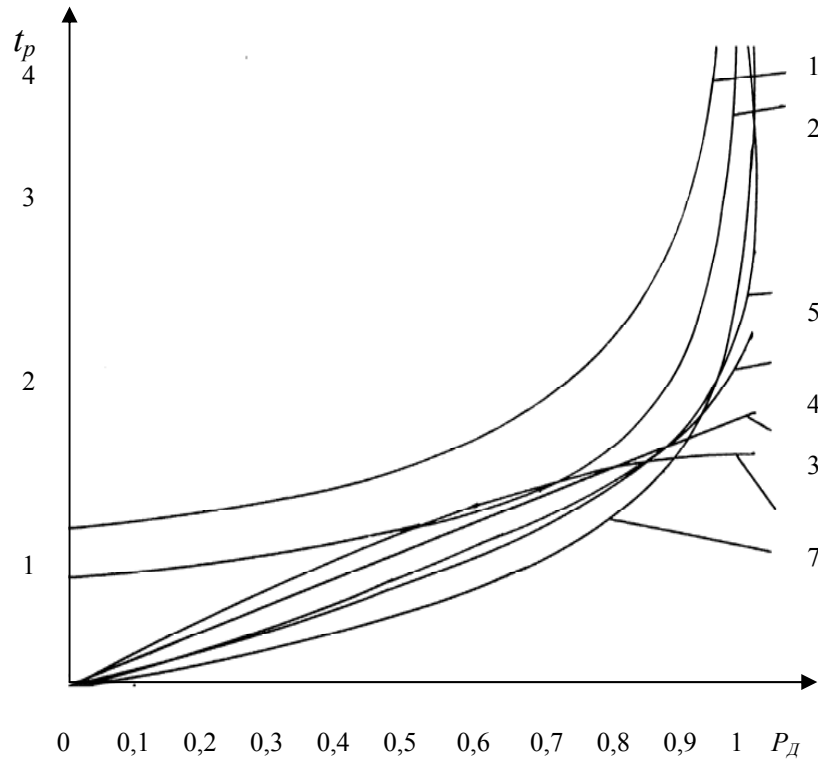
2.3.1 Определение точечных оценок числовых характеристик эмпирических законов распределения случайной погрешности

В отличие от самих числовых характеристик их оценки являются случайными величинами, причем их значения и рассеянность зависят от числа экспериментальных данных.

Точечные оценки числовых характеристик должны удовлетворять 3-м требованиям: они должны быть состоятельными, несмещенными и эффективными.

Состоятельной называется оценка, которая с увеличением выборки приближается к истинному значению характеристики

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{M}_X = M_X; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{D}_X = D_X.$$



- 1 – неравенство Чебышева; 2 – неравенство Кампа-Мейделя;
3 – равновероятный; 4 – Симпсона; 5 – нормальный; 6 – Лапласа;
7 – арксинуса

Рисунок 2.5 – Зависимость доверительного коэффициента t_p от доверительной вероятности P_d для различных законов распределения

По определению математического ожидания

$$M_X = \int_{-\infty}^{\infty} p(X)dX = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i p_i \Delta x.$$

Так как каждое значение x_i появляется один раз при общем объеме выборки n , то $p_i = 1/n\Delta x$, откуда

$$M_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right].$$

При конечном n оценкой M_X является среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Поскольку \bar{x} появилось из M_X при ограничении объема выборки, то \bar{x} является состоятельной оценкой математического ожидания.

По определению дисперсии

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (X - M_X)^2 p(X)dX = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2 p(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2,$$

то есть состоятельной оценкой D_X является так называемая выборочная дисперсия

$$\hat{D}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_x)^2. \quad (2.30)$$

На практике M_X неизвестно, поэтому при расчете \hat{D}_X математическое ожидание M_X заменяют оценкой \bar{x} :

$$\hat{D}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Это не влияет на состоятельность \hat{D}_X , поскольку $\bar{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_X$.

Несмещенной называется оценка, математическое ожидание которой равно самой характеристике.

$$M(\hat{M}_X) = M_X; \quad M(\hat{D}_X) = D_X.$$

Проверим несмещенность среднего арифметического

$$M[\bar{x}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n} n M_X.$$

Таким образом, среднее арифметическое является несмещенной оценкой математического ожидания результатов многократных наблюдений при любом законе распределения.

Проверим несмещенность оценки дисперсии (2.30)

$$M(\hat{D}_X) = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X + M_X - \bar{x})^2\right] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - M_X)^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)(\bar{x} - M_X)\right] = D_X + D_{\bar{x}} - 2M[(\bar{x} - M_X)\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - M_X)\right)] = D_X - D_{\bar{x}}.$$

Так как

$$D_{\bar{x}} = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i) = \frac{nD_X}{n^2} = \frac{D_X}{n},$$

то

$$M(\hat{D}_X) = \frac{n-1}{n} D_X.$$

Таким образом, замена математического ожидания на среднее арифметическое в выражении (2.30) приводит к смещению оценки дисперсии.

Несмещенную оценку дисперсии получают, домножая \hat{D}_X на коэффициент $\frac{n}{n-1}$, то есть несмещенной оценкой дисперсии является

$$\hat{D}_X = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (2.31)$$

При $n \rightarrow \infty$ коэффициент $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$, поэтому оценка (2.31) оказывается также состоятельной, как и оценка (2.30).

Оценка среднеквадратического отклонения результата наблюдения определяется как правило, по формуле

$$\hat{\sigma}_X = +\sqrt{D_X} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.32)$$

Однако, ввиду нелинейности операции извлечения квадратного корня, такая оценка является смещенной для малого числа наблюдений n , поэтому для устранения этого смещения для $n < 6$ применяют выражение

$$\hat{\sigma}_X = K_n \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.33)$$

Общий вид этого коэффициента для нормального распределения представлен на рис.2.6 и хорошо аппроксимируется выражением

$$K_n = 1 + \frac{1}{4(n-1)}. \quad (2.34)$$

Эффективной называется оценка, обладающая наименьшей дисперсией (рассеянием) по сравнению с остальными.

Для выбора наиболее эффективной оценки существует целый ряд методов. Наиболее распространенным является метод *максимального правдоподобия*, теоретически обоснованный Р. Фишером. Идея метода заключается в отыскании таких оценок параметров распределения, при которых достигается максимума т.н. *функция правдоподобия*. Последняя определяется как вероятность появления всех независимых результатов наблюдения x_1, x_2, \dots, x_n . Поскольку вероятность появления результата x_i , лежащего в интервале $X \pm \Delta x / 2$, где Δx - некоторая малая величина, равна $P_i = p(x_i)\Delta x$, то для независимых результатов наблюдения вероятность появления всего ряда наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n есть произведение этих вероятностей

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \Delta x p(x_i). \quad (2.35)$$

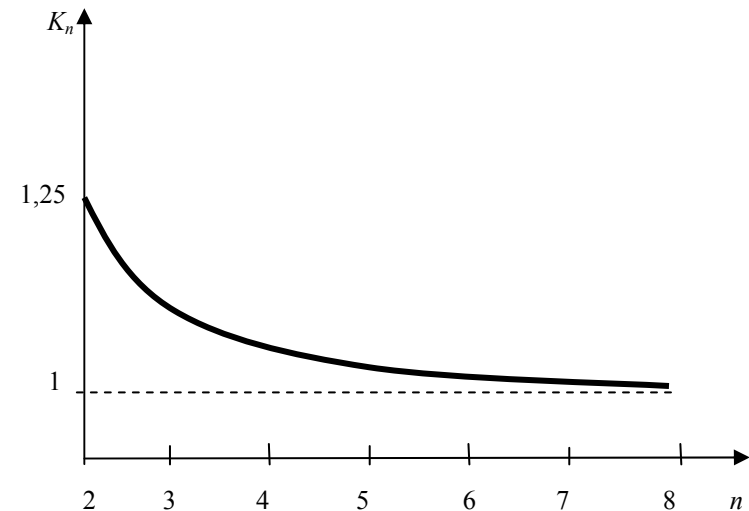


Рисунок 2.6 - Зависимость поправочного коэффициента для расчёта С.К.О. при малом числе измерений n

В соответствии с принципом максимального правдоподобия необходимо найти такие оценки параметров дифференциальной функции распределения $p(x_i)$, при которых выражение (2.35) достигает наибольшего значения.

Для упрощения вычислений пользуются логарифмической функцией правдоподобия

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \ln p(x_i). \quad (2.36)$$

Условие максимума (2.36) получают в результате решения системы уравнений, образуемой при приравнении нулю производных от (2.36) по тем параметрам, оценки которых мы хотим определить.

Эту задачу можно решить только для конкретного вида дифференциальной функции распределения.

Нормальное распределение.

Плотность распределения

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X}} e^{-\frac{(x_i - M_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Отсюда логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^n \ln(p_i) = \sum_{i=1}^n \left[-\ln \sqrt{2\pi\sigma_X} - \frac{(x_i - M_X)^2}{2\sigma_X^2} \right]. \quad (2.37)$$

Отыщем наиболее эффективную оценку математического ожидания для нормального распределения

$$\left. \frac{\partial L}{\partial M_X} \right|_{M_X = \hat{M}_X} = \frac{1}{2\sigma_X^2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \hat{M}_X) = 0,$$

то есть
$$\sum_{i=1}^n x_i - n\hat{M}_X = 0.$$

Отсюда $\hat{M}_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$. Таким образом, среднее арифметическое

является не только состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания, но и для нормального распределения еще и самой эффективной.

Дисперсия среднего арифметического, как уже было показано, равна

$$D_{\bar{x}} = \frac{D_X}{n} \quad (2.38)$$

То есть дисперсия среднего арифметического в n раз меньше дисперсии результата наблюдения. Для дисперсии

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \sigma_X} \right|_{\substack{M_X = \hat{M}_X \\ \sigma_X = \hat{\sigma}_X}} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{\hat{\sigma}_X} + 2 \frac{(x_i - \hat{M}_X)^2}{2\hat{\sigma}_X^2} \right] = 0,$$

откуда

$$\frac{n}{\hat{\sigma}_X} = \frac{1}{\hat{\sigma}_X^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{M}_X)^2 \quad \text{и}$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{M}_X)^2,$$

то есть для нормального распределения полученная оценка дисперсии является эффективной.

Экспоненциальное распределение (Лапласа).

Плотность распределения

$$p(x_i) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x_i - M_X|}{\lambda}},$$

для которой

$$\sigma_X = \sqrt{2}\lambda,$$

а ее график изображен на рис. 2.4, г.

Логарифмическая функция правдоподобия для двойного экспоненциального закона распределения имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^n \left(-\ln 2\lambda - \frac{|x_i - M_X|}{\lambda} \right).$$

Эффективная оценка математического ожидания определяется из выражения

$$\left. \frac{\partial L}{\partial M_X} \right|_{M_X = \hat{M}_X} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n |x_i - \hat{M}_X|}{\partial \hat{M}_X}.$$

Для упорядоченного ряда наблюдений ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \hat{M}_X} &= \frac{\partial}{\partial \hat{M}_X} \{ (\hat{M}_X - x_1) + (\hat{M}_X - x_2) + \dots + (\hat{M}_X - x_r) + (x_{r+1} - \hat{M}_X) + \\ &+ (x_{r+2} - \hat{M}_X) + \dots + (x_n - \hat{M}_X) \} = r - (n - r) = 2r - n = 0, \end{aligned}$$

откуда $r = n/2$.

То есть \hat{M}_X - значение, стоящее посередине ряда наблюдений. Оно называется медианой Me :

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n - \text{нечетное}; \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{2}, & n - \text{четное}. \end{cases} \quad (2.39)$$

Эффективная оценка λ определяется из выражения

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{M_X = \hat{M}_X \\ \lambda = \hat{\lambda}}} = -\frac{n}{\hat{\lambda}} + \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \hat{M}_X|}{\hat{\lambda}^2} = 0,$$

откуда

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - Me|. \quad (2.40)$$

Величина λ связана с σ_X соотношением

$$\lambda = \sigma_X / \sqrt{2},$$

поэтому

$$\hat{\sigma}_X = \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - Me|. \quad (2.41)$$

Равномерное распределение.

Плотность распределения

$$p(X) = \begin{cases} 0, & X < a; X > b \\ \frac{1}{(b-a)}, & a \leq X \leq b. \end{cases}$$

Так как в выражение для функции распределения не входит аргумент X , то обычная техника использования принципа максимального правдоподобия здесь неприемлема. Однако в этом случае экстремальная задача может быть решена непосредственно.

Функция правдоподобия

$$P(x_1, \dots, x_n, a, b) = \frac{1}{(b-a)^n}.$$

Параметры a и b отыскиваются из ряда наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n , причем

$$a \leq \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\};$$

$$b \geq \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}.$$

Очевидно, что решение экстремальной задачи $\max \frac{1}{(b-a)^n}$ будет

достигаться в том случае, когда

$$\hat{a} = x_{\min}; \quad \hat{b} = x_{\max},$$

т.е. для равномерного распределения эффективные оценки математического ожидания и дисперсии будут находиться через минимальные и максимальные значения ряда наблюдений. Поэтому эффективной оценкой математического ожидания является полуразмах

$$x_{cp} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, \quad (2.42)$$

а дисперсия

$$\hat{D}_X = \frac{(x_{\max} - x_{\min})^2}{12}. \quad (2.43)$$

Для других симметричных распределений предлагается определять эффективную оценку математического ожидания в зависимости от величины оценки островершинности (эксцесса) их распределений

$$\hat{E} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n\hat{\sigma}_X^4} - 3.$$

Если $\hat{E} \geq 1$, т.е. распределение близко к экспоненциальному ($E=3$), то за оценку математического ожидания лучше взять медиану.

Если $-0,5 \leq E \leq 1$, т.е. распределение близко к нормальному ($E=0$), то за ее оценку лучше взять среднее арифметическое.

Если $E < -0,5$, т.е. распределение близко к равномерному, то наиболее целесообразно оценкой математического ожидания считать полуразмах. Эффективные оценки дисперсии в этих случаях соответствуют эффективным оценкам дисперсии указанных распределений (табл.2.2).

Таблица 2.2 - Эффективные оценки математического ожидания и СК0 симметричных распределений

E	$< -0,5$	$-0,5 \dots 1$	> 1
$\hat{M}_{эфф}$	$x_{cp} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	Me Смотри (2.39)
$\hat{\sigma}_{эфф}$	$\hat{\sigma}_X = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{\sqrt{12}}$	$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$	$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i - Me }$

2.3.2 Определение закона распределения случайной погрешности

Задача определения закона распределения случайной погрешности решается в два этапа:

- 1) построение гистограммы или кумулятивной кривой распределения случайной погрешности и высказывание гипотезы о виде распределения;
- 2) Проверка гипотезы о виде распределения с помощью критерия согласия.

Гистограмма и кумулятивная кривая являются дискретными аналогами дифференциальной и интегральной функций распределения, построенными по статистической совокупности из n результатов наблюдений. Результаты наблюдений можно представить на числовой оси в виде точек x_1, x_2, \dots, x_n . Разность между наибольшим и наименьшим наблюдаемым значением отсчетов равна диапазону результатов наблюдения

$$\Delta X = x_{\max} - x_{\min}.$$

Этот диапазон можно разбить на L интервалов, длительностью

$$\Delta x = \Delta X / L.$$

Через границы этих интервалов можно записать формулу для интегральной функции распределения в следующем виде

$$F(x_{\min} + j\Delta x) = P(x_i < x_{\min} + j\Delta x),$$

где $j = 0, 1, \dots, L$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Если m_k - количество наблюдаемых значений, попавших в k -й интервал, то

$$P(x_i < x_{\min} + j\Delta x) = \frac{\sum_{k=0}^j m_k}{n}.$$

Эту зависимость можно представить в виде точек на графике $F(i\Delta x)$ (рис.2.7). Ломаная линия, соединяющая эти точки, называется кумулятивной кривой.

В пределе, при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta x \rightarrow 0$ кумулятивная кривая стремится к интегральной функции распределения, сохраняя все ее свойства:

- 1) $F(x_{\min}) = 0$;
- 2) $F(x_{\max}) = 1$;
- 3) $F[(j+1)\Delta x] > F(j\Delta x)$ - возрастающая функция.

Также, как интегральная функция распределения связана с дифференциальной кумулятивной кривой, так кумулятивная кривая связана с гистограммой:

$$p(j\Delta x) = \frac{F(x_{\min} + j\Delta x) - F[x_{\min} + (j-1)\Delta x]}{\Delta x} = \frac{\sum_{k=0}^j m_k - \sum_{k=0}^{j-1} m_k}{n\Delta x} = \frac{m_j}{n\Delta x}.$$

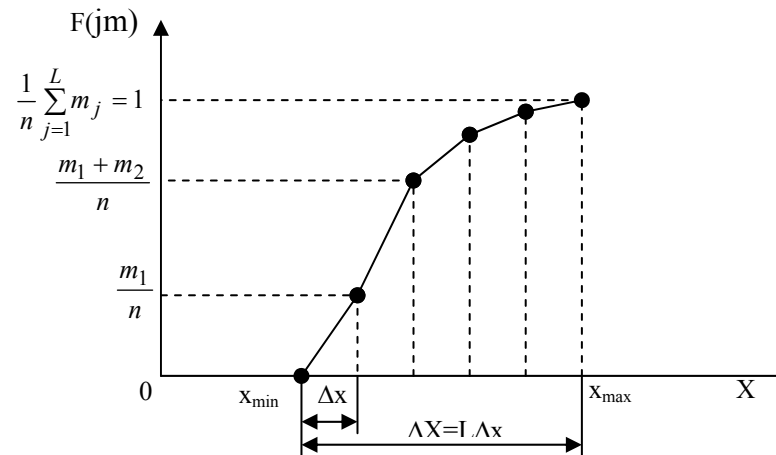


Рисунок 2.7 - Кумулятивная кривая

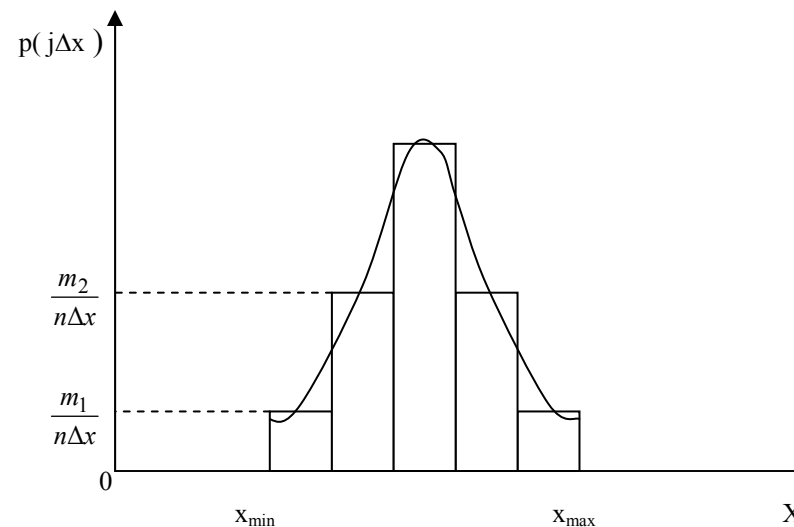


Рисунок 2.8 - Гистограмма

Эта зависимость представлена на рис. 2.8 и представляет собой совокупность прямоугольников высотой $p(j\Delta x) = m_j / n\Delta x$. Гистограмма сохраняет все свойства дифференциального распределения, к которому стремится при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta x \rightarrow 0$:

- 1) $p(j\Delta x) > 0$;
- 2) площадь под кривой гистограммы равна 1 (условие нормировки)

$$\Delta x \sum_{j=1}^L \frac{m_j}{n\Delta x} = 1.$$

При построении кумулятивных кривых и гистограмм для большей наглядности следует придерживаться следующих правил:

- 1) интервалы, на которые разбивается ось абсцисс, следует выбирать одинаковыми;
- 2) число интервалов L устанавливается в соответствии с рекомендациями, приведенными в табл.2.3;

Таблица 2.3 - К выбору числа интервалов гистограммы (кумулятивной кривой)

N	40-100	100-500	500-1000	1000-10000
L	7-9	8-12	10-16	12-22

3) масштаб гистограммы выбирается таким, чтобы высота гистограммы к ее основанию относились как 5:8.

После построения кумулятивной кривой и гистограммы можно высказать гипотезу о виде распределения.

Правдоподобие гипотез о соответствии распределения результатов наблюдения выбранному закону проверяют с помощью так называемых *критериев согласия*. Таких критериев существует множество. Рассмотрим некоторые из них, нашедшие наибольшее применение на практике.

Критерий Колмогорова.

В этом критерии в качестве меры расхождения теоретического и экспериментального распределения взято максимальное значение модуля разности D между экспериментальной $F^*(X)$ и теоретической $F(X)$ интегральными функциями распределения

$$D = \max |F^*(X) - F(X)|.$$

Колмогоров доказал, что какова бы ни была функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины x , при неограниченном возрастании числа независимых наблюдений n , вероятность неравенства

$$D\sqrt{n} \geq \lambda$$

стремится к пределу

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Зависимость $P(\lambda)$ изображена на рис.2.9 и в таблице А2.

Схема применения критерия Колмогорова заключается в следующем:

- 1) строится экспериментальная функция распределения $F^*(X)$ и предполагается $F(X)$ теоретическая и определяется максимум D модуля разности между ними;
- 2) определяется величина $\lambda = D\sqrt{n}$;
- 3) по таблице А2 находится вероятность $P(\lambda)$ того, что максимальное отклонение между $F^*(X)$ и $F(X)$ не будет превышать D . Если $P(\lambda)$ мала, гипотезу отвергают.

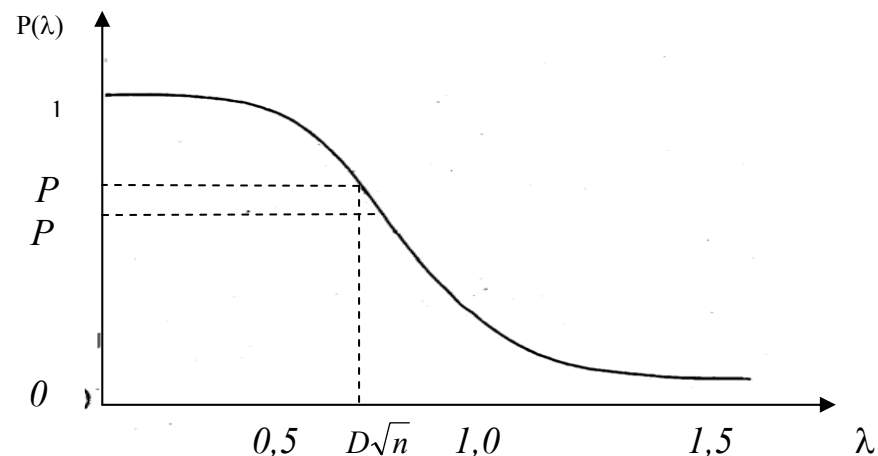


Рисунок 2.9 - Зависимость $P(\lambda)$ в критерии Колмогорова

Критерий Колмогорова очень прост и поэтому его охотно применяют на практике. Следует, однако, оговорить, что этот критерий можно применять только в случае, когда гипотетическое распределение $F(X)$ полностью известно заранее из каких-либо теоретических соображений, т.е. когда известен не только вид функции $F(X)$, но и входящие в нее параметры. Обычно на практике известен только общий вид функции $F(X)$, а входящие в нее параметры определяются по данному статистическому материалу. В этом случае (при малом n) критерий Колмогорова дает завышенные значения вероятности $P(\lambda)$, поэтому в иногда можно принять как правдоподобную гипотезу, в действительности плохо согласующуюся с опытными

ми данными.

Критерий Пирсона (χ^2).

В качестве меры расхождения экспериментальных данных с теоретическим дифференциальным законом распределения вероятностей в критерии Пирсона принимается величина

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^L \frac{(m_j - m_{j0})^2}{m_{j0}},$$

где m_j - число результатов наблюдений, попавших на j -й интервал гистограммы;

m_{j0} - действительное число результатов наблюдений, которые попали бы на j -й интервал, при полном соответствии эмпирического закона распределения гипотетическому.

Значение m_{j0} рассчитывается по формуле

$$m_{j0} = p_{jcp} n \Delta x,$$

где p_{jcp} - значение гипотетической функции распределения в точке, соответствующей середине j -го интервала гистограммы;

n - общее число наблюдений;

Δx - ширина интервала гистограммы.

Величина χ^2 распределена по закону Пирсона (рис.2.10). Распределение зависит от параметра k , называемого числом "степеней свободы".

Число степеней свободы равно числу интервалов гистограммы L минус число независимых условий, наложенных на эмпирическое распределение. Для симметричных законов распределения такими условиями являются:

1) условие нормировки $\sum_{j=1}^L \frac{m_j}{n} = 1$;

2) требование равенства математического ожидания гипотетического распределения среднему арифметическому экспериментального распределения

$$\sum_{j=1}^L x_j \frac{m_j}{n} = M_x;$$

3) требование равенства дисперсии гипотетического распределения оценке дисперсии экспериментального распределения

$$\sum_{j=1}^L (x_j - \hat{M}_X)^2 \frac{m_j}{n} = D_X.$$

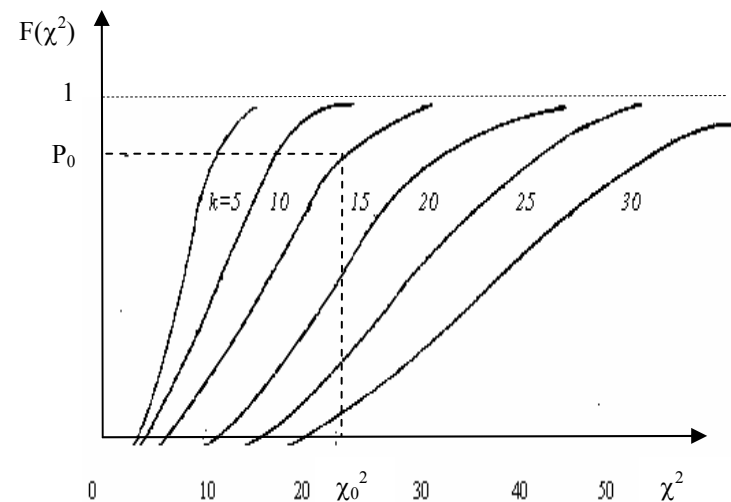


Рисунок 2.10 - Интегральная функция распределения Пирсона

Поэтому $k=L-3$. Для распределения Пирсона составлены соответствующие таблицы (см. таблицу А3). Пользуясь этими таблицами можно найти для каждого χ^2 и числа степеней свободы вероятность P_0 того, что величина, распределенная по закону χ^2 превзойдет это значение.

На практике вероятностью P_0 задаются и по таблицам определяют величину χ_0^2 . Если $\chi^2 \leq \chi_0^2$, то гипотеза о виде закона распределения подтверждается, если $\chi^2 \geq \chi_0^2$, то отклоняется.

При проверке закона распределения по критерию Пирсона хорошие результаты получаются только если $n > 40 \dots 50$. Для n лежащем в диапазоне от $10 \dots 15$ до $40 \dots 50$ применяется так называемый *составной критерий*.

Составной критерий.

Составной критерий применяется обычно для проверки принадлежности экспериментального распределения *нормальному*. Критерий состоит из двух частей.

1. В *первой части критерия* для ряда наблюдений рассчитывается величина

$$d = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

и проверяется выполнение условий $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$, где d_{\min} и d_{\max} зависят от вероятности P (рис.2.11), с которой принимается решение и находятся по таблице А4. Если это условие выполняется, переходят ко второй части критерия.

2. Во второй части критерия определяют количество m результатов наблюдений, которые выходят за границы интервала

$$[\bar{x} - t_p \hat{\sigma}_X; \bar{x} + t_p \hat{\sigma}_X],$$

где t_p - доверительный коэффициент для нормального распределения (для $P=0,9973$ $t_p = 3$); $\hat{\sigma}_X$ - оценка среднеквадратического отклонения.

При числе наблюдений $n < 20$, m не должно быть больше 1, а при $n > 20$, $m \leq 2$. Если и это условие выполняется, то гипотеза о нормальности распределения подтверждается. При невыполнении одного из условий гипотеза отклоняется.

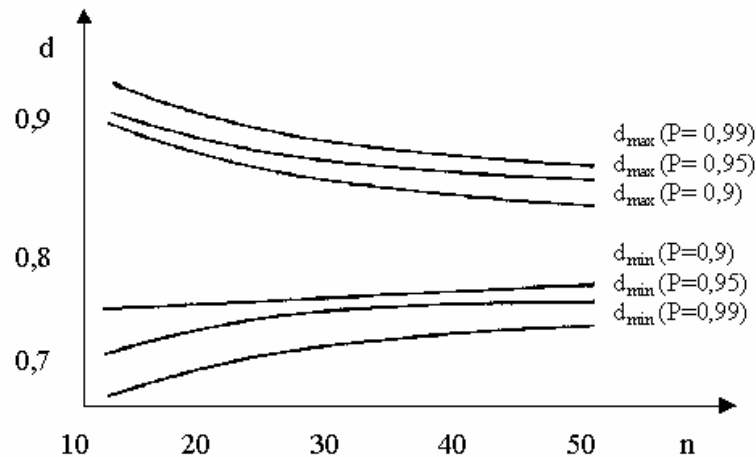


Рисунок 2.11 – Зависимость d от n в составном критерии

2.3.3 Минимизация случайной погрешности

Уменьшить случайную погрешность можно, определяя оценку математического ожидания многократных наблюдений измеряемой величины X . В этом случае за результат измерения, как правило, принимается среднее арифметическое результатов наблюдений

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Поскольку \bar{x} определяется по конечному числу наблюдений, то является случайной величиной.

Дисперсия среднего арифметического результатов наблюдений $D_{\bar{x}}$ в n раз меньше дисперсии однократного наблюдения D_X

$$D_{\bar{x}} = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_{x_i} = \frac{n D_X}{n^2} = \frac{D_X}{n}.$$

Поэтому, принимая за результат измерения \bar{x} , можно ожидать уменьшения случайной погрешности.

Границы погрешности среднего арифметического будут, очевидно, определяться выражением

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \pm t_p \sqrt{D_{\bar{x}}} = \pm t_p \sqrt{\frac{D_X}{n}}. \quad (2.47)$$

Для определения границ погрешности среднего арифметического необходимо знать его закон распределения.

Центральная предельная теорема теории вероятности гласит: если имеется n независимых случайных величин x_i распределенных по одному и тому же закону с математическим ожиданием M_X и дисперсией D_X ,

то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $\sum_{i=1}^n x_i$

неограниченно приближается к нормальному. Считается, что при $n > 20 \dots 30$ центральная предельная теорема соблюдается, поэтому в этом случае значения доверительного коэффициента в выражении (2.47) берется из таблицы для нормального распределения.

Если $n < 20 \dots 30$, то распределение \bar{x} уже нельзя считать нормальным. Как же определить t_p для этого случая?

Доверительная вероятность для \bar{x} равна

$$P_D = P(|\bar{x} - \hat{M}_X| < \varepsilon_{\bar{x}}).$$

Деля обе части неравенства на

$$\sqrt{\hat{D}_{\bar{x}}} = \sqrt{\hat{D}_X/n},$$

получаем

$$P_D = P\left(\sqrt{n} \frac{|\bar{x} - M_X|}{\sqrt{\hat{D}_X}} < \frac{\varepsilon_{\bar{x}}}{\sqrt{\frac{\hat{D}_X}{n}}}\right). \quad (2.48)$$

Обозначим $T = \sqrt{n} \frac{(\bar{x} - M_X)}{\sqrt{\hat{D}_X}}$, тогда

$$P_D = P(|T| < t_p) = F_T(t_p) - F_T(-t_p),$$

где F_T - интегральная функция распределения величины T .

Закон распределения T зависит от закона распределения x_i и числа наблюдений n .

Из теории вероятности известно, что если величина x_i распределена по нормальному закону, то величина T распределена по так называемому закону Стьюдента с $k = (n-1)$ степенью свободы.

Плотность распределения Стьюдента имеет вид (рис.2.12)

$$p(T, k) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{T^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}.$$

С ростом n распределения Стьюдента приближается к нормальному и при $n > 20 \dots 30$ уже неотличимо от него (рис 2.13).

Таким образом, если известно, что результаты отдельных наблюдений распределены по нормальному закону, то при числе наблюдений $n = 2 \dots 20$ при определении границ случайной погрешности доверительный коэффициент t_p берется из таблиц распределения Стьюдента для $(n-1)$ -й степени свободы и заданной доверительной вероятности P_D . Зависимость коэффициента Стьюдента $t_S(P, k)$ приведена на рис. 2.13 и в табл. А5.

При отсутствии таблиц с распределением Стьюдента, значение коэффициента t_S для $n = 6 \dots 20$ можно определить приближенно (с погрешностью до 20%) по формуле

$$t_S = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) t_{P_H},$$

где t_{P_H} - доверительный коэффициент для нормального распределения.

Более точно (с погрешностью не более 5%) значение коэффициента t_S для $n > 4$ и $P_D > 0,9$ можно аппроксимировать выражением

$$t_S = t_{P_H} \left[1 + 0,52(1 - P_D)^{-0,43} (n-1)^{-1,03} (1 - P_D)^{-0,04} \right].$$

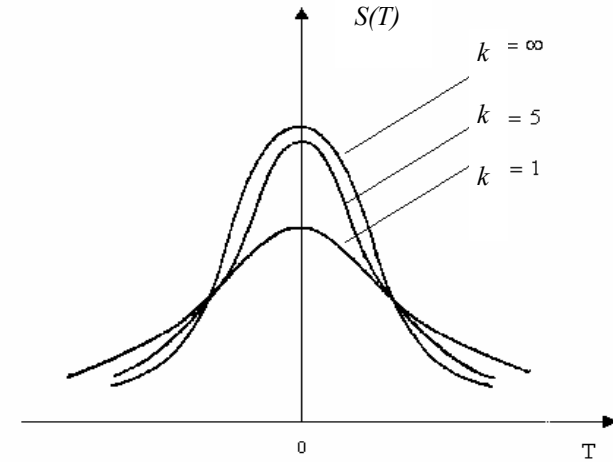


Рисунок 2.12 – Распределение Стьюдента

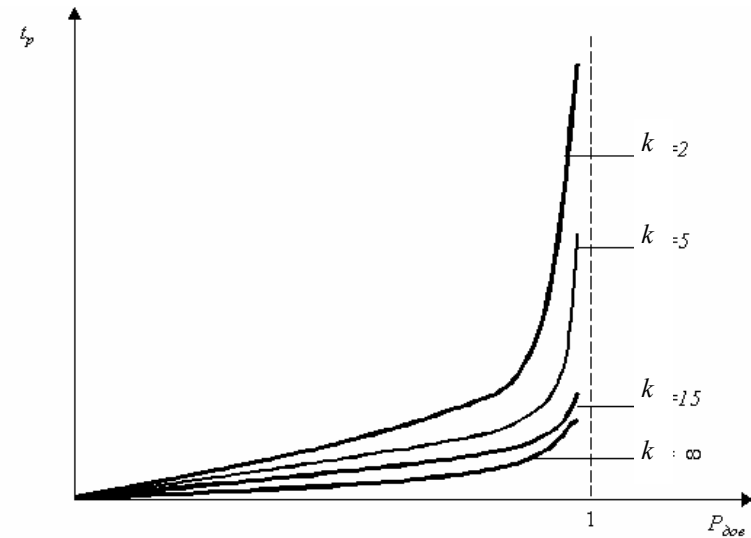


Рисунок 2.13 – Зависимость доверительного коэффициента от доверительной вероятности $t(P_D)$ для распределения Стьюдента

2.4 Грубые погрешности и промахи

Грубые погрешности и промахи являются особым видом случайных погрешностей. Грубые погрешности вызваны, как правило, резкими кратковременными изменениями условий измерений: механическими толчками, вибрациями, колебаниями внешних условий, скачками питающего напряжения. Промахи относятся к личным погрешностям и обусловлены неправильными действиями оператора (некорректное считывание показаний прибора, неправильной их записью и т.п.) И те, и другие погрешности вызывают заметные отличия в результатах наблюдений. Такие “подозрительные” результаты не подчиняются закону распределения основной массы результатов наблюдений и должны быть устранены из их числа.

Обнаружение грубых погрешностей и промахов производится с помощью специальных критериев, основанных на аппарате математической статистики.

2.4.1 Критерий Райта

Результат измерения x_i (x_{\max} или x_{\min}) не принадлежит заданному распределению (т.е. отягощен грубой погрешностью или промахом) с заданной вероятностью P , если

$$\frac{|x_i - M_X|}{\sigma_X} > t_P, \quad (2.52)$$

где t_P - доверительный коэффициент или, другими словами, если x_i выходит за границы интервала $M_X - t_P \sigma_X$; $M_X + t_P \sigma_X$.

Для нормального распределения обычно выбирают $P = 0,9973$, для которого $t_P = 3$, поэтому в этом случае критерий известен под названием “правило 3-х сигм”. Вероятность отклонения “нормального” результата наблюдения за указанные границы в этом случае равна малой величине $1 - P = 0,0027$.

Аналогичным образом можно сформулировать данный критерий и для других распределений. Для распределений, обладающих, в отличие от нормального, границами, следует выбирать $P=1$.

В этом случае вероятность появления результатов наблюдения за границами распределения равна нулю. Значения t_P , при $P=1$ для разных распределений указаны в таблице 2.4.

Таблица 2.4 - Значения t_P для различных распределений

Вид распределения	Арксинуса	Равномерное	Симпсона	Нормальное	Лапласа
t_P	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	3	4

Недостаток критерия - он справедлив для количества наблюдений $n > 20 \dots 30$, для которого можно считать, что $\bar{x} = M_X$ и $\hat{\sigma}_X = \sigma_X$.

2.4.2 Критерий Смирнова

При $n < 20 \dots 30$ для обнаружения грубых погрешностей и промахов пользуются критерием Смирнова, для которого выражение (2.52) принимает вид

$$\frac{|x_i - \bar{x}|}{\hat{\sigma}_X} > \beta$$

где β - случайная величина, зависящая не только от вероятности P , но и от числа наблюдений.

Зависимость β от n для разных P для нормального закона распределения результатов наблюдений имеет вид, указанный на рис. 2.14 (табл. А.6).

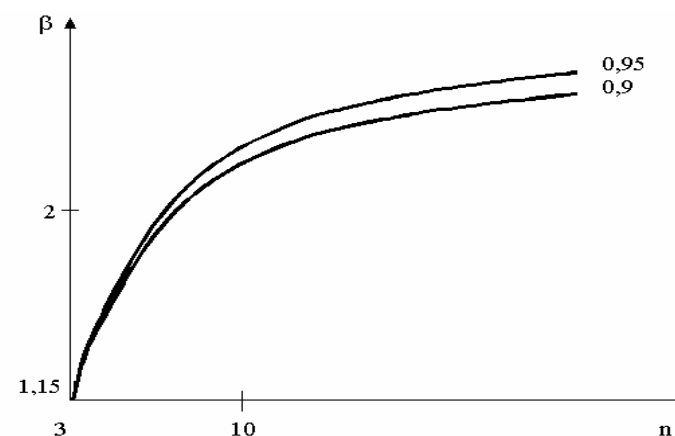


Рисунок 2.14 – Зависимость $\beta(n)$ в критерии Смирнова

2.5 Систематические погрешности

Систематические погрешности остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях ФВ одного и того же размера.

Систематические погрешности представляют собой определенную функцию неслучайных факторов, состав которых зависит от физических,

конструктивных и технологических особенностей СИ, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя.

Случайные погрешности могут быть изучены и минимизированы с помощью методов математической статистики и теории вероятности. Причины возникновения случайных погрешностей можно при этом не анализировать, повышение точности измерения достигается путем увеличения количества измерений.

Систематические погрешности остаются в результате измерения после проведения статистической обработки. Для их обнаружения и исключения необходимо провести специальный эксперимент. Эта задача требует глубокого изучения всей совокупности опытных данных измерения. Для ее решения нет готовых рекомендаций - здесь многое зависит от опыта, искусства и остроумия наблюдателя.

2.5.1 Классификация систематических погрешностей

По месту (причине) возникновения систематические погрешности делятся на методические, инструментальные и личные.

К *методическим погрешностям* (погрешностям метода измерения) относят следующие погрешности.

1. Погрешности, возникающие из-за несоответствия объекта измерения его модели. Например, погрешность измерения диаметра вала, сечение которого отличается от идеальной окружности; погрешность измерения среднеквадратического значения напряжения переменного тока, если его форма отлична от синусоидальной.

2. Погрешности, возникающие из-за воздействия средства измерения на объект. Например, погрешности измерения напряжения на резисторе вольтметром, имеющим малое собственное сопротивление, погрешности измерения распределения электромагнитного поля с помощью антенны конечных размеров, погрешности измерения температуры тела, возникающие из-за оттока тепла через датчик температуры и т.д.

3. Погрешности, заложенные в принцип действия средства измерения при его разработке. Например, погрешности квантования при аналого-цифровом преобразовании (несовершенство отражения непрерывного по размеру значения ФВ дискретным числом).

4. Погрешности косвенных измерений, обусловленные упрощением связи между измеряемой величиной и ее аргументами, измеряемыми с помощью прямых измерений. Например, измерение количества жидкости по ее уровню в сосуде. В общем случае это нелинейная функция, которую принимают за линейную.

5. Погрешности, обусловленные несовершенством алгоритма вычисления результата измерения, например, погрешность определения математического ожидания через среднее арифметическое, погрешности числен-

ных методов, например, численного интегрирования и дифференцирования, вычисление функции путем разложения ее в ряд и т.п.

Инструментальные погрешности - это погрешности, обусловленные несовершенством СИТ.

1. Погрешности, обусловленные ограниченностью диапазона действия физических явлений, положенных в основу принципа действия измерительного прибора. Эти погрешности, в зависимости от режима использования СИТ разделяют на статические и динамические. Примером статической погрешности является погрешность, обусловленная нелинейностью амплитудной характеристики СИТ, например, нелинейность закона Гука в широком диапазоне, нелинейность температурных датчиков (эффект Зеебека) при измерении температуры, частотные погрешности. Примером динамических погрешностей являются погрешности, обусловленные инерционными свойствами СИТ (инерционностью термометра при измерении температуры, инерционными свойствами спидометра при определении быстроменяющихся скоростей и т.д.),

2. Погрешности, обусловленные недостатком технологии изготовления или конструкции СИТ. Например, неравенство плеч у весов, неудовлетворительная подгонка мер, эксцентричность вращающихся частей измерительных приборов, люфт микрометрических винтов и т.д.

3. Погрешности, обусловленные неточностью выполнения метрологических операций с СИТ (градуировки, калибровки, поверки).

4. Погрешности от неправильной эксплуатации СИТ (неправильной установки или юстировки СИТ, расположения СИТ в сильных электрических или магнитных полях, помех в питающей сети от электрических машин и механизмов, влияния СИТ друг на друга).

Личные погрешности, или погрешности оператора обусловлены следующими факторами.

1. Инерционными свойствами органов чувств наблюдателя, например, при запаздывании в отчетах времени максимального положения маятника.

2. Влиянием месторасположения наблюдателя и особенности системы отсчета (параллакс), ошибки в интерполяции отсчета, попадающего между двумя оцифрованными отметками и др.

3. Ограничением диапазона чувствительности и нелинейностью характеристик восприятия органов чувств, например, неправильное определение нулевых биений при измерении частоты гетеродинным частотомером обусловлено ограничением снизу частотного диапазона чувствительности уха.

В зависимости *от характера изменения* систематические погрешности подразделяются на постоянные и переменные (монотонные и периодические).

Пример *постоянной* систематической погрешности - погрешность гири, имеющей массу 1,001 кг. Все измерения, выполняемые с примене-

нием этой гири, будут сопровождаться постоянной погрешностью 0,001 кг. Другой пример – погрешность, обусловленная неравенством плеч моста постоянного тока или разноплечью весов. В этом случае возникает постоянная относительная погрешность измерения сопротивления или массы взвешиваемого груза.

Монотонные (прогрессивные погрешности) – те, которые возрастают или убывают во времени. Пример – погрешность измерения напряжения с помощью потенциометра, обусловленная падением напряжения нормального элемента в его цепи или аналогичная погрешность измерения сопротивления резистора (методом амперметра), обусловленная разрядом питающих элементов.

Периодические погрешности периодически изменяют свою величину и знак. Например, погрешность, обусловленная смещением оси у секундомера относительно центра шкалы.

Систематическая погрешность может *не зависеть* или *зависеть* от значения измеряемой величины и соответственно быть *аддитивной* или *мультипликативной*.

2.5.2 Обнаружение систематических погрешностей

Бели результат наблюдения X содержит систематическую погрешность Δ_c , то оценка математического ожидания результата наблюдения

$$\hat{M}(X) = \hat{M}(Q) + \hat{M}(\Delta_c).$$

В отличие от случайных погрешностей $\hat{M}(\Delta_c) \neq 0$. Поэтому обнаружение и минимизация систематических погрешностей таким же образом, как и случайных не представляются возможными.

Способы обнаружения систематической погрешности различаются в зависимости от характера ее изменения.

Постоянные систематические погрешности не влияют на значения случайных отклонений результатов наблюдений от среднего арифметического, поэтому никакая математическая обработка результатов наблюдений не может привести к их обнаружению. Анализ таких погрешностей возможен только на основе априорных знаний об этих погрешностях, получаемых, например, при поверке СИТ, которая может осуществляться двумя способами.

1. С помощью эталонной *меры*. Измеряемая величина при поверке воспроизводится эталонной мерой, значение которой известно. Поэтому разность между средним арифметическим результата наблюдения и значением меры с точностью, определяемой погрешностью аттестации меры и случайными погрешностями измерения равна искомой систематической погрешности. Ценность полученных при поверке результатов определяется их постоянством в течение некоторого промежутка времени (межпери-

одного интервала) и их независимостью от внешних условий. Если СИТ имеет возможность измерять нулевое значение ФВ, то последнее (при аддитивной абсолютной погрешности СИТ) можно использовать вместо эталонной меры. Показания СИТ при отсутствии измеряемой величины будут равны искомой систематической погрешности.

2. С помощью эталонного *СИТ*. Произвольная по значению ФВ одновременно измеряется с помощью исследуемого СИТ и более точного (эталонного). Разность между их результатами измерения с погрешностью эталонного СИТ равна систематической погрешности исследуемого СИТ.

Переменные систематические погрешности, существенные по сравнению со случайными погрешностями, можно обнаружить, построив график последовательности результатов наблюдений или их отклонений от среднего арифметического. При *прогрессивной* систематической погрешности последовательность результатов наблюдений обнаруживает тенденцию к возрастанию или убыванию (рис.2.15, а), а при *наличии периодической* систематической погрешности прослеживаются колебания средних значений случайных отклонений (рис.2.15, б).

Если систематическая переменная погрешность *соизмерима со случайной*, то ее можно обнаружить с помощью специальных методов обработки. В этом случае можно воспользоваться аппаратом дисперсионного анализа. *Дисперсионный анализ* основан на исследованиях закономерностей соотношения дисперсий и средних арифметических разных групп наблюдений.

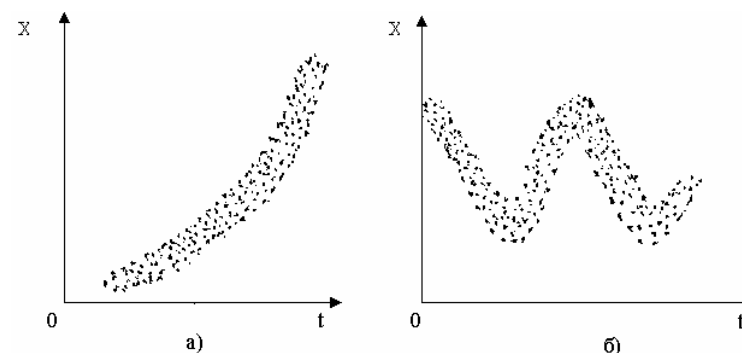


Рисунок 2.15 – Прогрессивная (монотонная) (а) и периодическая (б) погрешности

Наличие систематических погрешностей определяют по значению смещения средних арифметических, для чего применяются различные методы, среди которых наиболее известны методы Аббе и Фишера.

Метод Аббе заключается в следующем.

Определяется среднее арифметическое значение групп наблюдений в порядке их получения: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_L$. Определяются дисперсии средних арифметических групп

$$D_1 = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2,$$

где $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^L n_j$; $N = \sum_{j=1}^L n_j$; $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$;

n_j - число наблюдений в j -ой группе.

Определяют дисперсию отклонения соседних групп.

$$D_2 = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{j=1}^{L-1} (\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j)^2.$$

Отношение $v = D_2 / D_1$ должно быть меньше некоторого $v_{кр}$.

Критическое значение $v_{кр}$ в зависимости от уровня значимости q и числа групп L табулировано (см. график рис.2.16).

Метод Фишера состоит в сравнении оценок межгрупповой дисперсии D_L и средней дисперсии групп D

$$D_L = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^L n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2,$$

где $\bar{\bar{x}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^L n_j \bar{x}_j$; $N = \sum_{j=1}^L n_j$; $D = \frac{1}{N-L} \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2$.

Обе оценки дисперсии имеют распределение χ^2 с числом степеней свободы соответственно $k_1 = L-1$; $k_2 = N-L$.

Рассеивание средних арифметических считают допустимым, если $F = D_L / D$ при выбранной вероятности α лежит в пределах от F_n до F_g

$$P\{F_n \leq F \leq F_g\} = \alpha$$

где F_g определяется по таблице распределения Фишера (см. таблицу П.6), а $F_n = 1 / F_g$.

Если измерения выполнены двумя различными СИТ, то для оценки наличия систематической погрешности у одного из СИТ можно воспользоваться более простым критерием, заключающимся в определении выполнения неравенства

$$G = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq t_p \sqrt{\frac{\hat{D}_1}{n_1} + \frac{\hat{D}_2}{n_2}},$$

где t_p - доверительный коэффициент для нормального распределения (при $n_1 + n_2 > 30 \dots 40$).

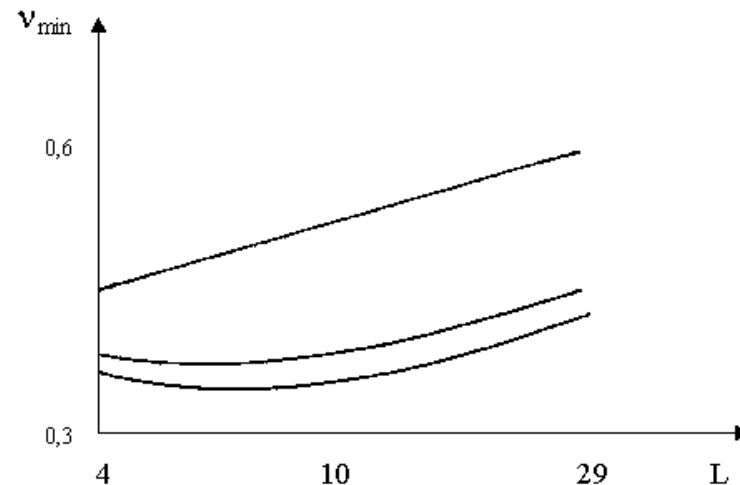


Рисунок 2.16 – Распределение Аббе

2.5.3 Компенсация систематических погрешностей

Способы компенсации систематических погрешностей зависят от характера изменения последних. Однако существует целый ряд способов, применимых как к постоянным, так и к переменным систематическим погрешностям.

Рассмотрим вначале эти способы.

1. *Получение априорной информации о погрешностях и введение соответствующих поправок в результат измерения.*

Поправку определяют экспериментально при поверке или в результате специальных исследований. Введение поправки, найденной с некоторой ограниченной точностью, устраняет одну, вполне определенную систематическую погрешность. Как правило, в результат измерений приходится вводить большое количество поправок, что приводит к росту его дисперсии.

Действительно, при исправлении результата X путем введения поправки q по формуле

$$X_1 = X - q$$

дисперсия X_1 будет равна сумме дисперсий X и q , т.е. $\sigma_{X_1}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_q^2$, откуда

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_q^2}.$$

Следовательно, до введения поправки необходимо оценить, не ухудшает ли она общей точности измерения.

Если до введения поправки q общая погрешность измерения величины X равна

$$\Delta_X = \Delta_c \pm t_p \sigma_X,$$

то после введения поправки q

$$\Delta_{X_1} = \Delta_c - q \pm t_p \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_q^2}.$$

Поправку целесообразно вводить при условии $\Delta_{X_1} < \Delta_X$, т.е.

$$\Delta_c - q \pm t_p \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_q^2} < \Delta_c \pm t_p \sigma_X.$$

Отсюда

$$q > t_p \sigma_X \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma_q^2}{\sigma_X^2}} - 1 \right).$$

При малых соотношениях σ_q^2 / σ_X^2 применяется разложение радикала в ряд

$$\sqrt{1 + a^2} \approx 1 + \frac{a^2}{2}.$$

Учитывая, что доверительный коэффициент $t_p \approx 2$ для $P=0,95$ и нормального распределения результатов измерения X_1 , то величина поправки q должна быть не меньше

$$q > \sigma_q^2 / \sigma_X.$$

2. *Определение поправочных формул и кривых, отражающих влияние на результат измерения условий измерения* (температуры окружающей среды T , давления P , амплитуды U и частоты f питающего напряжения и т.п.).

$$X = X_{изм} + f_1(T) + f_2(P) + f_3(U) + f_4(f). \quad (2.53)$$

При линейной связи условий измерений с его результатом выражение (2.53) записывается через коэффициенты влияния

$$X = X_{изм} + k_1 T + k_2 P + k_3 U + k_4 f \quad (2.54)$$

3. *Исключение источника погрешности:* тщательная установка аппа-

ратуры (юстировка), удаление источников излучения путем экранирования, стабилизация напряжения питания, уменьшение влияния механических воздействий (вибраций, тряски), ограничение температурных колебаний (путем помещения в термостат), устранение личных погрешностей (напр. от параллакса).

Для исключения *постоянных* систематических погрешностей применяют специальные методы измерений. Под методом измерений понимают последовательность операций с использованием СИТ для получения результата измерения.

1. **Метод замещения** - разновидность метода сравнения с мерой. Этот метод заключается в том, что измеряемая величина заменяется величиной, воспроизводимой мерой. СИТ в этом случае служит компаратором (устройством сравнения). Применение метода замещения устраняет погрешности от нелинейности амплитудной характеристики, от неточности градуировки и др. В этом случае можно применять неградуированные и некалиброванные СИТ.

Пример - взвешивание груза по методу Борда, устраняющего погрешность от неравноплечести весов. Груз массой X помещают на одну из чашек весов с длинами плеч l_1 и l_2 и уравнивают грузом массой T

$$X = \frac{l_1}{l_2} T.$$

Затем груз массой X снимают, а на ту же чашку кладут образцовые гири массой P , необходимой для обеспечения уравнивания весов

$$P = \frac{l_1}{l_2} T.$$

В этом случае с высокой точностью можно считать $X = P$.

2. **Метод противопоставлений** - измерения производятся с 2-мя наблюдениями так, чтобы причины постоянной погрешности оказывали разные, но известные по закономерности воздействия на результат наблюдения.

Пример - метод взвешивания Гаусса, устраняющий неравенство плеч у весов. В этом методе после уравнивания груза массой X гирями массой P_1

$$X = \frac{l_1}{l_2} P_1$$

груз массой X перекладывают на другую чашу весов и снова уравнивают гирями массой P_2

$$X = \frac{l_2}{l_1} P_2.$$

Перемножая эти неравенства, получаем

$$X = \sqrt{P_1 P_2}.$$

Аналогичный пример можно привести с измерением сопротивления с помощью моста постоянного тока, в этом случае можно производить измерение неизвестного сопротивления R_x с помощью магазина сопротивлений R_M , даже не зная соотношения сопротивлений в двух других плечах моста R_1 и R_2 . Действительно, после первого уравнивания моста

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} R_{M1}.$$

Далее меняем местами магазин сопротивлений и измеряемый резистор и производим повторное уравнивание

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_{M2}.$$

Из двух равенств получаем, что искомое сопротивление равно среднему геометрическому сопротивлений магазина при двух уравниваниях.

3. Метод компенсации погрешности по знаку - выполняется с 2-мя наблюдениями так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в нее с разными знаками (этот метод известен также под названием *метод инверсии входной величины*).

Пример - измерение малого напряжения U с помощью микровольтметра постоянного тока, имеющего паразитную термо-э.д.с. U_T в точках соединения источника напряжения с клеммами вольтметра. Выполняем одно измерение и получаем значение

$$U_{изм1} = U + U_T.$$

Затем переключаем полярность измеряемого напряжения и получаем значение

$$U_{изм2} = -U + U_T.$$

Полуразность полученных значений $U_{изм}$ даст нам свободный от систематической погрешности результат измерения

$$U = \frac{U_{изм1} - U_{изм2}}{2}.$$

Этим способом устраняется периодическая погрешность, например погрешность из-за смещения центра шкалы от геометрического центра прибора в углоизмерительных СИ.

Для исключения систематической *прогрессивной* погрешности, которая изменяется по линейному закону применяют **метод симметричных наблюдений** (рис. 2.17, а).

Сущность этого метода состоит в том, что несколько наблюдений производят через равные промежутки времени и затем вычисляют средние арифметические симметрично расположенных наблюдений. Теоретически все эти средние должны быть равны и это представляет возможность контролировать ход эксперимента, а также устранять указанные погрешности.

Для исключения *периодических* систематических погрешностей применяют **метод периодических наблюдений** (рис. 2.17, б). Для исключения систематической погрешности два наблюдения проводят через половину периода в моменты, когда эта систематическая погрешность имеет противоположные знаки, но равные значения. Затем усредняют результаты этих двух наблюдений, в результате чего систематическая погрешность, изменяющаяся по периодическому закону, компенсируется,

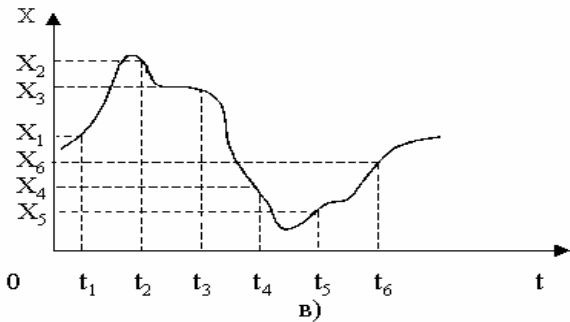
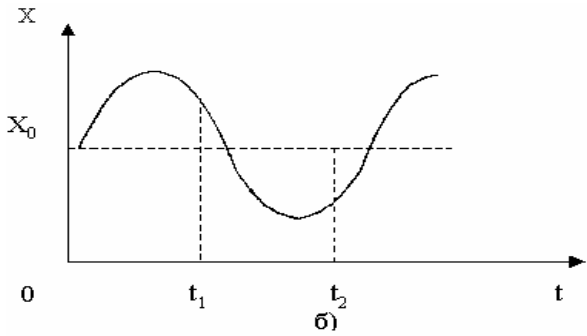
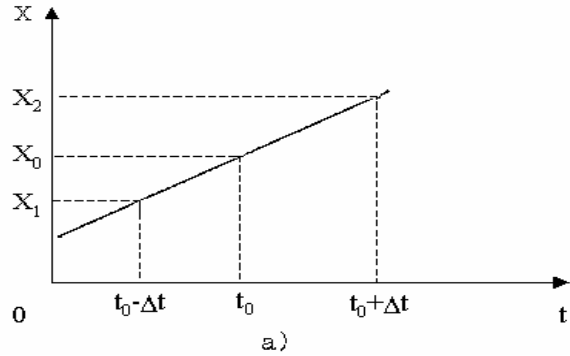
Если погрешность изменяется *по более сложному закону* и выявление этого закона нецелесообразно, то применяют **способ рандомизации систематической погрешности** (рис.2.17, в). Для рандомизации составляющей систематической погрешности причину ее вызывающую изменяют случайным образом, производя при этом n наблюдений. Определяют среднее арифметическое этих наблюдений, которое принимают равным результату измерений. В этом случае переменная составляющая систематической погрешности уменьшится в \sqrt{n} раз. Примером применения метода рандомизации служит уменьшение систематической погрешности от установки прибора по уровню путем n -кратного повторения процедуры установки перед каждым наблюдением.

2.6 Суммирование погрешностей

Погрешность измерения, как правило, вызывается разнообразными одновременно действующими причинами и поэтому может состоять из большого числа n составляющих. Рассмотрим, как из этих составляющих Δ_i (считаемых независимыми) формируется результирующая погрешность

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \Delta_i.$$

Каждую из составляющих Δ_i можно рассматривать как случайную величину, имеющую свой закон распределения. Очевидно, что закон распределения $p(\Delta)$ результирующей погрешности Δ является *композицией законов распределения* $p(\Delta_i)$ составляющих Δ_i . При этом математическое ожидание $M(\Delta)$ и дисперсия $D(\Delta)$ распределения результирующей погрешности является суммой соответственно математических ожиданий и дисперсий составляющих Δ_i



а) симметричные наблюдения; б) периодические наблюдения;
в) рандомизация;

Рисунок 2.17 – Методы исключения систематических погрешностей

$$M(\Delta) = \sum_{i=1}^m M(\Delta_i); \quad (2.56)$$

$$D(\Delta) = \sum_{i=1}^m D(\Delta_i). \quad (2.57)$$

Известно, что каждая из составляющих включает в себя две компоненты – случайную $\dot{\Delta}_i$ и систематическую Δ_{ci} . Из вероятностного представления погрешности (рис. 2.2) следует, что поскольку $M(\Delta_i) = \Delta_{ci}$, $M(\dot{\Delta}_i) = 0$ и $D(\Delta_i) = D(\dot{\Delta}_i)$, то

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^m \Delta_{ci}, \quad (2.58)$$

$$D(\dot{\Delta}) = \sum_{i=1}^m D(\dot{\Delta}_i) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2. \quad (2.59)$$

Таким образом, при формировании результирующей погрешности Δ , систематические составляющие суммируются арифметически.

Случайные погрешности характеризуются своими границами $\varepsilon_i = \pm t_{pi} \sigma_i$, поэтому такой подход к их суммированию применен быть не может. Действительно, как следует из (2.59), границы \mathcal{E} случайной компоненты результирующей погрешности будут равны

$$\varepsilon = \pm t_p \sigma(\dot{\Delta}) = \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}. \quad (2.60)$$

Если известны не СКО случайных погрешностей σ_i , а их границы ε_i , то выражение (2.60) можно переписать в следующем виде

$$\varepsilon = \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{t_{pi}} \right)^2}. \quad (2.61)$$

Таким образом, границы суммарной погрешности Δ будут определяться выражением

$$\Delta = \Delta_c + \varepsilon = \sum_{i=1}^m \Delta_{ci} \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \sum_{i=1}^m \Delta_{ci} \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{t_{pi}} \right)^2}. \quad (2.62)$$

Значение доверительного коэффициента t_p в выражениях (2.60) - (2.62) зависит от доверительной вероятности P_D и вида суммарного распределения случайных составляющих погрешности Δ . Последнее зависит от числа случайных составляющих m и их законов распределения (табл. 2.5).

Таблица 2.5 - Границы погрешности ε и доверительный коэффициент t_p для суммы m случайных погрешностей

Законы распределения	$m \leq 4$	$m > 4$
Известны	t_p - определяется для композиции законов распределения $\varepsilon = \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} =$ $= \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{t_{pi}} \right)^2}$	t_p - для нормального закона $\varepsilon = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} =$ $= \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{t_{pi}} \right)^2}$
Нормальные	t_p - для нормального закона $\varepsilon = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}$	
Неизвестны (считаются равномерными)	t_p - для композиции равномерных законов распределения (табл. 2.6) $\varepsilon = \pm t_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} =$ $= \pm K_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}$	t_p - для нормального закона $\varepsilon = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} =$ $= \pm \frac{t_{pn}}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}$

Для $m > 4$, независимо от законов распределения Δ_i , их композиция близка к нормальному закону, поэтому $t_p = t_{pn}$ (см. табл.2.1). Композиция нормальных законов распределения для любого m также является нормальным распределением, поэтому

$$\varepsilon = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\varepsilon_i}{t_{pi}} \right)^2} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}. \quad (2.63)$$

При неизвестном законе распределения Δ_i считают, что любое значение погрешности на доверительном интервале $\pm \varepsilon_i$ равновероятно, поэтому закон распределения всех Δ_i принимается равномерным. Для рав-

номерного закона $t_p = \sqrt{3}$ (для $P = 1$), поэтому для $m > 4$

$$\varepsilon = \pm t_{pn} \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \pm \frac{t_{pn}}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}. \quad (2.64)$$

При $m \leq 4$ доверительный коэффициент t_p определяется для композиции m равновероятных законов распределения, для которой (при равных σ_i)

$$t_p = \sqrt{\frac{3}{m} [m - m! 2^{m-1} (1 - P_D)]}. \quad (2.65)$$

При $m=2$ композиция дает треугольное распределение (для $0 \leq P_D \leq 1$); при $m=3$ - параболическое распределение (для $P_D \geq 0,667$) и т.д.

Значения коэффициентов t_p для композиции равномерных законов распределения приведены в табл.2.6.

Таблица 2.6 - Значения t_p для композиции m равномерных законов распределения

P_D	0,9	0,95	0,99	0,9973
$m=2$	1,675	1,901	2,204	2,332
$m=3$	1,661	1,937	2,379	2,598
$m=4$	1,658	1,94	2,445	2,73
$m = \infty$ (нормальный)	1,64	1,96	2,58	3

Если неизвестные законы распределения заданы границами ε_i , то при $m < 4$

$$\varepsilon = \pm K_p \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2} \quad (2.66)$$

Зависимость коэффициента K_p от доверительной вероятности P_D и соотношения между погрешностями $c = \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}$ приведена на рис. 2.18. Как видно из рис. 2.18 максимальное значение K_p достигается при $c=1$ и равно $t_p / \sqrt{3}$, где t_p рассчитывается по формуле (2.65) (табл. 2.6).

Для нахождения композиции известных законов распределения p_1, p_2 можно воспользоваться уравнением свертки

$$p(\dot{\Delta}) = \int_{-\infty}^{\dot{\Delta}} p_1(\theta) p_2(\dot{\Delta} - \theta) d\theta, \quad (2.67)$$

где θ - переменная интегрирования, имеющая размерность погрешности.

Однако найти решение (2.67) в аналитическом виде можно далеко не всегда. Кроме того, на практике могут быть известны не законы распределения составляющих случайных погрешностей, а их гистограммы, получаемые в результате практических исследований Δ_i . В этом случае можно найти гистограмму результирующего распределения, воспользовавшись *методом перебора*, основанном на дискретном представлении выражения (2.67)

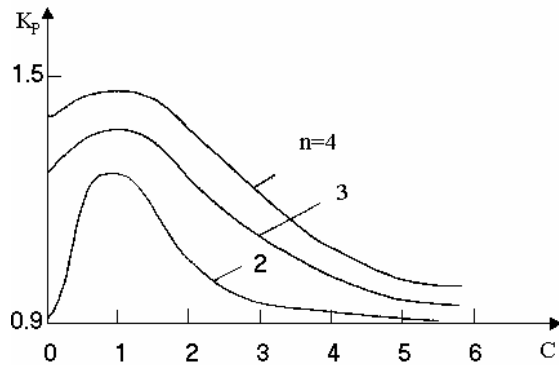


Рисунок 2.18 – зависимость K_p от числа слагаемых n и их соотношения C

$$p(\theta_j) = p(\Delta_1 + \Delta_2 + j\Delta\theta) = \Delta\theta \sum_{i=\begin{cases} 0, j \leq l \\ j-l, j > l \end{cases}}^j p_1(\Delta_1 + i\Delta\theta) p_2[\Delta_2 + (j-i)\Delta\theta], \quad (2.68)$$

$$j = 0, 1, \dots, l+k-2.$$

Здесь $\Delta\theta$ - ширина столбиков гистограмм; $p_1(\theta), p_2(\theta)$ - их высота; Δ_1, Δ_2 - абсциссы середин первых столбиков гистограмм; l, k - число столбиков гистограмм ($l \leq k$).

Расписывая это уравнение для разных значений θ , получаем

$$p(\theta_0) = p(\Delta_1 + \Delta_2) = \Delta\theta p_1(\Delta_1) \cdot p_2(\Delta_2);$$

$$p(\theta_1) = p(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta\theta) = \Delta\theta [p_1(\Delta_1) p_2(\Delta_2 + \Delta\theta) + p_1(\Delta_1 + \Delta\theta) p_2(\Delta_2)];$$

$$p(\theta_2) = p(\Delta_1 + \Delta_2 + 2\Delta\theta) = \Delta\theta [p_1(\Delta_1) p_2(\Delta_2 + 2\Delta\theta) + p_1(\Delta_1 + \Delta\theta) p_2(\Delta_2 + \Delta\theta) + p_1(\Delta_1 + 2\Delta\theta) p_2(\Delta_2)];$$

$$p(\theta_{l+k-4}) = p[\Delta_1 + \Delta_2 + (l+k-4)\Delta\theta] = \Delta\theta \{ p_1[\Delta_1 + (l-1)\Delta\theta] p_2[\Delta_2 + (k-3)\Delta\theta] + p_1[\Delta_1 + (l-2)\Delta\theta] \cdot p_2[\Delta_2 + (k-2)\Delta\theta] + p_1[\Delta_1 + (l-3)\Delta\theta] \cdot p_2[\Delta_2 + (k-1)\Delta\theta] \};$$

$$p(\theta_{l+k-3}) = p[\Delta_1 + \Delta_2 + (l+k-3)\Delta\theta] = \Delta\theta \{ p_1[\Delta_1 + (l-1)\Delta\theta] \cdot p_2[\Delta_2 + (\Delta_2 + (k-2) \times \Delta\theta)] + p_1[\Delta_1 + (l-2)\Delta\theta] p_2[\Delta_2 + (k-1)\Delta\theta] \};$$

$$p(\theta_{l+k-2}) = p[\Delta_1 + \Delta_2 + (l+k-2)\Delta\theta] = \Delta\theta p_1[\Delta_1 + (l-1)\Delta\theta] p_2[\Delta_2 + (k-1)\Delta\theta].$$

Таким образом, результирующая гистограмма будет содержать $l+k-l$ столбиков.

Необходимым условием осуществления метода перебора является одинаковая ширина столбиков гистограмм. В этом случае методика определения гистограммы результирующего распределения сводится к следующим операциям.

1. Гистограмма эмпирических законов распределения, заданные в табличной форме, представляются в виде верхней строки и левого столбца таблицы 2.7.

2. В клетках таблицы, находящихся на пересечении столбца p_{1i} и строки p_{2j} записываются произведения высот столбиков $p_{1i} p_{2j}$ и сумма их абсцисс $\Delta_1 + \Delta_2 + (i+j)\Delta\theta$.

3. Производится суммирование всех произведений $p_{1i} p_{2j}$, соответствующих одинаковым значениям абсцисс. Эти произведения, как видно из таблицы, находятся на одной диагонали.

4. Полученные суммы умножают на ширину столбика гистограммы и получают значение высот столбиков гистограммы композиции законов распределения, которые представляют в табличной форме аналогично первоначальным гистограммам.

Нахождение композиции $N > 2$ законов распределения производится по указанной методике последовательно $N-1$ раз.

Если законы распределения заданы аналитически, то высоты столбиков гистограммы определяется по формуле

$$P(\theta_j) = \frac{1}{\Delta\theta} \int_{\theta_j - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_j + \frac{\Delta\theta}{2}} p(\theta) d\theta = \frac{1}{\Delta\theta} F(\theta) \Big|_{\theta_j - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_j + \frac{\Delta\theta}{2}} = \frac{F(\theta_j + \frac{\Delta\theta}{2}) - F(\theta_j - \frac{\Delta\theta}{2})}{\Delta\theta}. \quad (2.69)$$

Таблица 2.7 - Таблица для построения гистограмм композиции двух законов распределений

$p_2(\theta)$	$p_1(\theta)$		
	p_{11}	p_{12}	p_{13}
	Δ_1	$\Delta_1 + \Delta\theta$	$\Delta_1 + 2\Delta\theta$
p_{21}	$p_{11} \cdot p_{21}$	$p_{12} \cdot p_{21}$	$p_{13} \cdot p_{21}$
	Δ_2	$\Delta_1 + \Delta_2$	$\Delta_1 + \Delta_2 + \theta$
p_{22}	$p_{11} \cdot p_{22}$	$p_{12} \cdot p_{22}$	$p_{13} \cdot p_{22}$
	$\Delta_2 + \theta$	$\Delta_1 + \Delta_2 + \theta$	$\Delta_1 + \Delta_2 + 3\theta$

Для простых законов распределения (треугольный, равномерный) можно определять высоты столбиков гистограмм как значения дифференциальной функции распределения в точках, соответствующих серединам столбиков. Однако, для законов распределения с нелинейным изменением плотности вероятности на интервале $\Delta\theta$ (например - арксинусное) необходимо прибегать к формуле (2.69), т.к. в противном случае это приведет к существенным погрешностям. Графически результат композиции законов распределения выглядит так, как это показано на рис. 2.19.

Математическое ожидание и дисперсию результирующего закона распределения можно найти по формулам

$$M = M_1 + M_2 = \Delta\theta \sum_{i=1}^{l+k-1} p_i \theta_i; \quad (2.70)$$

$M_1 = M_2 = M = 0$ (для случайных погрешностей)

$$D = D_1 + D_2 = \Delta\theta \sum_{i=1}^{l+k-1} p_i (\theta_i - M)^2. \quad (2.71)$$

Границы погрешности можно определить непосредственно из гистограммы, находя границы доверительного интервала, соответствующего заданной доверительной вероятности. Последняя соответствует площади под гистограммой, ограниченной перпендикулярами, возведенными из точек на оси абсцисс, соответствующих границам погрешности (рис. 2.19).

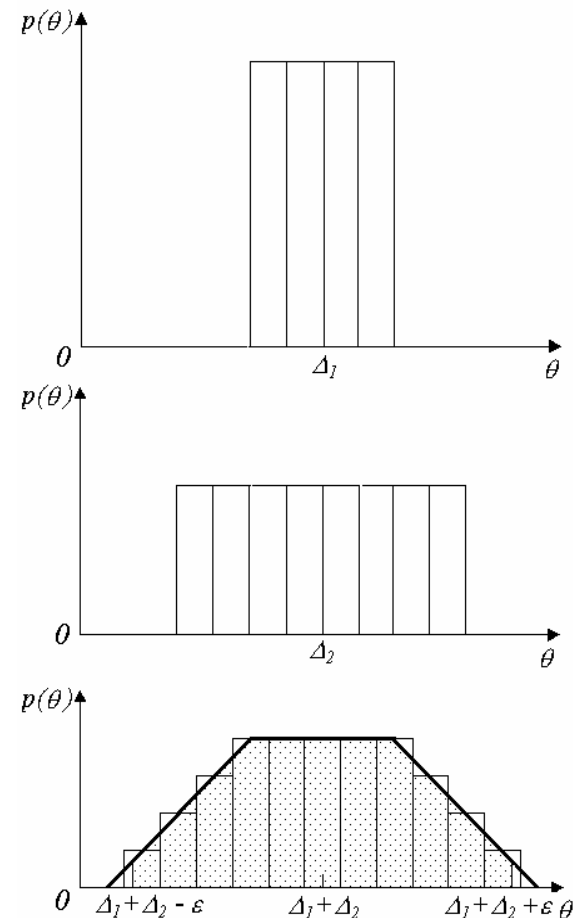


Рисунок 2.19 – Композиция 2-х законов распределения случайных погрешностей

2.7 Контрольные вопросы, задачи, упражнения

1. Перечислите различия между абсолютной, относительной и приведенной погрешностями, укажите их размерность.

2. Получите выражения для границ случайных погрешностей результатов наблюдений для заданной доверительной вероятности P_d , распределенных по следующим законам: а) равномерному; б) Симпсона; в) нормальному; г) Лапласа; д) арксинуса.

3. Пользуясь методом максимального правдоподобия, получите выражения для эффективной оценки математического ожидания результатов наблюдений x_i , распределенных по следующим законам: а) нормальному; б) Лапласа; в) равномерному.

4. Постройте гистограмму для приведенных ниже результатов многократных наблюдений: 113,4; 111,3; 110,0; 112,2; 111,7; 112,8; 112,5; 114,0; 113,6; 113,2.

5. Постройте кумулятивную кривую для числовых данных, приведенных в задании 4.

6. Определите оценки математического ожидания (среднее арифметическое, среднее по размаху, медиану) для результатов наблюдений, приведенных в задании 4.

7. Определите оценки дисперсии и СКО результатов наблюдений, приведенных в задании 4.

8. Определите оценку островершинности (эксцесс) для результатов наблюдений, приведенных в задании 4.

9. Результаты многократных наблюдений представлены в таблице в виде гистограммы, в которой p_i - высота столбиков, а x_i - координата середины их основания.

P_i	1,25	3,95	3,75	1,25
X_i	1,0	1,1	1,2	1,3

Выскажите гипотезу о виде распределения результатов и проверьте ее справедливость, пользуясь критерием Пирсона для $n=36$, $P_d=0,95$.

10. Результаты многократных наблюдений представлены в таблице в виде кумулятивной кривой.

$F(x_i)$	0	0,34	0,5	0,66	1,0
x_i	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3

Выскажите гипотезу о виде распределения и проверьте ее справедливость, пользуясь критерием Колмогорова для $P_d = 0,95$ и числе наблюдений $n = 40$.

11. Пользуясь составным критерием, проверьте подчинение следующих результатов нормальному закону распределения для $P=0,9$.

341,8	341,4	344,2
43,1	40,9	40,7
41,4	40,4	42,1
43,2	42,6	42,1
42,2	40,9	41,9
40,8	42,1	42,2
41,2	41,5	34,3

12. Результаты наблюдений распределены по равномерному закону, а их среднее арифметическое - по нормальному. Сколько было проведено наблюдений, если отношение максимумов гистограмм результатов измерений и наблюдений равно 20:1.

13. Пользуясь критерием Райта, определите наличие грубых погрешностей (промахов) в результатах наблюдений, приведенных в задании 12.

14. Пользуясь критерием Смирнова, определите наличие грубых погрешностей (промахов) в результатах наблюдений, приведенных в задании 12 для вероятности 0,95.

15. Постройте композицию двух равномерных законов распределения, заданных в таблицах в виде гистограмм, и оцените математическое ожидание и дисперсию этой композиции.

p_1	2,5	2,5	2,5	2,5
X_i	5,2	5,3	5,4	5,5

p_2	2	2	2	2	2
x_2	9,0	9,1	9,2	9,3	9,4

16. Среднеквадратические отклонения двух составляющих случайной погрешности измерения напряжения равны 0,1 В и 0,2 В. Определите границы результирующей погрешности измерения напряжения для доверительной вероятности 0,95, если ее систематическая составляющая равна 0,05 В, а случайные погрешности распределены по равномерному закону.

17. Определите границы результирующей случайной погрешности измерения тока с доверительной вероятностью 0,95, если границы ее составляющих определены с вероятностью 0,9 и равны 0,1 А; 0,2 А и 0,3 А соответственно, а их распределения подчиняются нормальному закону.

19. Результаты наблюдений распределены по нормальному закону. Изобразите в одной системе координат плотность их распределения, также плотность распределения результата измерения с числом наблюдений $n=9$.

3 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерением называется отображение ФВ их значением при помощи эксперимента и расчетов с применением специальных технических средств. Любое измерение включает в себя 3 основных этапа.

1. *Подготовка к измерению*, содержанием которой является:

- а) постановка измерительной задачи;
- б) выбор метода и СИТ, их размещение;
- в) обеспечение необходимых условий проведения эксперимента.

При этом под *методом измерений* понимают последовательность операций с использованием СИТ для получения результата измерения.

Метод измерения не стоит путать с *принципом измерения*, под которым понимают совокупность физических явлений, на которых основаны измерения, например, измерения температуры с использованием термоэлектрического эффекта.

2. *Измерительный эксперимент*, включающий в себя 3 операции:

- а) измерительное преобразование;
- б) воспроизведение измеряемой величины единичного размера;
- в) сравнение измеряемой величины с единицей измерения.

3. *Обработка экспериментальных данных*, в результате которой получают значение измеряемой величины и оценку погрешности измерений с заданной вероятностью.

Конкретная реализация перечисленных этапов зависит от вида измерения.

Измерения традиционно разделяются по многим классификационным признакам. Рассмотрим одну из многих среди существующих разновидностей классификации по наиболее существенным традиционным признакам (рис. 3.1).

Классификация по измеряемым физическим величинам – наиболее громоздка, поскольку в настоящее время их существует более 2000. Наиболее детально разработанная классификация такого рода содержит пять ступеней: области, виды, отрасли, подвиды и разновидности.

Области измерений соответствуют разделам физики (механика, оптика, электричество и т.д.).

Виды измерений определяются непосредственно измеряемыми величинами (измерение температуры, скорости, объема, массы и т.п.).

Отрасли разграничивают виды по диапазонам измерений (например, низкие, высокие, средние температуры, частоты, мощности и т.д.).

Подвиды разграничивают виды измерений в зависимости от особенностей объекта исследований (например, измерение расстояний в астрономии, под водой, толщины пленок, шероховатости и т.д.).



Рисунок 3.1 – Классификация измерений

Разновидности – разделение подвидов на подмножества в зависимости от измеряемого параметра. Например, для измерения напряжения электрического тока различают измерения постоянных и переменных напряжений.

Если измерения основаны на наблюдении основных величин и использовании значений физических констант, они называются *абсолютными*, в противном случае – это *относительные измерения*. То есть *абсолютные* измерения – это измерения производной величины в соответствии с ее размерностью. Измерение основной величины может быть только абсолютным. Например, измерение длины в метрах, силы тока в амперах, скорости как расстояния деленного на время. Примером *относительных* измерений может быть измерение мощности электрического тока по температуре резистора, нагретого за счет рассеиваемой в нем мощности (калориметрический метод измерения мощности на СВЧ) или измерение безразмерных величин как отношение размерных (коэффициент усиления усилителя, относительная влажность воздуха и т.д.).

По режиму использования СИТ измерения делят на *статические* – измерение величины, размер которой можно считать неизменным за время измерения и *динамические* – измерения величины, размер которой нельзя считать неизменным за время измерения.

По количеству наблюдений при измерении различают измерения с *однократными и многократными наблюдениями*. Многократные наблюдения, как будет показано далее, дают возможность повысить точность измерения за счет применения статистических методов обработки данных.

В зависимости от достигаемой точности измерения делят на прецизионные измерения, контрольно-проверочные и технические измерения.

Первый случай (*прецизионные измерения*) относится к измерениям при метрологических исследованиях, особо ответственных измерениях, в которых измерения производятся наиболее точно с учетом индивидуальных свойств используемых СИТ и результатов дополнительных измерений, выполняемых для контроля условий измерений. В этом случае осуществляется апостериорная оценка точности измерений.

Контрольно-проверочные измерения относятся к группе измерений, для которых производится приближенная апостериорная оценка точности.

Технические измерения – наиболее распространенный вид измерений, эти измерения осуществляются с наименьшей точностью, обработка экспериментальных данных минимальна, а точность измерений оценивается априорно, в рамках аттестации методики выполнения измерений.

Важнейшим признаком классификации является разделение измерений в зависимости от уравнения измерений на *прямые, косвенные, совместные и совокупные*. Для этих видов измерений ниже будут рассмотрены способы обработки их результатов.

3.1 Прямые измерения

Под *прямыми измерениями* понимают измерения, при которых значения величины находят непосредственно. В них измеряемая величина X прямо пропорциональна непосредственно наблюдаемой x

$$X = c(x + q), \quad (3.1)$$

где c – известный коэффициент;

q – поправка, вводимая в результат измерения.

Коэффициент c известен априорно, исходя из анализа схемы включения СИТ (непосредственно или через усилитель, аттенуатор), предела измерений и т.д. Поправка q представляет собой исключаемую часть систематической погрешности и также известна априорно. Она равна по абсолютной величине и противоположна по знаку показаниям СИТ при нулевом значении измеряемой величины.

Прямые измерения – наиболее распространенный и простой вид измерений. Эти измерения являются составным элементом косвенных, совместных и совокупных измерений. Прямые измерения можно производить путем однократных и многократных наблюдений. Выбор количества наблюдений определяется требованиями к точности измерения и степени трудоемкости обработки их результатов.

Наиболее распространенными на практике являются измерения с однократными наблюдениями (однократные измерения), как наиболее простые, производительные и дешевые. *Однократные измерения* производятся обычно в тех случаях, когда допускается погрешность измерения, достигающая удвоенного среднеквадратического отклонения (СКО) случайной составляющей погрешности СИТ.

Измерения с многократными наблюдениями (*многократные измерения*) производятся при повышенных требованиях к точности измерений. Такие измерения характерны для профессиональной метрологической деятельности и выполняются в основном сотрудниками метрологических служб, а также при тонких научных экспериментах. Это сложные, трудоемкие и дорогостоящие измерения, целесообразность которых должна быть всегда убедительно обоснована.

3.1.1 Обработка результатов прямых измерений с однократными наблюдениями

Прямые однократные измерения проводят с числом наблюдений не более трех. Повторные наблюдения в этом случае служат для страховки от совершения промахов и грубых погрешностей. Для оценивания общей погрешности результатов прямых измерений с однократными наблюде-

ниями необходимо априорно знать значения всех ее систематических и случайных составляющих. Порядок обработки заключается в следующем.

1. Анализируется схема измерения, априорная информация об условиях проведения измерения, метрологические характеристики применяемой аппаратуры.

2. Производится одно-три наблюдения значения измеряемой величины. Результат одного из наблюдений, не содержащих грубых ошибок и промахов, с учетом анализа схемы измерений и априорной информации, переводят в оценку результата измерения в соответствии с уравнением измерения (3.1).

3. Находят суммарную оценку неисключенных систематических погрешностей. Если эти погрешности постоянны, то суммирование их границ производится арифметически. Для условно постоянных составляющих применяются статистические способы суммирования, так как это делалось в предыдущем разделе для случайных погрешностей, заданных границами. Обычно считается, что в пределах границ составляющие неисключенных систематических погрешностей распределены равномерно. Тогда для суммирования границ составляющих применяется выражение (2.66) в котором коэффициент K_p , для числа слагаемых больше четырех, принимается равным 0,95; 1,1 и 1,4 для вероятностей, соответственно, 0,9; 0,95 и 0,99. При малом числе слагаемых предлагается сравнить полученную таким образом суммарную границу с арифметической и принять в качестве окончательной границы меньшее значение.

4. Производят суммирование оценок СКО $\hat{\sigma}_i$ случайных погрешностей

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i^2}. \quad (3.2)$$

5. Задавшись доверительной вероятностью P_d , с учетом закона распределения суммарной случайной погрешности (см. подраздел 2.6), находят её границы

$$\varepsilon = \pm t_p \hat{\sigma}. \quad (3.3)$$

6. Производят суммирование систематической и случайной погрешностей (рис. 3.2). Предварительно выявляется соотношение между границами суммарной неисключенной систематической погрешности Δ_c и СКО случайной погрешности $\hat{\sigma}$

$$r = \Delta_c / \hat{\sigma}. \quad (3.4)$$

Если $r < 0,8$, то систематической погрешностью пренебрегают и в качестве доверительных границ результата принимают доверительные границы составляющей ε . Если $r > 8$, то пренебрегают случайной со-

ставляющей и в качестве границы погрешности результата измерения принимают границу суммарных неисключенных остатков систематической погрешности. При промежуточных значениях $0,8 \leq r \leq 8$ суммарную погрешность результата измерения находят по формуле

$$\Delta = K(\Delta_c + \varepsilon), \quad (3.5)$$

где коэффициент K находят из графика на рис.3.3.

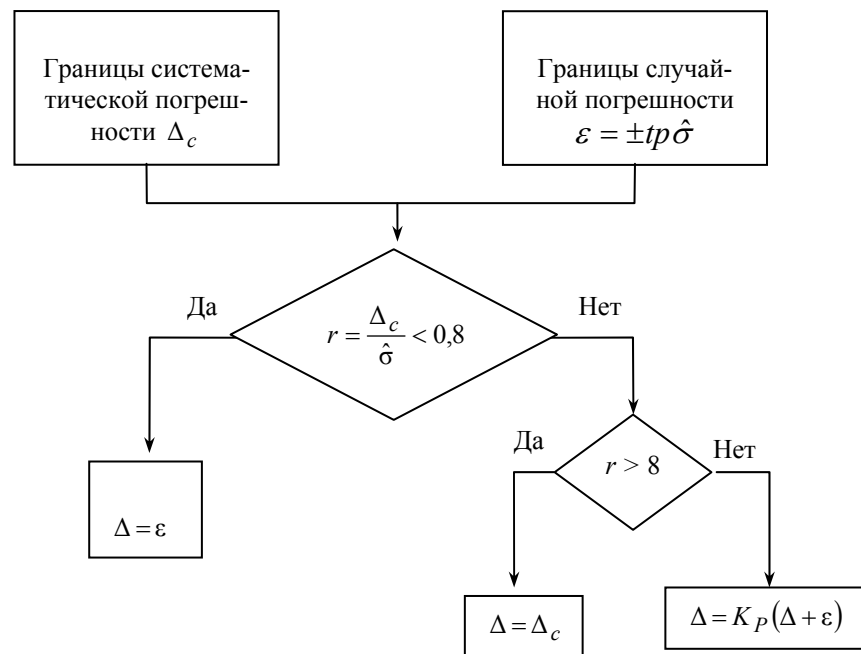


Рисунок 3.2 - Суммирование систематических и случайных погрешностей

Во многих случаях можно принять максимальные значения коэффициента $K = 0,8$ для $P = 0,95$ и $K = 0,85$ для $P = 0,99$.

7. Записывают результат измерения в виде

$$X_{изм} = X \pm \Delta, P_d; \quad (3.6)$$

или

$$X_{изм} = X - \Delta \dots X + \Delta, P_d. \quad (3.7)$$

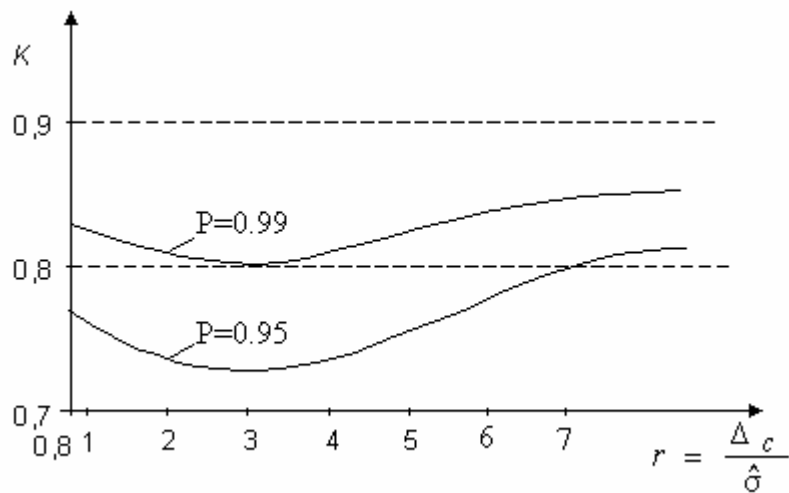


Рисунок 3.3 - Зависимость коэффициента K от соотношения $\Delta_c / \hat{\sigma}$

3.1.2 Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями

При обработке многократных измерений решают две задачи.

Во-первых, определяют некоторое приближенное значение измеряемой величины, называемое оценкой и наилучшим образом соответствующее полученным результатам. *Во-вторых*, определяют вероятные отклонения результатов измерений от оценки измеряемой величины.

Цель обработки результатов многократных измерений состоит в том, чтобы уменьшить значение случайной погрешности.

При статистической обработке результатов наблюдений следует выполнить следующие операции.

1. Исключить из результатов наблюдения грубые погрешности (промахи) (см. подраздел 2.4).
2. Исключить известные систематические погрешности результатов наблюдений (см. пп. 2.5.3).
3. Вычислить среднее арифметическое исправленных результатов наблюдений или другую оценку математического ожидания, применяемую за результат измерений (см. пп. 2.3.1).
4. Вычислить оценку СКО результата наблюдения $\hat{\sigma}_X$ (см. пп. 2.3.1).
5. Вычислить оценку СКО результата измерения $\hat{\sigma}_{\bar{X}} = \hat{\sigma}_X / \sqrt{n}$.
6. Проверить гипотезу о том, что результаты наблюдений принадлежат выбранному закону распределения (см. пп. 2.3.2).

7. Вычислить доверительные границы случайной погрешности результата измерения (см. пп. 2.3.3).

8. Вычислить границы неисключенной систематической погрешности результата измерения (см. п. 2.6).

9. Вычислить доверительные границы погрешности результата измерения.

Порядок выполнения операций, перечисленных в пунктах 1-5, был рассмотрен нами в предыдущих подразделах. Рассмотрим порядок выполнения операций 6, 7.

6. Проверка гипотезы о принадлежности результатов наблюдений выбранному закону должна производиться только при числе наблюдений от 10-15 до 20-30. При $n < 10-15$ гипотеза не проверяется в силу небольшого объема выборки. При $n > 20-30$ среднее арифметическое результатов наблюдений, принимаемое за результат измерения, распределено по нормальному закону (согласно центральной предельной теореме теории вероятности), поэтому для определения границ случайной погрешности результата измерения такая проверка не требуется.

7. Границы случайной погрешности результата измерения определяют по формуле (3.3)

$$\varepsilon_{\bar{X}} = \pm t_p \hat{\sigma}_{\bar{X}},$$

где доверительный коэффициент t_p берется в зависимости от числа наблюдений, закона распределения результатов наблюдения и доверительной вероятности (рис. 3.4).

Пункты 8, 9 выполняются аналогично тому, как это делалось для однократных наблюдений (рис. 3.2, 3.3).

3.1.3 Обработка нескольких групп прямых измерений с многократными наблюдениями

На практике одну и ту же величину могут измерять разными СИТ, в разное время или в разных условиях, получая несколько (больше одной) групп наблюдений. Для повышения точности естественно объединить эти результаты, т.е. выполнить совместную обработку этих групп.

Однако, объединение групп наблюдений возможно далеко не всегда. К повышению точности объединение результатов приведет лишь при определенных условиях, а именно при статистической однородности групп наблюдений.

Статистическая однородность групп наблюдений заключается в выполнении следующих условий:

- 1) наблюдения в группах распределены по одному и тому же закону;

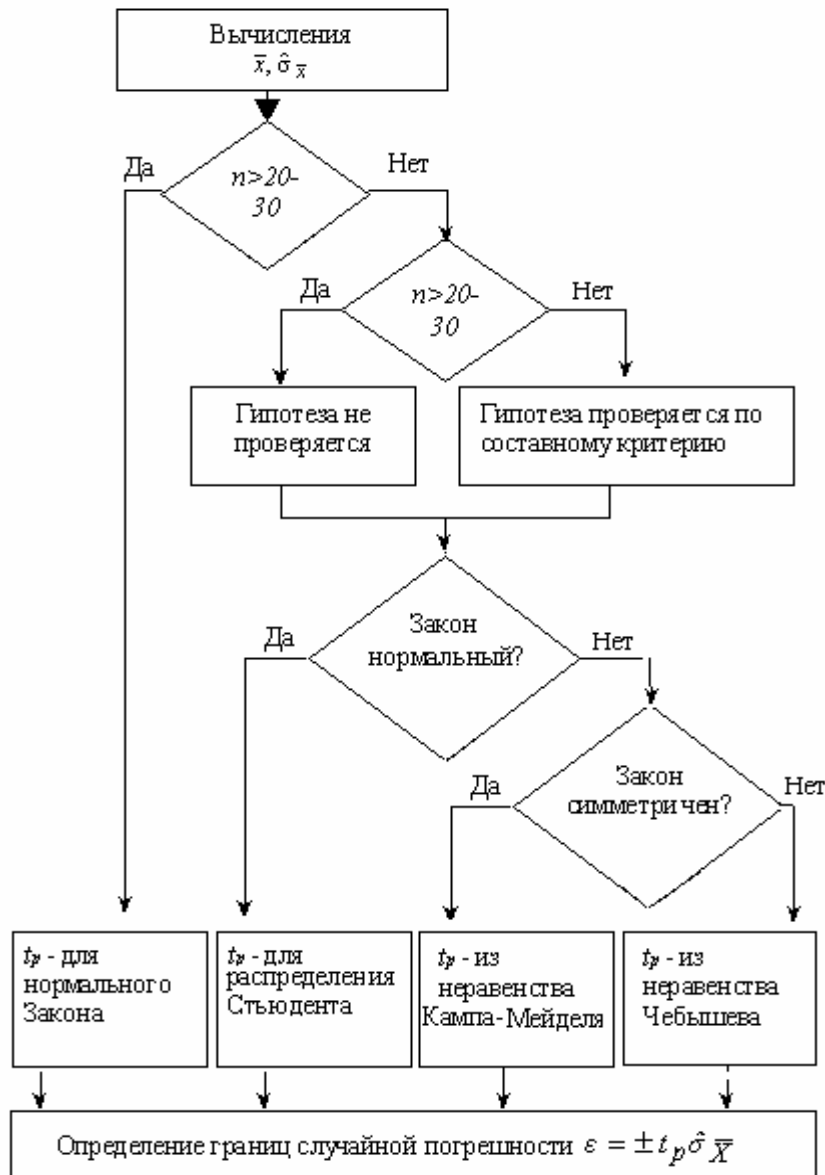


Рисунок 3.4 - Порядок определения границ случайной погрешности при проведении прямых измерений с многократными наблюдениями

- 2) средние арифметические групп различаются незначительно;
- 3) дисперсии групп различаются незначительно (т.е. результаты равнорассеяны или, как говорят, равноточны).

Проверка соответствия распределения наблюдений в группах одному и тому же закону осуществляется с помощью критериев согласия (см. пп. 2.3.2).

Дальнейшая проверка статистической однородности осуществляется с помощью аппарата математической статистики, называемого *дисперсионным анализом*.

Проверка однородности групп по математическому ожиданию при числе групп $L \geq 3$ осуществляется с помощью критериев Аббе или Фишера, рассмотренных в пп. 2.5.2.

Для $L=2$ алгоритм осуществления этой проверки приведен на рис. 3.5.

Он состоит в следующем.

1. Определяются средние арифметические для каждой группы наблюдений по формулам

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}, \quad (3.8)$$

где x_{1i}, x_{2j} – результаты наблюдений из 1-й и 2-й групп;

2. Определяется модуль разности полученных средних арифметических:

$$G = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|. \quad (3.9)$$

3. Определяется оценка дисперсии результатов наблюдений в каждой из групп по формулам

$$\hat{D}_1 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - x_{1i})^2; \quad \hat{D}_2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n_2} (\bar{x}_2 - x_{2j})^2. \quad (3.10)$$

4. Определяется суммарная оценка дисперсии результатов измерения этих групп:

$$\hat{D} = \frac{\hat{D}_1}{n_1} + \frac{\hat{D}_2}{n_2}. \quad (3.11)$$

5. По заданной доверительной вероятности P_D , считая закон распределения модуля разности средних арифметических наблюдений групп нормальным (для $n_1 + n_2 > 30$), определяем по табл. 2.1 значение коэффициента t_p , после чего производится сравнение G и $t_p \sqrt{\hat{D}}$.

Если $G \leq t_p \sqrt{\hat{D}}$, отклонение средних арифметических групп считается несущественным и можно переходить к проверке групп на равнорассеянность (равноточность). В противном случае объединять группы нельзя.

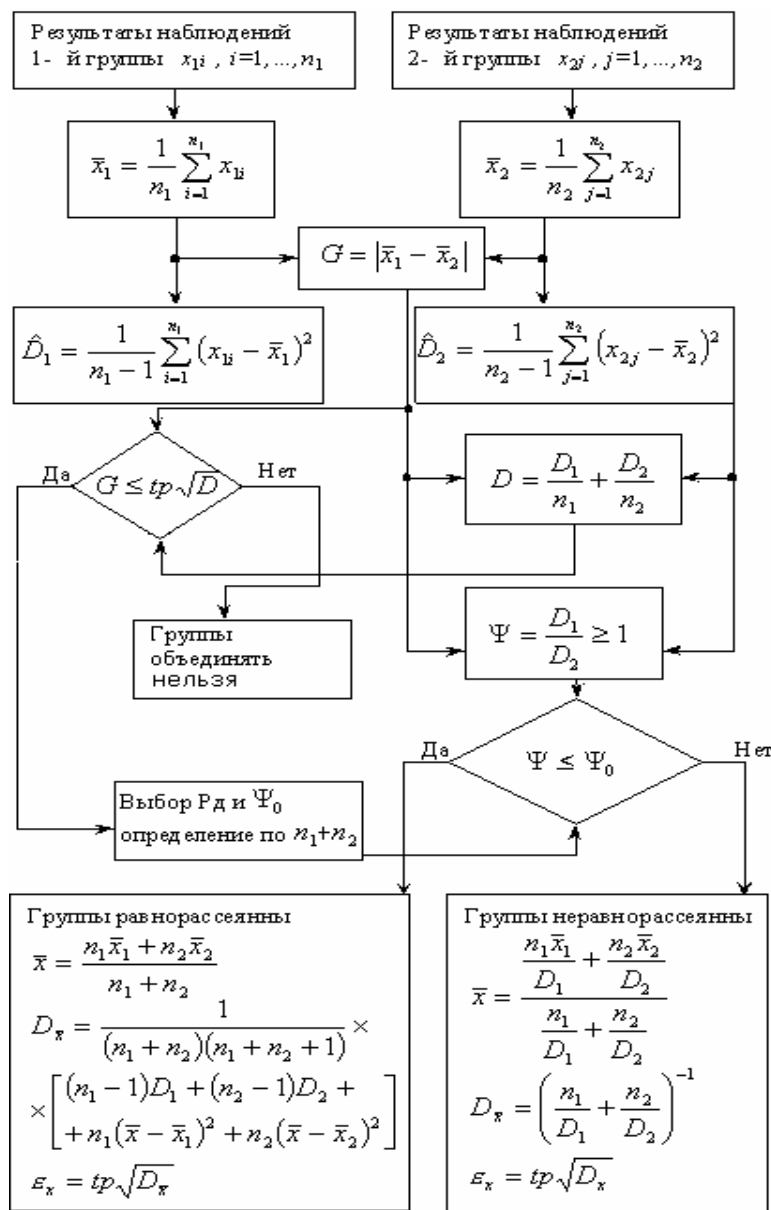


Рисунок 3.5 - Алгоритм обработки двух групп наблюдений

Для проверки равнорассеянности (равноточности) измерений в группах следует воспользоваться следующим алгоритмом (рис.3.5).

1. По вычисленным значениям \hat{D}_1 и \hat{D}_2 определяется величина $\Psi = \hat{D}_1 / \hat{D}_2$ или $\Psi = \hat{D}_2 / \hat{D}_1$, так чтобы $\Psi \geq 1$.

2. Выбирается доверительная вероятность и по табл. А.7 распределения Фишера (а именно по такому закону оказывается распределенной величина Ψ) находится значение параметра Ψ_0 для заданных n_1+n_2 .

3. Производится сравнение Ψ и Ψ_0 . Если $\Psi < \Psi_0$, серии измерений считаются *равнорассеянными*, если $\Psi > \Psi_0$, серии *неравнорассеяны* (неравноточны).

В зависимости от полученных результатов производится дальнейшая обработка групп измерений.

Измерения равноточные.

Оценку математического ожидания результатов наблюдений (результат измерения) для объединенных групп определяют по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1 + n_2} \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_{1i} + \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j} \right) = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}. \quad (3.12)$$

Оценка дисперсии результата измерения, очевидно, описывается выражением

$$\hat{D}_{\bar{x}} = \frac{1}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x} - x_{1i})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (\bar{x} - x_{2j})^2 \right].$$

Для преобразования этого выражения величину \bar{x} представим как

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + (\bar{x} - \bar{x}_1). \quad (3.13)$$

Так как с учетом выражения (3.13)

$$\sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x} - x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n_1} [(\bar{x} - \bar{x}_1) + (\bar{x}_1 - x_i)]^2,$$

то эту сумму можно записать следующим образом

$$\sum_{i=1}^{n_1} [(\bar{x}_1 - x_i)^2 + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + 2(\bar{x} - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - x_i)].$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - x_i)^2 = \hat{D}_1(n_1 - 1)$

и $\sum_{i=1}^{n_1} (\bar{x}_1 - x_i) = n_1 \bar{x}_1 - \sum_{i=1}^{n_1} x_i = n_1 \bar{x}_1 - n_1 \bar{x}_1 = 0,$

то окончательное выражение для оценки дисперсии результата измерения будет иметь вид

$$\hat{D}_{\bar{x}} = \frac{1}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \left[\hat{D}_1(n_1 - 1) + \hat{D}_2(n_2 - 1) + (\bar{x} - \bar{x}_1)^2 n_1 + (\bar{x} - \bar{x}_2)^2 n_2 \right]. \quad (3.14)$$

Измерения неравноточные.

При неравнорассеянных результатах измерения в группах их объединение осуществляется таким образом, чтобы получить наиболее эффективную оценку математического ожидания \bar{x} . Эту оценку будем искать, используя принцип максимального правдоподобия (пп. 2.3.1).

Если средние арифметические в группах \bar{x}_j можно считать распределенными по нормальному закону, то функцию правдоподобия можно представить в виде

$$P = \frac{1}{\left((2\pi)^{\frac{L}{2}} \prod_{j=1}^L \hat{\sigma}_{\bar{x}_j} \right)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \frac{(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_j}^2}}. \quad (3.15)$$

Логарифмическая функция правдоподобия

$$L = \ln P = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^L \frac{(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_j}^2} - \ln \left[(2\pi)^{\frac{L}{2}} \prod_{j=1}^L \hat{\sigma}_{\bar{x}_j} \right]. \quad (3.16)$$

Нам нужно найти эффективную оценку \bar{x} , поэтому приравняем нулю производную L по \bar{x}

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}} = -\sum_{j=1}^L \frac{1}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_j}^2} (\bar{x}_j - \hat{x}) = 0.$$

Отсюда

$$\hat{x} = \frac{\sum_{j=1}^L \frac{\bar{x}_j}{\hat{D}_{\bar{x}_j}}}{\sum_{j=1}^L \frac{1}{\hat{D}_{\bar{x}_j}}} = \frac{\sum_{j=1}^L \frac{\bar{x}_j n_j}{\hat{D}_j}}{\sum_{j=1}^L \frac{n_j}{\hat{D}_j}}. \quad (3.17)$$

Это так называемое *средневзвешенное*, которое принимается за оценку математического ожидания объединенных групп.

Для равных дисперсий получаем выражение (3.12).

Оценка дисперсии \bar{x}

$$\hat{D}_{\bar{x}} = D[\hat{x}] = D \left[\frac{\sum_{j=1}^L \frac{\hat{x}_j n_j}{\hat{D}_j}}{\sum_{j=1}^L \frac{n_j}{\hat{D}_j}} \right] = \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^L \frac{n_j}{\hat{D}_j} \right)^2} \sum_{j=1}^L \frac{n_j^2}{\hat{D}_j^2} D_{\hat{x}_j} = \frac{1}{\sum_{j=1}^L \frac{n_j}{\hat{D}_j}}. \quad (3.18)$$

После получения оценок дисперсии вычисляют границы случайной погрешности по формуле (3.3), в которой t_p для $(n_1 + n_2) > 30$, берется для нормального распределения.

3.2 Косвенные измерения

При *косвенных измерениях* значение искомой величины находят по результатам прямых измерений других величин, с которыми измеряемая величина связана функциональной зависимостью. Пример косвенных измерений – измерение удельного сопротивления проводника $S = R / S_l$ по результатам измерения его сопротивления R , площади поперечного сечения S и длины l .

В общем случае при косвенных измерениях имеет место нелинейная зависимость между измеряемой величиной X и ее аргументами x_1, x_2, \dots, x_m

$$X = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m). \quad (3.19)$$

Если каждый из аргументов x_i характеризуется своей оценкой \hat{x}_i и погрешностью Δx_i

$$x_i = \hat{x}_i + \Delta x_i,$$

то (3.19) запишется в следующем виде:

$$X = f(\hat{x}_1 + \Delta x_1, \hat{x}_2 + \Delta x_2, \dots, \hat{x}_m + \Delta x_m). \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) можно разложить в ряд Тейлора по степеням Δx :

$$X = f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_0,$$

где R_0 – *остаточный член ряда*.

Из этого выражения можно записать абсолютную погрешность измерения X

$$\Delta X = X - f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_0. \quad (3.21)$$

Если принять $R_0 = 0$, что справедливо при малых погрешностях аргументов ($\Delta x_i \rightarrow 0$), то получаем линейное выражение для погрешности измерения. Такая операция называется *линеаризацией нелинейного уравнения*

(3.19). В получаемом в этом случае выражении для погрешности $\partial f / \partial x_i = W_i$ - коэффициенты влияния, а $W_i \Delta x_i$ - частные погрешности.

Пренебречь остаточным членом при оценке погрешности допустимо не всегда, т.к. в этом случае оценка погрешности оказывается смещенной. Поэтому, когда связь между X и x_i в выражении (3.19) нелинейная, проверяют допустимость линеаризации по следующему критерию

$$R_0 < 0,8 \sqrt{\sum_{i=1}^m W_i^2 \Delta x_i^2}, \quad (3.22)$$

где в качестве остаточного члена берут член ряда второго порядка

$$R_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} \Delta x_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^m \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j. \quad (3.23)$$

Если известны границы погрешностей аргументов Δx_i (случай наиболее часто встречающийся при однократных измерениях), то легко определить максимальную погрешность измерения X :

$$\Delta X_{\max} = \sum_{i=1}^m |W_i| \Delta x_i. \quad (3.24)$$

Эту оценку обычно принимают при однократных измерениях и числе аргументов меньше 5.

При большем числе аргументов прибегают к вероятностному суммированию, т.к. оценка (3.24) оказывается для большинства случаев завышенной. В этом случае

$$\Delta X = t_{\Sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^m W_i^2 \left[\frac{\Delta x_i}{t_{P_i}} \right]^2}, \quad (3.25)$$

где t_{Σ} и t_{P_i} - доверительные коэффициенты для распределений общей погрешности и погрешности аргументов, соответствующие своим вероятностям.

При нормальном распределении всех аргументов и одинаковых доверительных вероятностях, выражение (3.25) упрощается

$$\Delta X = \sqrt{\sum_{i=1}^m W_i^2 \Delta x_i^2}. \quad (3.26)$$

Обычно, особенно при однократных измерениях, законы распределения аргументов неизвестны, а вид суммарного распределения определить практически невозможно, учитывая трансформацию законов распределения при нелинейной связи измеряемой величины X и её аргументов.

В этом случае в соответствии с методом ситуационного моделирования принимают закон распределения аргументов равновероятным. При этом доверительная граница ΔX погрешности результата косвенного измерения определится по формуле

$$\Delta X = K_P \sqrt{\sum_{i=1}^m W_i^2 \Delta x_i^2}, \quad (3.27)$$

где K_P зависит от выбранной вероятности P_D , числа слагаемых и соотношения между ними. Для равных по величине слагаемых и $P_D = 0,9$ - $K_P = 0,95$; для $P_D = 0,95$ - $K_P = 1,1$; для $P_D = 0,99$ - $K_P = 1,4$.

Погрешности результатов измерения аргументов могут быть заданы не границами, а параметрами систематических и случайных составляющих погрешностей - границами и СКО. В этом случае оценивают отдельно систематическую и случайную составляющие погрешности косвенного измерения, а затем объединяют полученные оценки.

Что касается суммирования систематических погрешностей (или их неисключенных остатков), то оно осуществляется в зависимости от наличия сведений о распределении погрешностей с использованием выражений (3.24) - (3.27), в которых вместо погрешностей измерений аргументов следует подставить соответствующие границы для систематических погрешностей Δc_i .

Случайные погрешности результатов косвенных измерений суммируются следующим образом.

Погрешность результата косвенного наблюдения, имеющего случайные погрешности аргументов Δj будет равна

$$\dot{\Delta} X = \sum_{j=1}^m W_j \cdot \dot{\Delta} j.$$

Определим дисперсию этой погрешности

$$D_X = D \left(\sum_{j=1}^m W_j \cdot \dot{\Delta} j \right) = M \left(\sum_{j=1}^m W_j \cdot \dot{\Delta} j \right)^2 - M^2 \left(\sum_{j=1}^m W_j \cdot \dot{\Delta} j \right);$$

т.к. последнее слагаемое равно нулю, то

$$\begin{aligned} D_X &= M \left(\sum_{j=1}^m W_j^2 \cdot \dot{\Delta} j^2 \right) + 2M \left(\sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^{j-1} W_i W_j \dot{\Delta} i \dot{\Delta} j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m W_j^2 \cdot D_j + 2 \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^{j-1} W_i W_j \cdot M \{ (x_j - M[x_j]) (x_i - M[x_i]) \}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

В этом выражении $M\{(x_j - M[x_j])(x_i - M[x_i])\}$ - ковариационная функция (корреляционный момент), равный нулю, если погрешности аргументов независимы друг от друга.

Вместо ковариационной функции часто пользуются коэффициентом корреляции

$$r_{ij} = \frac{M\{(x_j - M[x_j])(x_i - M[x_i])\}}{\sqrt{D_i D_j}}, \quad -1 \leq r_{ij} \leq 1. \quad (3.29)$$

В этом случае дисперсия результата наблюдения будет иметь вид

$$D_X = \sum_{j=1}^m W_j^2 \cdot D_j + 2 \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^{j-1} W_i W_j \cdot r_{ij} \sqrt{D_i D_j}. \quad (3.30)$$

Для получения дисперсии результата измерения необходимо разделить это выражение на число измерений n .

В этих выражениях r_{ij} - коэффициенты попарной корреляции между погрешностями измерений. Если $r_{ij} = 0$, то второе слагаемое в правой части (3.30) равно нулю и общее выражение для погрешности упрощается. Значение r_{ij} либо известно априорно (в случае однократных измерений), либо (для многократных измерений) его оценка определяется для каждой пары аргументов x_i и x_j по формуле

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j}.$$

Наличие корреляционной связи между погрешностями аргументов имеет место в том случае, когда аргументы измеряются одновременно, однотипными приборами, находящимися в одинаковых условиях. Причиной возникновения корреляционной связи является изменение условий измерения (пульсации напряжения питающей сети, переменные наводки, вибрации и т.д.). О наличии корреляции удобно судить по графику, на котором изображены пары последовательно получаемых результатов измерений величин x_i и x_j (рис. 3.6).

При малом числе наблюдений может оказаться, что $r_{ij} \neq 0$ даже при отсутствии корреляционной связи между аргументами. В этом случае необходимо пользоваться числовым критерием отсутствия корреляционной связи, который состоит в выполнении неравенства

$$\frac{|r_{ij}|}{1 - r_{ij}^2} \sqrt{n} < t_S, \quad (3.31)$$

где t_S - коэффициент Стьюдента для заданной вероятности и числа измерений n (табл. А5).

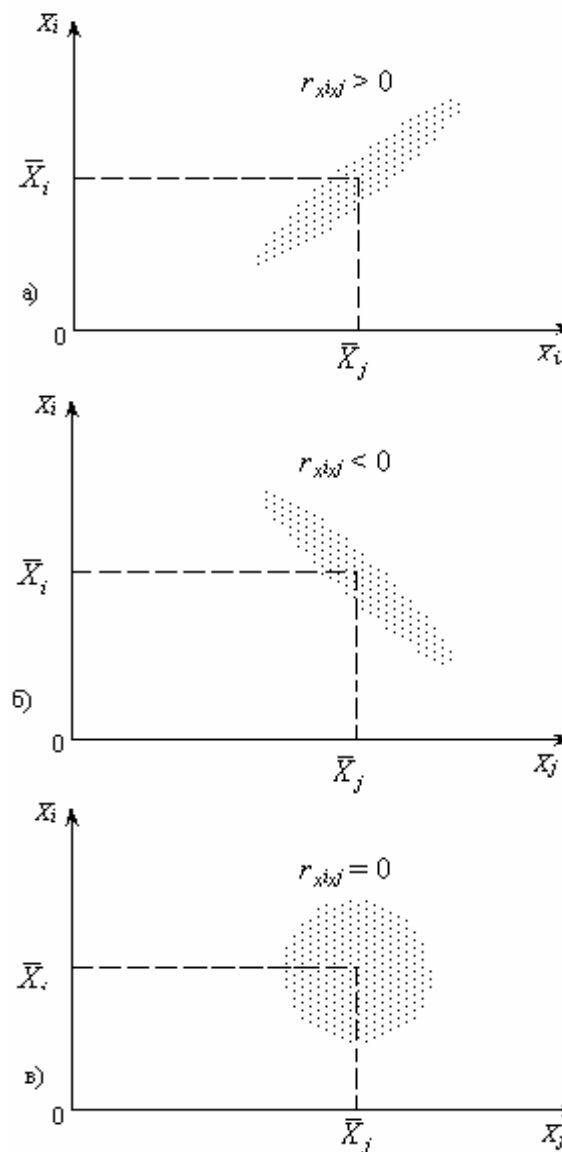


Рисунок 3.6 - Зависимость между параметрами аргументов и косвенных измерений при наличии (а, б) и отсутствии (в) корреляционной связи

Границы случайной погрешности после определения оценки дисперсии результатов измерения определяются по формуле

$$\varepsilon_{\bar{x}} = t_p \sqrt{\hat{D}_{\bar{x}}}, \quad (3.42)$$

где t_p при неизвестном результирующем распределении берется из неравенства Чебышева

$$t_p = \frac{1}{\sqrt{1 - P_D}}.$$

Неравенство Чебышева дает завышенную оценку погрешности результата измерений. Поэтому, когда число аргументов больше 4, распределение их одномодальны и среди погрешностей нет резко выделяющихся, число измерений, выполненных при измерении всех аргументов превышает 25-30, то t_p определяется из нормированного нормального распределения для доверительной вероятности P_D .

Трудности возникают при меньшем числе наблюдений. В принципе можно было бы воспользоваться распределением Стьюдента, но неизвестно как в этом случае определить число степеней свободы. Точного решения эта задача не имеет. Приближенную оценку числа степеней свободы, называемую эффективной, можно найти по формуле, предложенной Б. Уэлчем

$$K_{эф} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m W_j^2 \hat{\sigma}_j^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^m \left[W_j^4 \hat{\sigma}_j^4 / (n_j + 1) \right]} - 2. \quad (3.33)$$

Имея $K_{эф}$ и заданную вероятность P_D можно найти по распределению Стьюдента t_p и, следовательно, $\varepsilon_{\bar{x}}$.

Если при разложении в ряд Тейлора необходимо учитывать члены второго порядка, то дисперсию результата наблюдения следует определять по формуле

$$D_X = \sum_{j=1}^m (W_j)^2 D_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)^2 D_j^2 + \sum_{j=2}^m \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 D_j D_i.$$

Границы суммарной погрешности измерений оценивают аналогично тому, как это было сделано для случая прямых измерений.

В общем случае, при *многократных косвенных измерениях* статистическая обработка результатов сводится к выполнению следующих операций:

- 1) из результата наблюдений каждого аргумента исключаются известные систематические погрешности;
- 2) проверяют, соответствует ли распределение групп результатов каждого аргумента заданному закону распределения;
- 3) проверяют наличие резко выделяющихся погрешностей (промахов) и исключают их;
- 4) вычисляют оценки аргументов и параметры их точности;
- 5) проверяют отсутствие корреляции между результатами наблюдений аргументов попарно;
- 6) вычисляют результат измерений и оценки параметров его точности;
- 7) находят доверительные границы случайной погрешности, неисключенную систематическую погрешность и общую погрешность результата измерения.

Алгоритм обработки результатов косвенных измерений приведен на рис. 3.7.

3.2.1 Частные случаи вычисления погрешностей при косвенных измерениях

Наиболее простыми, но распространенными случаями зависимости между аргументами при косвенных измерениях являются случаи линейной зависимости, степенных одночленов и дифференциальной функции.

В случае *линейной зависимости*

$$X = \sum_{j=1}^m b_j x_j \quad (3.34)$$

не требуется проведения линеаризации выражения для погрешности, которое, очевидно будет иметь вид

$$\Delta X = \sum_{j=1}^m b_j \Delta x_j.$$

То есть, вместо коэффициентов влияния можно использовать коэффициенты из выражения (3.34).

Дальнейшее определение погрешности измерения будет производиться аналогично косвенным измерениям с линеаризацией.

В случае *зависимости в виде степенных одночленов* уравнение измерения будет иметь вид

$$X = C x_1^{b_1} \dots x_m^{b_m} = C \prod_{j=1}^m x_j^{b_j}. \quad (3.35)$$

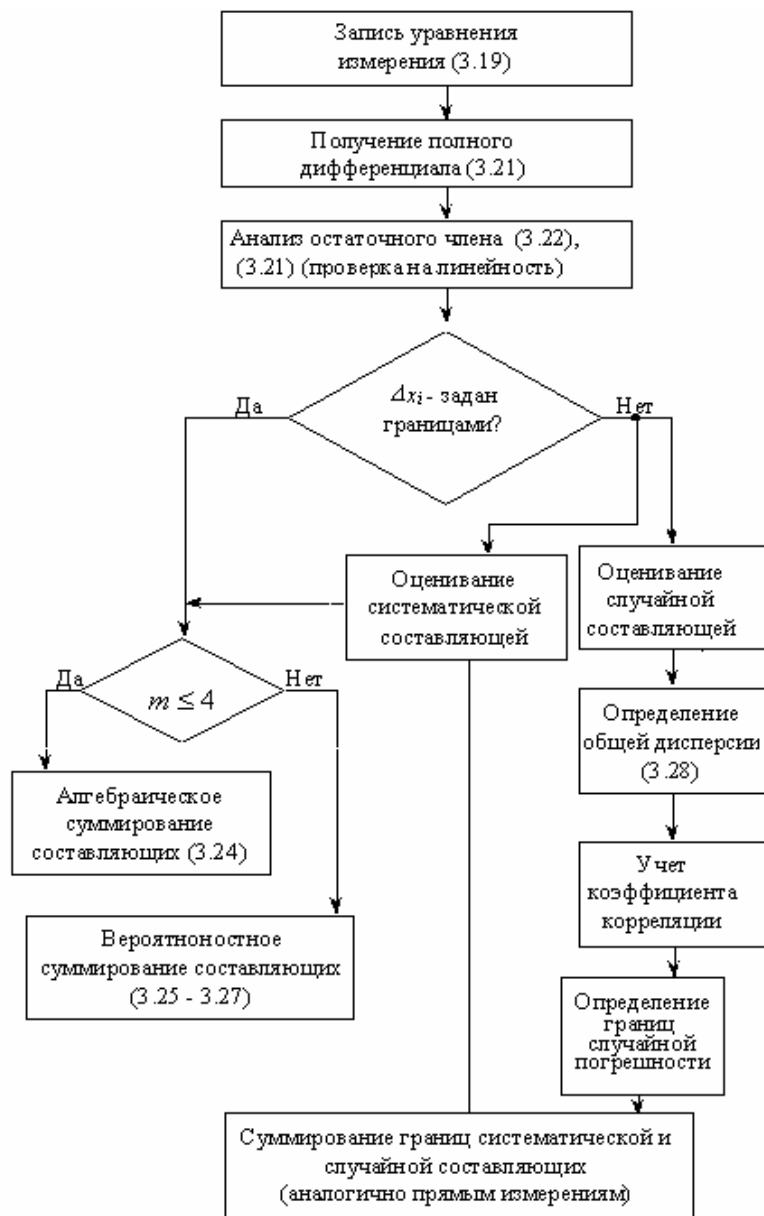


Рисунок 3.7 - Алгоритм обработки результатов косвенных измерений

Из этого выражения можно определить коэффициенты влияния

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial x_1} = C b_1 x_1^{b_1-1} \dots x_m^{b_m} \\ \frac{\partial X}{\partial x_2} = C x_1^{b_1} b_2 x_2^{b_2-1} \dots x_m^{b_m} \\ \dots \\ \frac{\partial X}{\partial x_m} = C x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots b_m x_m^{b_m-1} \end{cases} \quad (3.36)$$

Подставляя (3.36) в (3.35) и деля обе части на X , получаем искомую относительную погрешность

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} = b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2 + \dots + b_m \delta_m, \quad (3.37)$$

где δ_j - относительные погрешности измерения аргументов.

Таким образом, в случае уравнения измерения в виде степенных одночленов и представлении погрешностей в относительной форме, в качестве коэффициентов влияния берутся степени соответствующих одночленов.

Практический прием нахождения коэффициентов влияния при выражении погрешностей в форме относительных погрешностей состоит в том, что уравнение измерения сначала логарифмируют, а потом дифференцируют. В рассматриваемом случае

$$\ln X = \ln C + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_m \ln x_m;$$

$$\frac{\partial \ln X}{\partial X} = \frac{\partial X \partial X}{X} = b_1 \frac{\partial x_1}{x_1} + b_2 \frac{\partial x_2}{x_2} + \dots + b_m \frac{\partial x_m}{x_m} = b_1 \delta_1 + b_2 \delta_2 + \dots + b_m \delta_m.$$

То есть полученное выражение аналогично (3.37).

В метрологии часто встречается дифференциальная функция вида

$$X = x_1 - x_2.$$

Дисперсия результата измерения в этом случае будет равна

$$D_X = D_1 + D_2 - 2r_{1,2} \sqrt{D_1 D_2}.$$

Малое значение дисперсии может быть только в случае, когда $r_{1,2} = 1$, в этом случае $\sqrt{D_X} = \sqrt{D_1} - \sqrt{D_2}$, а при $D_1 = D_2$, $D_X = 0$.

Во всех остальных случаях D_X отлично от нуля. При отсутствии корреляции $D_X = D_1 + D_2$. Максимальное значение дисперсии результата измерения будет в том случае, когда $r_{1,2} = -1$, в этом случае $D_X = D_1 + D_2 + 2\sqrt{D_1 D_2}$. Таким образом, при измерении малых разностей дисперсия результата измерения может быть соизмерима с самим результатом измерения.

3.2.2 Критерий ничтожных погрешностей

Не все частные погрешности косвенных измерений играют одинаковую роль в формировании итоговой погрешности результата.

Поэтому интересно оценить, при каких условиях их присутствие не оказывает влияния на результат измерения.

При вероятностном суммировании результирующая погрешность будет равна

$$\Delta = \sqrt{\sum_{j=1}^m \Delta_j^2}.$$

При отбрасывании k -й погрешности

$$\Delta^* = \sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \Delta_j^2},$$

откуда следует

$$\Delta_k^2 = \Delta^2 - \Delta^{*2} = (\Delta - \Delta^*)(\Delta + \Delta^*) \approx 2\Delta(\Delta - \Delta^*)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta} = \frac{\Delta_k^2}{2\Delta^2}.$$

Отличие между Δ^* и Δ можно считать незначительным, если оно не будет превышать погрешности округления при выражении значения погрешности результата измерения. Так как последняя не должна выражаться более чем двумя значащими цифрами, а максимальная погрешность округления не будет превышать половины старшего отбрасываемого разряда, то отличие между Δ^* и Δ будет незначительным, если

$$\frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta} < 0,05.$$

С учетом предыдущего выражения

$$\frac{\Delta_k^2}{2\Delta^2} < 0,05 \Rightarrow \frac{\Delta_k^2}{\Delta^2} < 0,1;$$

$$\Delta_k < \sqrt{0,1}\Delta^2,$$

откуда $\Delta_k < 0,312\Delta$.

Таким образом, частной погрешностью Δ_k можно пренебречь в том случае, когда она в три раза меньше, чем суммарная погрешность косвенного измерения.

3.3 Совместные измерения

Совместными называются проводимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимости между ними

$$Y = f(x, z, u, \dots, \delta). \quad (3.38)$$

Наиболее часто на практике определяют зависимость Y от одного аргумента x

$$Y = f(x). \quad (3.39)$$

При этом совместно измеряют n значений аргумента x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и соответствующие значения величины Y_i и по полученным данным определяют функциональную зависимость (3.39). Этот случай мы и будем рассматривать в дальнейшем. Применяемые при этом методы прямо переносятся на зависимость от нескольких аргументов.

В метрологии совместные измерения двух аргументов применяются при градуировке СИТ, в результате которой определяются градуировочная зависимость, приводимая в паспорте СИТ в виде таблицы, графика или аналитического выражения. Предпочтительнее всего задавать ее в аналитическом виде, поскольку такая форма представления наиболее компактна и удобна для решения широкого круга практических задач.

Примером совместных измерений может служить задача определения температурной зависимости сопротивления терморезистора

$$R(t) = R_{20} + \alpha(t-20) + \beta(t-20)^2,$$

где R_{20} – сопротивление терморезистора при 20 °С;

α , β – температурные коэффициенты сопротивления.

Для определения R_{20} , α или β производится измерение $R(t)$ в n температурных точках ($n > 3$) и по этим результатам определяется искомая зависимость.

При определении зависимости в аналитическом виде следует придерживаться следующего порядка действий.

1. Построить график искомой зависимости $Y=f(x)$.
2. Задать предполагаемый функциональный вид зависимости

$$Y=f(x, A_0, A_1, \dots, A_m), \quad (3.40)$$

где A_j – неизвестные параметры зависимости.

Вид зависимости может быть известен либо из физических закономерностей, описывающих явление, положенное в основу работы СИТ, либо на основе предыдущего опыта и предварительного анализа данных (анализ графика искомой зависимости).

3. Выбрать метод определения параметров этой зависимости. При этом необходимо учитывать выбранный вид зависимости и априорные сведения о погрешности измерения x_i и Y_i .

4. Вычислить оценки параметров A_j зависимости выбранного вида.

5. Оценить степень отклонения экспериментальной зависимости от аналитической, для проверки правильности выбора вида зависимости.

6. Определить погрешности нахождения \hat{A}_j , используя известные характеристики случайных и систематических погрешностей измерения x и Y .

В современной математике разработаны многочисленные методы решения таких задач. Наиболее распространенными из них является метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод разработал Карл Фридрих Гаусс еще в 1794 г. для оценки параметров орбит небесных тел и до сих пор он с успехом используется при обработке экспериментальных данных.

В МНК оценки параметров искомой зависимости определяют из условия, что сумма квадратов отклонений экспериментальных значений Y от расчетных значений минимальна, т.е.

$$\sum_{j=1}^n \left[Y_i - f(x_i, \hat{A}_0, \dots, \hat{A}_m) \right]^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = Q = \min, \quad (3.41)$$

где δ_i - невязки.

При рассмотрении МНК ограничимся случаем, когда искомая функция – полином, т.е.

$$Y_i = \sum_{j=0}^m A_j x_i^j = A_0 + A_1 x_i + A_2 x_i^2 + \dots + A_m x_i^m. \quad (3.42)$$

Задача заключается в том, чтобы определить такие значения коэффициентов $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m$, при которых выполнялось бы условие (3.41).

Для этого запишем выражение для невязок в каждой экспериментальной точке

$$\begin{cases} \hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_1 + \hat{A}_2 x_1^2 + \dots + \hat{A}_m x_1^m - Y_1 = \delta_1 \\ \hat{A}_0 + \hat{A}_2 x_2 + \hat{A}_2 x_2^2 + \dots + \hat{A}_m x_2^m - Y_2 = \delta_2 \\ \dots \\ \hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_n + \hat{A}_2 x_n^2 + \dots + \hat{A}_m x_n^m - Y_n = \delta_n. \end{cases} \quad (3.43)$$

Число точек n выбирают значительно больше, чем $m+1$.

Это, как будет показано ниже, необходимо для уменьшения погрешности определения \hat{A}_j .

Согласно принципу наименьших квадратов (3.41), наилучшими значениями коэффициентов $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_m$ будут те, для которых сумма квадратов невязок

$$Q = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_i + \dots + \hat{A}_m x_i^m - Y_i \right)^2 \quad (3.44)$$

будет минимальна. Минимум функции многих переменных \hat{A}_j , как известно, достигается тогда, когда все ее частные производные равняются нулю. Поэтому дифференцируя (3.44), получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \hat{A}_0} = 2 \sum_{i=1}^n (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_i + \hat{A}_2 x_i^2 + \dots + \hat{A}_m x_i^m - Y_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{A}_1} = 2 \sum_{i=1}^n (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_i + \hat{A}_2 x_i^2 + \dots + \hat{A}_m x_i^m - Y_i) x_i = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial Q}{\partial \hat{A}_m} = 2 \sum_{i=1}^n (\hat{A}_0 + \hat{A}_1 x_i + \hat{A}_2 x_i^2 + \dots + \hat{A}_m x_i^m - Y_i) x_i^m = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Следовательно, вместо исходной условной системы (3.42), которая вообще говоря есть система несовместная, так как имеет n уравнений с $m+1$ неизвестными ($n > m+1$), мы получим систему линейных относительно $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m$ уравнений (3.45). В ней число уравнений при любом n точно равно числу неизвестных $m+1$. Система (3.45) называется нормальной системой.

Таким образом, поставленная задача заключается в приведении условной системы к нормальной.

Воспользовавшись обозначениями, введенными Гауссом

$$[x] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad [x^m] = \sum_{i=1}^n x_i^m, \quad [x^m y] = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i$$

и после сокращения всех уравнений на 2 и перегруппировки членов, получим

$$\begin{cases} [Y] = n \hat{A}_0 + [x] \hat{A}_1 + \dots + [x^m] \hat{A}_m \\ [Yx] = [x] \hat{A}_0 + [x^2] \hat{A}_1 + \dots + [x^{m+1}] \hat{A}_m \\ \dots \\ [Yx^m] = [x^m] \hat{A}_0 + [x^{m+1}] \hat{A}_1 + \dots + [x^{2m}] \hat{A}_m \end{cases} \quad (3.46)$$

Анализируя выражение (3.42) и (3.46) видим, что для получения первого уравнения нормальной системы достаточно просуммировать все уравнения системы (3.42). Для получения второго уравнения нормальной системы (3.42), суммируются все уравнения, предварительно умноженные на x_i . То есть, для получения k -го уравнения нормальной системы необхо-

димо умножить уравнения системы (3.42) на x_i^{k-1} и просуммировать полученные выражения.

Наиболее кратко решение системы (3.45) описывается с помощью определителей

$$\hat{A}_0 = \frac{D_o}{D}; \hat{A}_1 = \frac{D_1}{D}; \dots \hat{A}_m = \frac{D_m}{D},$$

где главный определитель D равен

$$D = \begin{vmatrix} n & [x] & \dots & [x^m] \\ [x] & [x^2] & \dots & [x^{m+1}] \\ [x^m] & [x^{m+1}] & \dots & [x^{2m}] \end{vmatrix}, \quad (3.47)$$

а определители D_j получаются из главного определителя D путем замены столбца с коэффициентами при неизвестном A_j на столбец со свободными членами

$$D_j = \begin{vmatrix} n & [x] & \dots & [Y] & \dots & [x^m] \\ [x] & [x^2] & \dots & [Yx] & \dots & [x^{m+1}] \\ [x^m] & [x^{m+1}] & \dots & [x^m Y] & \dots & [x^{2m}] \end{vmatrix}. \quad (3.48)$$

Оценка СКО величин \hat{A}_j , найденных как результат совместных измерений, выражается следующей формулой

$$S(\hat{A}_j) = \sqrt{\frac{D_{(j+1)(j+1)}}{D}} S(\delta), \quad (3.49)$$

где $D_{(j+1)(j+1)}$ - алгебраическое дополнение элементов главного определителя D , получаемое путем удаления из матриц определителя столбца $(j+1)$ и строки $(j+1)$;

$$S(\delta) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n-m-1}}, \quad (3.50)$$

где δ_i - вычисляются при подстановке в каждое условное уравнение оценок искомых величин $\hat{A}_0, \hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m$.

Доверительный интервал погрешности определения \hat{A}_j вычисляются по формуле

$$\varepsilon_{\hat{A}_j} = t_S S(\hat{A}_j), \quad (3.51)$$

где t_S определяется из распределения Стьюдента по числу степеней свободы $(n-m-1)$ и выбранной доверительной вероятности P_d .

При увеличении числа m объем выполненной работы быстро растет и поэтому на практике обычно ограничивается полиномом не выше третьей степени.

МНК и его применению посвящена обширная литература. В ней теоретически показано, что при нормальном распределении погрешностей МНК приводит к оценкам неизвестных, удовлетворяющих принципу максимального правдоподобия.

3.3.1 Определение параметров линейной зависимости

На практике наиболее распространен случай $m=1$ (линейное уравнение)

$$Y_i = A_0 + A_1 x_i, \quad i=1, \dots, n.$$

Для этого случая из выведенных формул получаем

$$\begin{cases} [Y] = n\hat{A}_0 + [x]\hat{A}_1 \\ [xY] = [x]\hat{A}_0 + [x^2]\hat{A}_1 \end{cases};$$

$$D = \begin{vmatrix} n & [x] \\ [x] & [x^2] \end{vmatrix}; \quad D_o = \begin{vmatrix} [Y] & [x] \\ [xY] & [x^2] \end{vmatrix}; \quad D_1 = \begin{vmatrix} n & [Y] \\ [x] & [xY] \end{vmatrix};$$

$$A_o = \frac{D_o}{D} = \frac{-[xY][x] + [Y][x^2]}{-[x^2] + n[x^2]};$$

$$A_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-[x][Y] + n[xY]}{-[x^2] + n[x^2]};$$

$$D_{11} = [x^2]; \quad D_{22} = n;$$

$$S(A_o) = \sqrt{\frac{[x^2]}{-[x^2] + n[x^2]}} S(\delta); \quad S(A_1) = \sqrt{\frac{n}{n[x^2] - [x^2]}} S(\delta);$$

$$S(\delta) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n-2}}.$$

3.3.2 Определение параметров неполиномиальных зависимостей с помощью МНК

В результате метрологических исследований нередко приходится сталкиваться со случаем, когда при определении нелинейной зависимости повышение степени полинома в разумных пределах не приводит к существенному уменьшению погрешности аппроксимации. В этом случае применяют следующие приемы.

1. Разбиение области определения функции на несколько участков с последующей аппроксимацией ее на каждом из участков.

2. Преобразование функции $Y = f(x)$ в линейную зависимость $Y^* = A_0 + A_1 x^*$ путем замены переменных $x^* = \Phi(x)$; $Y^* = \Psi(Y)$.

Этот прием хорошо реализуется для функций следующего вида:

а) показательная $Y = A_0 e^{A_1 x}$, для которой в результате замены переменной $Y^* = \ln Y$, получаем $Y^* = A_0^* + A_1 x^*$, где $A_0^* = \ln A_0$;

б) степенная $Y = A_0 x^{A_1}$, для которой в результате замены переменных $Y^* = \ln Y$, $x^* = \ln x$, получаем $Y^* = A_0^* + A_1 x^*$, где $A_0^* = \ln A_0$;

в) логарифмическая $Y = A_0 + A_1 \ln x$, для которой в результате замены переменной $x^* = \ln x$ получаем $Y = A_0 + A_1 x^*$;

г) гиперболическая $Y = A_0 + A_1 / x$, для которой в результате замены переменной $x^* = 1/x$ получаем $Y = A_0 + A_1 x^*$;

д) дробно-линейная функция первого вида $Y = (A_0 + A_1 x)^{-1}$, для которой в результате замены переменной $Y^* = 1/Y$ получаем $Y^* = A_0 + A_1 x^*$;

е) дробно-линейная функция второго вида $Y = \frac{x}{A_1 + A_0 x}$, для которой в результате замены переменных $Y^* = 1/Y$, $x^* = 1/x$, получаем $Y^* = A_0 + A_1 x^*$.

Графики перечисленных функций приведены на рис. 3.8.

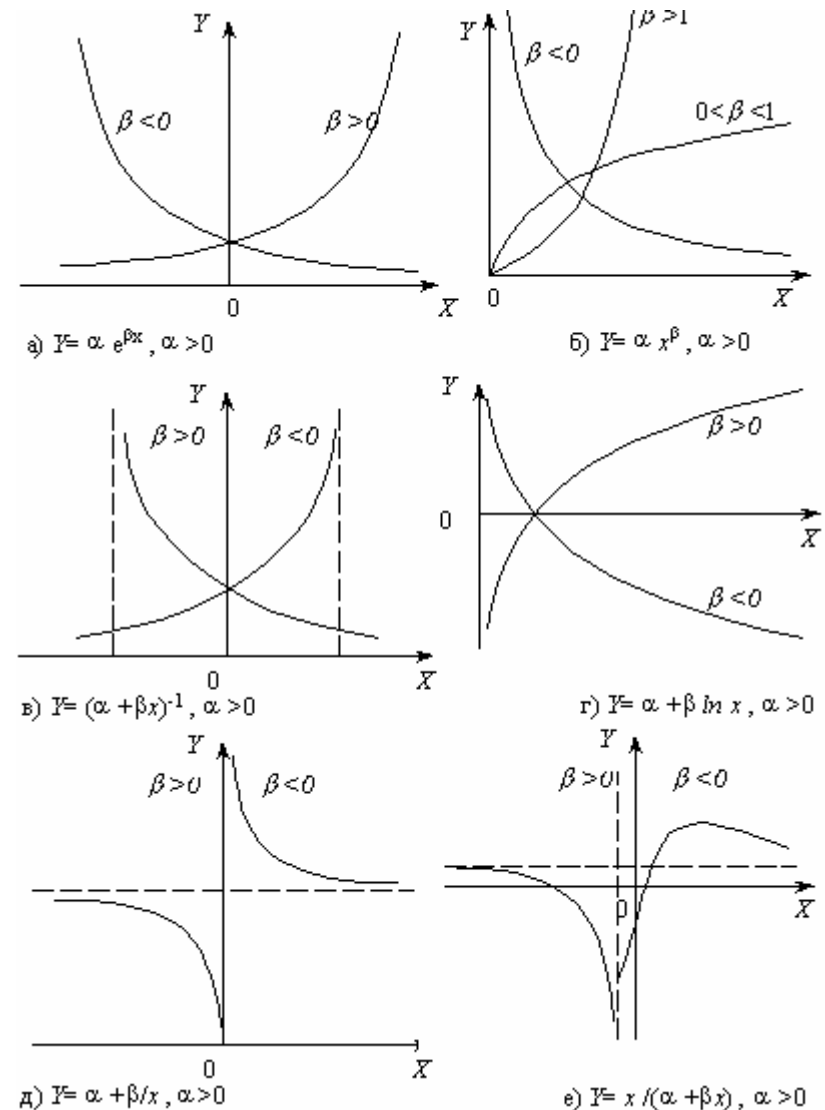


Рисунок 3.8 - Графики аппроксимирующих функций

При определении погрешности нахождения оценок $\hat{A}_0; \hat{A}_1$, необходимо помнить, что в случаях показательной и степенной функции параметр A_0 связан с параметром A_0^* выражением $A_0 = e^{A_0^*}$.

Поэтому погрешности A_0 и A_0^* будут связаны соотношением $\varepsilon_{A_0} = \varepsilon_{A_0^*} e^{A_0^*}$.

3. Линеаризация нелинейных уравнений методом последовательных приближений

Общий метод решения этой задачи основан на допущении, что несовместность условных уравнений невелика, т.е. их невязки малы. Тогда, взяв из условной системы столько уравнений, сколько в ней неизвестных, их решением находим начальные оценки неизвестных $\hat{A}_0^*, \hat{A}_1^*, \dots, \hat{A}_m^*$. Полагая далее, что $\hat{A}_j = \hat{A}_j^* + \Delta A_j$ и подставляя эти выражения в условные уравнения, раскладываем условные уравнения в ряды. Сохраняя лишь члены с первыми степенями поправок ΔA_j , получим

$$Y_i = f(x_i, \hat{A}_0^*, \hat{A}_1^*, \dots, \hat{A}_m^*) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \hat{A}_j} \Delta \hat{A}_j.$$

Перепишав полученное выражение в виде

$$Y_i - f(x_i, \hat{A}_0^*, \hat{A}_1^*, \dots, \hat{A}_m^*) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \hat{A}_j} \Delta \hat{A}_j = \delta_i, \quad (3.52)$$

можно видеть, что мы получили условную систему линейных уравнений относительно поправок $\Delta \hat{A}_j$. Решение этой системы с помощью МНК дает нам их оценки и СКО. Тогда $\hat{A}_j = \hat{A}_j^* + \Delta \hat{A}_j$. Поскольку $\Delta \hat{A}_j^*$ - неслучайные величины, то $S^2(\hat{A}_j) = S^2(\Delta \hat{A}_j)$. Получив оценки $\Delta \hat{A}_j$, можно сделать второе приближение и т.д.

3.4 Совокупные измерения

Совокупные измерения – измерения, в которых значения нескольких одновременно измеряемых однородных величин находят решением сис-

темы уравнений, которые связывают разные комбинации этих величин, измеряемые прямо или косвенно.

Систему уравнений совокупных измерений можно записать в следующем виде

$$Y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (3.53)$$

где $i=1, 2, \dots, n$; $n > m$. То есть характерной особенностью совокупных измерений, также как и совместных, является то обстоятельство, что число уравнений больше, чем число неизвестных.

Здесь Y_i - результаты прямых измерений различных сочетаний искомым величин x_1, x_2, \dots, x_m .

Таким образом, в отличие от косвенных измерений, производятся измерения нескольких искомым величин, причем последние находятся в результате решения системы уравнений.

Легко заметить, что система уравнений (3.53) аналогична системе уравнений совместных измерений. Имеется, однако, принципиальное отличие совокупных измерений от совместных, прежде всего в постановке измерительной задачи: в результате совокупных измерений определяется не функциональная зависимость между величинами (как это делается при совместных измерениях), а сами величины, причем величины одноименные.

Несмотря на отличия, обработка экспериментальных данных при совместных и совокупных измерениях, производится практически одними и теми же приемами.

Классическим примером совокупных измерений является измерение емкости двух конденсаторов C_1 и C_2 по результатам измерения емкости каждого из них в отдельности, а также при параллельном и последовательном их соединении. Такой метод применяется для уменьшения систематической погрешности измерения, различной в разных точках диапазона измерения.

В этом случае, хотя каждое измерение выполняется с одним наблюдением, но в итоге для двух неизвестных будем иметь систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} C_1 = Y_1 \\ C_2 = Y_2 \\ C_1 + C_2 = Y_3 \\ C_1 C_2 / (C_1 + C_2) = Y_4 \end{cases}. \quad (3.54)$$

Последнее уравнение системы – нелинейное, поэтому применим для этой системы метод линеаризации, рассмотренный для случая совместных измерений, и заключающийся в разложении всех уравнений системы в ряд Тейлора. В этом случае получаем следующие значения частных производных

$$\Delta Y_i = \frac{\partial Y_i}{\partial C_1} \Delta C_1 + \frac{\partial Y_i}{\partial C_2} \Delta C_2;$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial C_1} = 1; \quad \frac{\partial Y_1}{\partial C_2} = 0; \quad \frac{\partial Y_2}{\partial C_1} = 0; \quad \frac{\partial Y_2}{\partial C_2} = 1; \quad \frac{\partial Y_3}{\partial C_1} = 1; \quad \frac{\partial Y_3}{\partial C_2} = 1;$$

$$\frac{\partial Y_4}{\partial C_1} = \frac{C_2(C_1 + C_2) - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}; \quad \frac{\partial Y_4}{\partial C_2} = \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2},$$

используя которые можно записать исходную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 1 \cdot \Delta C_1 + 0 \cdot \Delta C_2 = \Delta Y_1 \\ 0 \cdot \Delta C_1 + 1 \cdot \Delta C_2 = \Delta Y_2 \\ 1 \cdot \Delta C_1 + 1 \cdot \Delta C_2 = \Delta Y_3 \\ \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} \Delta C_1 + \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \Delta C_2 = \Delta Y_4. \end{cases} \quad (3.55)$$

Для решения этой системы необходимо выбрать точки разложения C_1^* и C_2^* , близкие к измеренным значениям Y_1 и Y_2 . Подставляя C_1^* и C_2^* в уравнение системы (3.54) можно найти невязки ΔY_i .

$$\Delta Y_i = Y_i - f_i(C_1^*, C_2^*). \quad (3.56)$$

Подставляя эти невязки в уравнение (3.55), можно получить из нее систему нормальных уравнений (по МНК)

$$\begin{cases} \left[2 + \frac{C_2^{*2}}{(C_1^* + C_2^*)^2} \right] \Delta C_1 + \left[2 + \frac{C_1^{*2}}{(C_1^* + C_2^*)^2} \right] \Delta C_2 = \sum_{i=1}^4 \Delta Y_i \\ \left[(\Delta Y_1 + \Delta Y_3) + \frac{C_2^{*2}}{(C_1^* + C_2^*)^2} \Delta Y_4 \right] \Delta C_1 + \left[(\Delta Y_2 + \Delta Y_3) + \frac{C_1^{*2}}{(C_1^* + C_2^*)^2} \Delta Y_4 \right] \Delta C_2 = \sum_{i=1}^4 \Delta Y_i^2 \end{cases}$$

Решая систему, получаем ΔC_1 и ΔC_2 , откуда можно найти искомые C_1 и C_2 как

$$C_1 = C_1^* + \Delta C_1;$$

$$C_2 = C_2^* + \Delta C_2.$$

Совокупные измерения широко распространены в метрологической практике, например, при калибровке мер или шкал приборов. В этом случае система уравнений совокупных измерений имеет вид

$$Y_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} A_j, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (3.57)$$

где A_j - значения величин, подлежащих определению;

C_{ij} - известные коэффициенты;

Y_i - результаты сравнения различных комбинаций сочетаний мер или отметок шкал;

m - количество значений величин, подлежащих определению;

n - количество комбинаций (уравнений).

При калибровке коэффициенты C_{ij} принимают следующие значения:

0 - если A_j не участвует в i -ом измерении;

1 - если измеряется сумма нескольких величин, в которую входит A_j ;

-1 - если сумма нескольких величин сравнивается с A_j .

Если число уравнений равно числу неизвестных, то система (3.57) решается однозначно, а действительные значения измеряемых величин и доверительные интервалы их погрешностей определяются методами обработки косвенных измерений. Однако, для уменьшения погрешностей калибровки производится сравнение большего числа комбинаций, чем количество определяемых значений величин. Тогда оценивание результатов измерений производится как при совместных измерениях. Для решения системы условных уравнений обычно применяют МНК. Этот метод, как уже было сказано, вытекает из принципа максимального правдоподобия и является оптимальным при следующих условиях:

- результаты измерения Y содержат независимые случайные погрешности с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями;

- погрешности имеют нормальное распределение.

При выполнении этих условий получаемые оценки будут состоятельными, несмещенными и эффективными.

Аналогично рассмотренному в разделе 3.4, можно записать систему уравнений относительно невязок

$$\delta_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} \hat{A}_j - Y_i. \quad (3.58)$$

3. Изложите порядок обработки прямых измерений с однократными наблюдениями.

4. Какова цель проведения прямых измерений с многократными наблюдениями? Какие задачи решаются в процессе достижения этой цели.

5. Изложите порядок обработки прямых измерений многократными наблюдениями.

6. Как производится суммирование систематических и случайных погрешностей при прямых измерениях?

7. Изложите порядок определения границ случайной погрешности при проведении прямых измерений с многократными наблюдениями.

8. Какие условия должны выполняться для обеспечения статистической однородности групп наблюдений?

9. Определите однородность и равномерность двух групп наблюдений величины x и возможность их объединения. Рассчитайте оценки математического ожидания и СКО объединённых результатов наблюдений для доверительной вероятности 0,95.

x_1	2.606	2.419	2.117	1.814	1.627
x_2	1.52	1.581	1.797	2.128	2.491

x_1	1.627	1.813	2.115	2.418	2.606
x_2	2.788	2.934	2.881	2.642	2.283

10. Пользуясь принципом максимального правдоподобия, найдите эффективные оценки математического и дисперсии объединённых групп неравноточных наблюдений, если средние арифметические в группах распределены по нормальному закону.

11. Какие измерения называют косвенными? Как, имея уравнение косвенного измерения, записать выражение для его абсолютной погрешности?

12. Определите относительную методическую погрешность косвенного измерения напряжения на двух последовательно соединённых резисторах 10 кОм и 20 кОм по результатам измерения напряжения на каждом из них, если внутреннее сопротивление вольтметра составляет 100 кОм.

13. Результаты измерения напряжения U на двух последовательно соединённых резисторах определены посредством косвенных измерений на каждом из них. Значение U_1 и U_2 в одни и те же моменты времени приведены в таблице.

U_1	107	106.6	105.6	104.4	103.4
U_2	207.5	208.7	208.9	208	206.3
U_1	103.0	103.4	105.6	106.8	107
U_2	204.5	203.3	204	205.7	207.5

Определите значение оценки дисперсии результатов наблюдений \hat{D}_U с учетом корреляционной связи между U_1 и U_2 .

14. Изложите алгоритм обработки результатов измерений с многократными наблюдениями аргументов.

15. В чем суть критерия ничтожных погрешностей и для чего он используется?

16. С помощью МНК определите параметра A и B зависимости $y = f(x, A, B)$, заданной в таблице и границы погрешностей их определения.

$y = f(x, A, B)$	0	1	2	3	4	5
$y = Ax + B$	9,2	10,4	11,7	12,9	14,2	15,4
$y = \frac{1}{B + Ax}$	13,37	10,72	8,95	7,68	6,72	5,98
$y = A \cdot x^B$		0,38	0,92	1,51	2,15	2,84
$y = B + \frac{A}{x}$		21,68	12,71	9,72	8,23	7,33
$y = \frac{x}{B + Ax}$		0,2292	0,2841	0,3848	0,3228	0,3319
$y = B + A \cdot \ln x$		19,35	32,68	40,48	46,02	50,31
$y = B + e^{Ax}$	7,84	8,45	9,1	9,81	10,57	11,39

$y = f(x, A, B)$	6	7	8	9	10
$y = Ax + B$	16,7	17,9	19,2	20,4	
$y = \frac{1}{B + Ax}$	5,39	4,9	4,49	4,15	
$y = A \cdot x^B$	3,55	4,3	5,03	5,87	6,69
$y = B + \frac{A}{x}$	6,73	6,3	5,98	5,73	5,53
$y = \frac{x}{B + Ax}$	0,3882	0,3488	0,3464	0,3493	0,3516
$y = B + A \cdot \ln x$	53,82	56,78	59,35	61,62	63,64
$y = B + e^{Ax}$	12,26	13,23	14,26	15,37	16,57

17. Приведите выражения для определения коэффициента корреляции. В каких пределах он изменяется? Что определяет?

18. Как производится проверка на допустимость линеаризации иско-
мой величины от аргументов?

19. Почему уравнения исходной избыточной системы при совмест-
ных и совокупных измерениях называются условными?

20. Каковы условия применимости МНК?

21. Где в метрологической практике применяются совместные и со-
вокупные измерения?

22. Изложите суть МНК.

23. Объясните основные методы линеаризации при определении па-
раметров неполиномиальных зависимостей с помощью МНК.

4 СРЕДСТВА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

4.1 Общие положения и определения

Средства измерительной техники – технические средства, исполь-
зуемые в измерениях и имеющие нормированные метрологические харак-
теристики.

Все многообразие СИТ можно подразделить на следующие виды (см.
рис.4.1).

В зависимости *от роли, выполняемой СИТ в процессе измерений*, они
подразделяются на измерительные устройства и средства измерений.

Измерительные устройства (ИУ) – СИТ, в котором выполняется
только одна из составляющих частей процедуры измерений (*измеритель-
ная операция*). К измерительным операциям относятся воспроизведение
единицы физической величины, измерительное преобразование, сравне-
ние и вычислительные операции, выполняемые во время измерений. Эти
операции реализуют соответственно мера, измерительный преобразова-
тель, компаратор и вычислительный компонент.

Мера – ИУ, реализующее воспроизведение и (или) хранение ФВ од-
ного или нескольких размеров, значения которых известны с необходимой
точностью.

Меры, воспроизводящие ФВ лишь одного размера, называются *одно-
значными* (например, гиря, образцовая катушка сопротивления, индуктив-
ности, образцовый конденсатор постоянной емкости, кварцевый генера-
тор, нормальный элемент, калибр и т.п.).

К однозначным мерам относят *стандартные образцы* – меры в виде
некоторого количества вещества или материала, предназначенные для
воспроизведения и хранения размеров величин, характеризующих состав
или свойства этого вещества (материала), значения которых установлены
по результатам метрологической аттестации, используемые для передачи
размера единицы при поверке, калибровке, градуировке СИТ, аттестации

методик выполнения измерений и утвержденные в качестве стандартного образца в установленном порядке. Различают *стандартные образцы свойств* и *стандартные образцы состава*.

Многозначные меры могут воспроизводить ряд размеров ФВ, заполняющих (часто даже непрерывно) некоторый промежуток между определенными границами. Примеры – миллиметровая линейка с миллиметровыми и сантиметровыми делениями, вариометр, измерительный конденсатор переменной емкости, кварцевый синтезатор частоты, генератор стандартных сигналов, калибратор напряжения и т.д.

Наборы и магазины мер – объединенные в разных сочетаниях однозначные меры. Пример набора мер: набор гирь, набор концевых мер и т.д.

Магазином называется набор мер, объединенных в единое устройство, в котором имеется приспособление для их соединения в различном сочетании. Например, магазин сопротивлений, индуктивностей, емкостей и т.д.

Указанное на мере значение величины называется *номинальным значением меры*.

Действительное значение величины, воспроизводимой мерой, называется *действительным значением меры*.

Разность между номинальным и действительным значением меры называют *погрешностью меры*.

Измерительным преобразователем (ИП) называется ИУ, реализующее измерительное преобразование. Преобразуемая величина X называется входной, а результат преобразования Y – выходной величиной. Соотношение между ними $Y = F(X)$ называется *функцией преобразования*.

По *характеру преобразования* различают аналоговые, аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи. В зависимости *от места размещения в измерительной цепи* различают первичные и промежуточные преобразователи, по *функциональным свойствам* выделяют масштабные и передающие ИП.

Первичный ИП (сенсор) – который первым взаимодействует с объектом измерения (например, первичный ИП температуры, давления в параметр электрического сигнала); *промежуточный* – включенный в цепь после первичного преобразователя; *масштабный* – предназначен для изменения величины в заданное количество раз. При масштабном преобразовании природа физической величины, подводимой к его входу, не изменяется. К масштабным преобразователям относятся усилители, аттенюаторы, измерительные трансформаторы и т.п.

Компараторы – ИУ, реализующее сравнение размеров однородных ФВ. Пример компараторов – мостовая схема, равноплечие весы. Иногда в роли компаратора выступает человек (например, при измерении частоты с помощью гетеродинного частотомера).



Рисунок 4.1 – Классификация средств измерительной техники

Вычислительный компонент (числовой измерительный преобразователь) – ИУ, являющееся совокупностью средств вычислительной техники и программного обеспечения и выполняющее вычислительные операции.

Средства измерений (СИ) – СИТ, реализующее полную процедуру измерений и обеспечивающее получение результата измерений.

К СИ относятся регистрирующие СИ, измерительные приборы, измерительные каналы и измерительные системы.

Регистрирующий СИ – СИ, в котором регистрируется значение измеряемой величины. Он состоит из ИУ и *регистрирующего устройства*.

Последнее представляет собой совокупность элементов или узел СИ, который регистрирует (на носителе) значения измеряемой величины. Регистрация может осуществляться в аналоговой и цифровой форме. В зависимости от этого различают *самопишущие* (осуществляющие запись результатов измерений в виде диаграммы) и *печатающие* (в которых производится печать результатов измерений в цифровой форме).

Измерительный прибор - это СИ, которое выдает значение измеряемой величины для визуального восприятия. Это наиболее распространенный вид СИ. Он состоит из ИУ и *показывающего устройства*. Последнее представляет собой совокупность элементов или узел СИ, обеспечивающий визуальное восприятие значения измеряемой величины. В зависимости от использованных технических решений различают аналоговые и цифровые измерительные приборы.

Измерительный канал (ИК) - совокупность СИТ, средств связи и других технических средств, предназначенная для выработки сигналов измерительной информации об одной измеряемой ФВ.

Измерительная система (ИС) – совокупность СИТ, вычислительных компонентов, средств передачи информации, функционально объединенных для создания выходных измерительных сигналов об одной или нескольких измеряемых ФВ. ИС может иметь один или больше ИК.

По роли, выполняемой в системе обеспечения единства измерений (в зависимости от точности) СИ подразделяются на эталоны, рабочие СИ и индикаторы.

Эталон – СИТ, обеспечивающее воспроизведение и (или) хранение единицы измерений одного или нескольких значений, а также передачу размера этой единицы другим СИТ. Классификация эталонов дана в п. 1.3.

Рабочий СИТ – наиболее распространенные СИТ, применяемые в измерениях, не связанных с передачей размера единицы другим СИТ.

Индикатор – техническое средство или вещество, которые при наличии определенного свойства объекта или явления создают сигнал информации об этом. Индикаторы не относятся к СИТ, однако СИТ можно использовать как индикаторы.

В зависимости от структурной схемы (метода измерения) различают *приборы прямого преобразования* и *уравновешивания*. Первые отличаются отсутствием, а вторые – наличием сравнения выходного сигнала с входным.

4.2. Метрологические характеристики СИТ и их нормирование

Все СИТ, независимо от их конкретного исполнения, обладают рядом общих свойств, необходимых для выполнения ими их функционального назначения. Технические характеристики, описывающие эти свойства и

оказывающие влияние на результаты и на погрешности измерений, называют *метрологическими характеристиками (МХ)*.

МХ, устанавливаемые нормативно-техническими документами, называются *нормируемыми метрологическими характеристиками*.

При нормировании МХ СИТ придерживаются следующих основных принципов.

1. МХ нормируются не для конкретного экземпляра СИТ, а для всех СИТ данного типа.

2. Так как для разных экземпляров СИТ МХ различны, то в качестве нормируемой МХ принимается некоторая средняя для СИТ данного типа, называемая *номинальной*. Реальные характеристики конкретного СИТ, как правило, лучше номинальных.

3. Номинальные нормируемые характеристики представляют в виде формул, таблиц, графиков. Линейные нормируемые МХ, проходящие через нуль, представляются в виде числового коэффициента.

4. Кроме номинальной характеристики нормируют пределы допускаемых отклонений МХ у отдельных экземпляров СИТ данного типа от номинальной. Эти МХ называют *граничными*.

5. МХ нормируют для нормальных и рабочих условий применения СИТ.

Нормальными считаются условия, при которых зависимостью МХ от изменения влияющей величины (температуры, давления, напряжения питания и т.д.) можно пренебречь. Для большинства МХ нормальными условиями считаются:

- а) диапазон температур $293 \pm 5^\circ\text{K}$;
- б) относительная влажность $65 \pm 15\%$;
- в) атмосферное давление 750 ± 30 мм рт. ст.;
- г) напряжение в сети питания $220 \text{ В} \pm 2\%$;
- д) частота питающей сети $50 \text{ Гц} \pm 1\%$.

Рабочие условия отличаются от нормальных более широким диапазоном изменения влияющей величины.

6. Из совокупности МХ одной группы при нормировании отдают предпочтение тем, которые определяются точнее, а также тем, которые удобнее использовать при решении метрологических задач (для расчета погрешностей и т.п.).

Нормируемые МХ условно можно разбить на следующие шесть групп.

1. Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений.
2. Характеристики погрешностей СИТ.
3. Характеристики чувствительности СИТ к влияющим величинам.
4. Динамические характеристики СИТ.

5. Характеристики взаимодействия СИТ с объектом измерения на входе или выходе СИТ.

6. Неинформативные параметры выходного сигнала СИТ.

4.2.1 Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений

Одной из основных МХ СИТ этой группы является функция преобразования. Она устанавливает зависимость $Y = F(X)$ показаний СИТ Y от значения информативного параметра входного сигнала X . Для измерительных преобразователей Y - выходной сигнал. Функция преобразования определяется в результате проведения совместных измерений X и Y (см. подраздел 3.3). Если функция преобразования СИТ линейна ($Y = KX$), то коэффициент K называется *чувствительностью*. В противном случае под чувствительностью необходимо понимать производную от функции преобразования $K = \partial Y / \partial X$ в заданной точке диапазона.

Для однозначной и многозначной мер нормируется их значение.

Важной характеристикой шкальных СИТ или многозначных мер является *цена деления*, т.е. разница значений измеряемой величины, соответствующая двум соседним отметкам шкалы СИТ. Если чувствительность постоянна в каждой точке диапазона, то такая шкала называется *равномерной*.

Для цифровых СИТ нормируют вид выходного кода и число разрядов.

4.2.2 Характеристики погрешностей СИТ

Характеристиками второй группы являются характеристики погрешностей СИТ.

Абсолютной погрешностью СИТ называется разность между показаниями СИТ и истинным (действительным) значением измеряемой ФВ. *Погрешность меры* – разность между ее номинальным и действительным значением. Абсолютная погрешность измерительного преобразователя может быть выражена в единицах выходной или входной величин. В последнем случае абсолютная погрешность определяется как разность между значением входной величины X , (найденной по действительному значению выходной величины и номинальной характеристике преобразователя) и действительным значением X_0 входной величины.

Однако, в большинстве случаев степень точности СИТ характеризует *относительная погрешность*, т.е. выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой или воспроизводимой данным СИТ величины

$$\delta = 100\Delta X / X_0, \%$$

Обычно $\delta \ll 1$, поэтому в эту формулу вместо действительного значения может быть подставлено номинальное значение меры или показание измерительного прибора, т.е. $\delta = 100\Delta X / X, \%$.

Если диапазон измерения прибора охватывает и нулевое значение измеряемой величины, то относительная погрешность обращается в бесконечность в соответствующей ему точке шкалы. В этом случае пользуются понятием *приведенной погрешности*, равной отношению абсолютной погрешности к некоторому нормирующему значению X_H : $\gamma = 100\Delta X / X_H$.

В качестве *нормирующего значения* принимается значение, характерное для данного вида измерительного прибора. Это может быть диапазон измерений, верхний предел измерений и т.д.

Характеристики точности (погрешности СИТ) нормируются с помощью классов точности. *Класс точности* – это обобщенная характеристика СИТ, определяемая пределами допускаемых основных и дополнительных погрешностей, а также рядом других свойств, влияющих на точность осуществляемых с их помощью измерений. Способы установления классов точности изложены в ГОСТ 8.401-80 “ГСИ. Классы точности средств измерений. Общие требования”. При установлении классов точности имеют место следующие формы представления погрешностей СИТ.

1. Если предел допускаемых погрешностей выражается в *форме абсолютной погрешности*, установленной в виде графика, таблицы или формулы, то класс точности на приборе обозначается с помощью букв латинского алфавита или римских цифр. При этом большей погрешности соответствует больший порядковый номер или буква, находящаяся дальше от начала алфавита. Пределы допускаемых основных погрешностей указываются в этом случае в документации на прибор.

2. Для СИТ, пределы допускаемой погрешности которых выражают в виде *относительных и приведенных погрешностей*, стандарт установил ряд чисел, применяемых для обозначения класса точности и соответствующих значению предела допускаемых погрешностей $\delta_{кл}$:

$$[1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5; 6] \cdot 10^n,$$

где $n = 1; 0; -1; -2$ и т.д.

Обозначение на шкале прибора класса точности, выраженного через приведенную погрешность, может быть двояким 1,5 или $\sqrt{1,5}$.

В первом случае нормирующее значение равно пределу измерения (или наибольшему из пределов, если шкала имеет нуль посередине), а во втором – принято равным длине существенно неравномерной шкалы. В этом случае предел абсолютной погрешности выражают, как и длину шкалы, в единицах длины.

В этих случаях определить относительную погрешность в любой точке шкалы X прибора можно, пользуясь выражением

$$\delta = \delta_{\text{кл}} \frac{X_H}{X}.$$

3. При постоянной относительной погрешности обозначение класса точности на шкале прибора имеет вид $(1,5)$.

В этом случае погрешность соответствует тому значению, на которое показывает указатель.

4. Если относительная погрешность содержит аддитивную (постоянную для данного предела измерения) и мультипликативную (линейно изменяющуюся в пределах диапазона измерения) составляющие, то она вычисляется по формуле

$$\delta = \pm \left[c + d \left(\left| \frac{X_H}{X} \right| - 1 \right) \right], \%$$

и обозначается на приборе в виде c/d , например 0,01/0,02.

Погрешности СИТ определяются экспериментально в процессе государственных испытаний (для стандартизованных СИТ) или метрологической аттестации (для нестандартизованных СИТ).

При разработке СИТ его погрешность можно определить априорно по известным характеристикам, входящих в него блоков.

4.2.3 Характеристики чувствительности СИТ к влияющим величинам

К влияющим величинам относятся:

- параметры окружающей среды (температура, давление, влажность и т.п.);
- параметры питающего напряжения (значение напряжения, частота);
- параметры внешних полей (электрических, магнитных, гравитационных);
- параметры механических воздействий (вибраций и тряски);
- другие величины.

Чувствительность СИТ к влияющим величинам выражается *дополнительной погрешностью*. Она проявляется постольку, поскольку от значений влияющих величин зависят параметры материалов и элементов, из которых состоит СИТ, а также конструктивные параметры СИТ.

Наиболее представительной характеристикой дополнительной погрешности является функция зависимости характеристик погрешности от влияющих величин, т.е. *функция влияния*

$$\delta = f(\Theta, P, U, \dots, Q).$$

Нормированные функции влияния используются в современных интеллектуальных средствах измерения для коррекции дополнительных погрешностей СИТ. В этом случае СИТ, выполненное на основе микропроцессора или микро-ЭВМ, содержит датчики соответствующих влияющих величин, а в ПЗУ микропроцессора зашиты функции влияния. Вычисление результата измерения осуществляется с учетом функций влияния и значений параметров влияющих величин. Таким образом осуществляется коррекция дополнительных погрешностей в диодных ваттметрах СВЧ ряда фирм (Маркони, Хьюдес и т.д.), устраняя “неидеальные” характеристики измерительного преобразователя (диода с барьером Шоттки) – зависимость чувствительности от частоты, температуры окружающей среды, уровня мощности и т.д.

4.2.4 Динамические характеристики СИТ

Динамические характеристики (ДХ) СИТ отражают их динамические свойства. Эти свойства определяют время измерения СИТ и его динамическую составляющую погрешности.

ДХ подразделяются на полные и частные.

С помощью *полных* ДХ можно:

- а) устанавливать взаимосвязь между изменением информативного параметра входного сигнала СИТ и его выходным сигналом (или показанием);
- б) определять динамическую составляющую погрешности измерений;
- в) производить коррекцию динамической погрешности СИТ.

Частные ДХ являются параметрами или функционалами полных ДХ (время установления показаний, постоянная времени, частота собственных колебаний, их декремент затухания и т.д.). По ним невозможно определить погрешность измерений или установить взаимосвязь между входным и выходным сигналом СИТ. Однако, используя их, можно ориентировочно сопоставить динамические свойства СИТ между собой или с условиями измерений. Частные динамические характеристики нормируются в виде чисел (номинального значения, пределов допустимых отклонений или граничных значений).

Для СИТ с линейной градуировочной характеристикой, т.е. для которых справедлив принцип суперпозиции для входных x_i и выходного Y сигналов

$$Y = f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(a_i x_i) \quad (4.1.)$$

нормируются следующие полные динамические характеристики:

- импульсная характеристика $g(t)$;

- переходная характеристика $h(t)$;
- комплексный коэффициент передачи (амплитудно-фазовая характеристика) $K(j\omega)$;
- совокупность амплитудно-частотной $|K(j\omega)|$ и фазо-частотной $\varphi(j\omega)$ характеристик;
- передаточная функция $H(S)$;
- дифференциальное уравнение.

Все полные ДХ взаимосвязаны между собой.

Импульсная характеристика (по определению ГОСТ 21878-76) представляет собой отклик СИТ на воздействие в виде δ -функции

$$\delta = \left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \infty, \quad t = 0; \\ 0, \quad t \neq 0, \end{array} \right\} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Необходимо отметить, что δ -функция физически нереализуема, т.к. невозможно получить на практике импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды. Поэтому на практике его заменяют импульсом малой длительности единичной площади.

Переходная характеристика по ГОСТу представляет собой отклик СИТ на единичную функцию

$$1(t) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad t \geq 0; \\ 0, \quad t < 0. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Поскольку для линейных СИТ, справедлив принцип суперпозиции, и $\delta(t) = 1'(t)$, то

$$g(t) = h'(t). \quad (4.4)$$

Передаточной функцией называется преобразование Лапласа импульсной характеристики, т.е.

$$H(S) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-tS} dt. \quad (4.5)$$

Комплексным коэффициентом преобразования называется преобразование Фурье импульсной характеристики

$$K(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (4.6)$$

где ω - круговая частота.

Из сравнения выражений (4.5) и (4.6) видна взаимосвязь $H(S)$ и $K(j\omega)$. Выражение для передаточной функции легко получить из выражения для комплексного коэффициента преобразования в результате формальной замены ($j\omega$) оператором Лапласа S и наоборот.

Комплексный коэффициент преобразования можно представить как в алгебраической

$$K(j\omega) = \text{Re}[K(j\omega)] + j \text{Im}[K(j\omega)], \quad (4.7)$$

так и в показательной форме

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}, \quad (4.8)$$

где $|K(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2[K(j\omega)] + \text{Im}^2[K(j\omega)]}$ - амплитудно-частотная характеристика;

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}[K(j\omega)]}{\text{Re}[K(j\omega)]} - \text{фазо-частотная характеристика.}$$

Для минимально-фазовых СИТ АЧХ и ФЧХ связаны друг с другом парой преобразований Гильберта

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\omega^*) = \frac{2\omega^*}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K(\omega)}{\omega^2 - \omega^{*2}} d\omega; \\ K(\omega^*) = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \varphi(\omega)}{\omega^2 - \omega^{*2}} d\omega; \\ \text{где } K(\omega^*) = \ln K(\omega). \end{array} \right\} \quad (4.9)$$

Дифференциальное уравнение определяет зависимость между производными входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигнала СИТ:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i Y(t)}{\partial t^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{\partial^i X(t)}{\partial t^i}. \quad (4.10)$$

Заменяя оператор $\partial/\partial t$ в этом выражении на оператор Лапласа S или $j\omega$, можно получить выражение для передаточной функции СИТ

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i S^i}{\sum_{i=0}^n a_i S^i}, \quad (4.11)$$

или комплексного коэффициента преобразования

$$K(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i(j\omega)^i}{\sum_{i=0}^n a_i(j\omega)^i}. \quad (4.12)$$

Методы определения ДХ разделяются на аналитические и экспериментальные. Обе группы методов имеют свои достоинства, недостатки и области применимости.

Аналитические методы основаны на анализе физических процессов, протекающих в СИТ. Их достоинством является возможность установления взаимосвязи между конструктивными параметрами СИТ и параметрами его ДХ и их структурой. Указанное свойство дает возможность создавать СИТ с заданными ДХ, формулировать требования к элементам СИТ, обеспечивающие необходимую стабильность и повторяемость его ДХ от образца к образцу. Для реализации аналитических методов необходимо знать конструкцию СИТ, принцип его работы, физику протекающих в нем процессов преобразования одного вида энергии в другие. Должны быть также известны технология изготовления, точные геометрические размеры и физические свойства примененных в СИТ деталей и компонентов.

Методика аналитического определения ДХ включает в себя следующие операции.

1. Выбор модели СИТ, отражающей физические принципы его работы. При реализации этой операции осуществляется компромисс между наиболее точным приближением модели к реальному СИТ и простотой формализации протекающих в нем процессов или, другими словами, между точностью определения аналитической ДХ и обзорностью результатов исследования, а также трудоемкостью их достижения.

2. Математическое описание физических процессов преобразования энергии в СИТ. Запись исходных уравнений и соответствующих граничных и начальных условий.

3. Выбор метода решения поставленной математической задачи и его осуществление. Конечным результатом этой операции является математическое выражение для аналитической ДХ.

4. Расчет ДХ с использованием конструктивных и физических параметров СИТ.

5. Сравнение аналитической ДХ с экспериментальной. Проверка адекватности выбранной модели реальному СИТ. В результате может появиться возможность упрощения исходной модели или необходимость её усложнения.

6. Аппроксимация полученных аналитических ДХ простыми математическими выражениями, для облегчения расчета остальных полных ДХ, динамических погрешностей СИТ и его основных МХ.

Недостатком аналитических методов определения ДХ является большая их трудоемкость и низкая точность, обусловленная неточностью выбора модели, погрешностью определения параметров применяемых материалов и их изменением во времени и в зависимости от технологии изготовления.

Наиболее доступными и надежными методами определения ДХ являются экспериментальные методы. Экспериментальные методы основаны на анализе выходного сигнала СИТ при воздействии на его вход известным тестовым сигналом.

Методика определения экспериментальных ДХ включает в себя следующие операции:

- 1) воспроизведение испытательного сигнала;
- 2) регистрацию значений выходного сигнала исследуемого СИТ, зачастую в дискретных временных точках;
- 3) обработку данных (испытательного и выходного сигналов) с целью определения требуемой характеристики и оценивания погрешности её определения;
- 4) формализацию эмпирических ДХ (аппроксимацию полученных экспериментальных ДХ математическими выражениями);
- 5) идентификацию эмпирических ДХ (определение числовых параметров математических моделей, выражений ДХ).

Экспериментальные методы определения ДХ делятся на прямые и косвенные.

Прямые методы подразумевают измерение ДХ в соответствии с их определением – при подаче на вход СИТ характеристического воздействия. Таковыми для импульсной характеристики является дельта-импульс, для переходной – единичный скачок и для частотных – синусоидальные изменения информативного параметра.

Косвенные методы предусматривают пересчет выходного сигнала СИТ в искомую характеристику при подаче на вход СИТ нехарактеристического детерминированного или случайного воздействия.

Прямые методы являются наиболее точными, поэтому косвенные методы применяются в случаях, когда по каким-либо причинам невозможно сформировать характеристическое воздействие, или прямой способ требует больших временных затрат.

4.2.5 Характеристики взаимодействия СИТ с объектом измерения на входе или выходе СИТ

Одним из важных процессов, влияющих на погрешность измерений, является взаимодействие между объектом измерения и соединенными с ним СИТ, а также между двумя (или более) последовательно соединенными СИТ. Потребление энергии (или мощности) СИТ от объекта измерения

или от предвключенного СИТ приводит к изменению значения величины, подлежащей измерению и появлению погрешности. Ранее этот вид погрешности был отнесен нами к методическим систематическим.

Необходимо отметить, что это явление имеет отношение не только к электрическим величинам, но и для многих СИТ других ФВ. Например, измерение температуры с помощью термопары, которая отбирает от объекта тепло, измерение размеров деформирующихся тел и т.д. Методика оценивания погрешностей, обусловленных взаимодействием СИТ с объектом измерения по входу или по выходу рассмотрена в пп. 4.5.3.

4.2.6 Неинформативные параметры выходного сигнала СИТ

Эти параметры не содержат непосредственной информации о значениях измеряемой величины. Однако они определяют возможность нормальной работы СИТ и других устройств, подключаемых к выходу данного СИТ и их отклонение от номинального значения может быть источником погрешности измерения информативного параметра.

Пример неинформативных параметров: форма и амплитуда импульсов выходного сигнала СИТ, информация об измеряемой величине которого заключена в частоте импульсов, или наоборот, частота выходного сигнала СИТ, информативным параметром которого является изменение амплитуды.

4.3 Основные методы измерений

В основу работы любого СИТ положен тот или иной метод измерения. Под *методом измерения* понимают последовательность операций с использованием СИТ для получения результата измерения. Методы измерения очень разнообразны. В общем, различают методы непосредственной оценки и методы сравнения с мерой, понимая при этом отсутствие или наличие меры измеряемой ФВ в составе СИТ. Эти названия некорректны, так как наводят на мысль о возможности измерения без сравнения. На самом деле в методах непосредственной оценки осуществляется опосредованное сравнение измеряемой ФВ с мерой, производимое ранее на этапе градуировки СИТ. Основными разновидностями методов сравнения с мерой являются метод сопоставления, совпадения, замещения, дифференциальный и нулевой (рис. 4.2).

4.3.1 Метод сопоставления

Метод сопоставления заключается в том, что значение измеряемой величины $X_{изм}$ определяется с помощью многозначной меры по совокупности n однозначных мер X_m , входящих в отсчитываемое значение

измеряемой величины. Примером может служить метод дискретного счета, применяемый при измерении временных интервалов.

Таким образом, в метод сопоставления входит квантование измеряемой величины. При этом уравнение измерения имеет вид

$$X_{изм} = nX_m, \quad (4.13)$$

а общая погрешность измерения определяется выражением

$$\Delta X_{изм} = \Delta_n X_m + n\Delta X_m, \quad (4.14)$$

где Δ_n - погрешность отчета (квантования),

ΔX_m - погрешность воспроизведения меры.

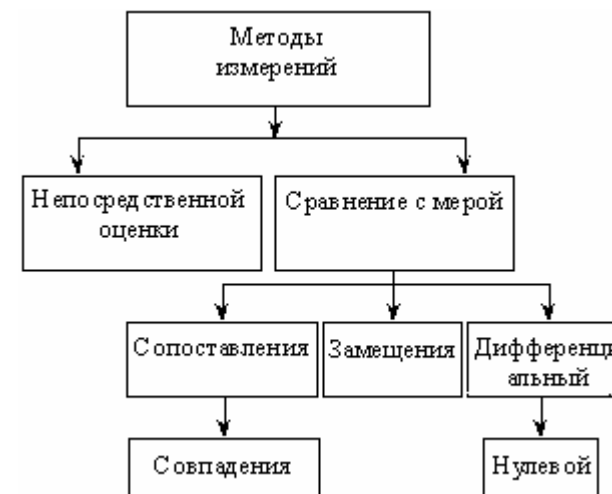


Рисунок 4.2 - Методы измерений

Погрешность квантования является методической погрешностью, поскольку predetermined изначально и подробно рассмотрена ниже. В методе сопоставления уменьшение погрешности квантования возможно лишь путем уменьшения размера меры (шага квантования). Абсолютная погрешность воспроизведения меры накапливается пропорционально увеличению $X_{изм}$.

4.3.2 Метод совпадения

Развитием метода сопоставления является *метод совпадения*, уменьшающий погрешность отсчета в заданное число k раз без уменьшения в k раз размера меры. Повышение точности достигается путем применения

двух многозначных мер (шкал или периодических сигналов) с различными, близкими по значению, размерами однозначных мер X_m и X_m^* . При этом осуществляется измерение погрешности квантования $\Delta_k = X - nX_m$ с помощью совпадения отметок этих шкал. Реализацией метода совпадения является нониусная шкала штангенциркуля (рис. 4.3).

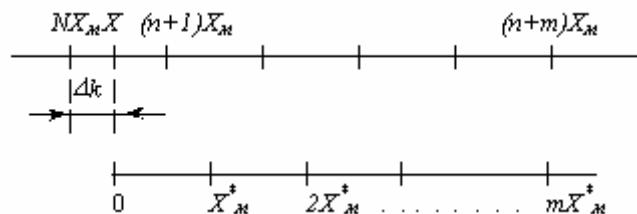


Рисунок 4.3 - Нониусная шкала, реализующая метод совпадения

Если шаг квантования условно разбить на k интервалов и выразить погрешность квантования через их целое число $\Delta_k = m \frac{X_m}{k}$, то уточненный результат измерения будет равен

$$X_{изм} = nX_m + m \frac{X_m}{k}, \quad (4.15)$$

где n – целое число делений основной шкалы.

Если мы хотим, чтобы число m непосредственно отсчитывалось по дополнительной шкале, т.е. было равно числу отметок дополнительной шкалы от нулевой до совпадающей с $(n+m)$ -й отметкой основной шкалы, то должно выполняться условие

$$mX_m^* = mX_m - \Delta_k = mX_m - m \frac{X_m}{k},$$

откуда
$$X_m^* = X_m (1 - 1/k). \quad (4.16)$$

Выразив отсюда $k = X_m / (X_m - X_m^*)$ можно записать уравнение измерения (4.15) в виде

$$X_{изм} = nX_m + m(X_m - X_m^*). \quad (4.17)$$

Отсюда погрешность метода совпадения будет равна

$$\Delta X_{изм} = n\Delta X_m + m(\Delta X_m - \Delta X_m^*) + \Delta_m (X_m - X_m^*),$$

где $\Delta X_m, \Delta X_m^*$ – погрешности воспроизведения шкал,

Δ_m – погрешность квантования с шагом $(X_m - X_m^*)$.

В полученном выражении первое слагаемое равно погрешности воспроизведения меры в методе сопоставления, второе слагаемое – пренебрежимо мало при равных знаках ΔX_m и ΔX_m^* , а максимальное значение третьего слагаемого на порядок меньше аналогичной погрешности квантования в методе сопоставления.

Обычно для удобства отсчета k выбирают кратным 10. Для $k = 10$ $X_m^* = 0,9X_m$.

4.3.3 Метод замещения

Метод замещения заключается в том, что величину, измеряемую с помощью прибора прямого действия, замещают известной величиной, воспроизводимой мерой и вызывающей аналогичные показания измерительного прибора. Уравнение измерения $X_{изм} = X_m$, погрешность измерения $\Delta X_{изм} = \Delta X_m + 2\Delta X_{отсч}$, где ΔX_m – погрешность воспроизведения меры; $\Delta X_{отсч}$ – погрешность отсчета показаний по шкале прибора прямого действия.

Последняя погрешность удваивается, поскольку отсчет по прибору необходимо производить дважды: при измерении $X_{изм}$ и при его замещении X_m .

Метод замещения широко применяется во всех отраслях измерительной техники, например, при измерении мощности СВЧ калориметрическим методом. В этом случае в калориметрической нагрузке поочередно рассеивают измеряемую мощность СВЧ и известную мощность постоянного тока. Одинаковая степень нагрева нагрузки контролируется с помощью измерителя температуры.

Достоинством метода замещения является возможность применения для отсчета неградуированного СИТ, которое играет роль компаратора, поскольку измеренное значение отсчитывается по значению меры. Также устраняется воздействие на результат измерения изменение влияющих факторов (температуры, влажности, напряжения питающей сети и др.). Однако, при реализации метода замещения, должна быть хорошо продумана и доказана эквивалентность замещения, т.к. ее неэквивалентность зачастую является источником доминирующей погрешности.

4.3.4 Дифференциальный метод

Этот метод заключается в том, что на измерительный прибор прямого действия воздействуют разностью между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой (рис. 4.4). Такой метод позволяет рас-

ширить рабочий диапазон СИТ и уменьшить погрешность измерения. Примером может служить измерение частоты цифровым частотомером с гетеродинным переносчиком частоты. Другой, более распространенный пример – измерение массы тела с помощью рычажных весов с отсчетной шкалой. Если масса тела превышает конечное значение шкалы, то на другую чашу весов кладут дополнительную гирию, а по шкале отсчитывают разность между массой тела и массой гири.

Уравнение измерения

$$X_{изм} = X_m + X_{np}, \quad (4.18)$$

где X_{np} - значение, отсчитываемое по шкале прямого действия.

Абсолютная погрешность метода увеличивается на значение погрешности меры

$$\Delta X_{изм} = \Delta X_m + \Delta X_{np},$$

однако, относительная погрешность при $X_m \gg X_{np}$ существенно уменьшается.

Действительно,

$$\delta X_{изм} = \frac{\Delta X_{изм}}{X_{изм}} = \frac{\Delta X_m + \Delta X_{np}}{X_m + X_{np}} = \frac{\Delta X_m}{X_m + X_{np}} + \frac{\Delta X_{np}}{X_m + X_{np}} =$$

$$\frac{\delta_m}{1 + \frac{X_{np}}{X_m}} + \frac{\delta_{np}}{1 + \frac{X_m}{X_{np}}} = \delta_m + \frac{\delta_{np} X_{np}}{X_m}, \quad (4.19)$$

где $\delta_m = \frac{\Delta X_m}{X_m}$, $\delta_{np} = \frac{\Delta X_{np}}{X_{np}}$ - относительная погрешность воспроиз-

ведения меры и отсчета по шкале прибора.

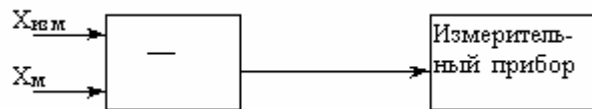


Рисунок 4.4 - Схема реализации дифференциального метода

То есть, при увеличении соотношения X_m / X_{np} погрешностью δ_{np} можно пренебречь.

4.3.4 Нулевой метод

Этот метод является развитием дифференциального метода. В отличие от последнего результирующий эффект от одновременного воздействия измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой на устройство сравнения (компаратора) доводят до нуля. В этом случае за счет применения высокочувствительного нуля-индикатора повышается точность измерения по сравнению с дифференциальным методом, поскольку выражение для погрешности (4.19) практически трансформируется в выражение

$$\delta X_{изм} \approx \delta_m.$$

Нулевым методом измеряют сопротивления резисторов, емкости конденсаторов, индуктивности катушек с помощью одинарных и двойных мостов постоянного и переменного тока.

Перечисленные методы могут встречаться на практике как непосредственно, так и в виде их модификаций. В различных сочетаниях эти методы лежат в основе функционирования современных СИТ, позволяющих производить автоматическую коррекцию погрешности.

4.4 Обобщенные структурные схемы СИТ

Современные СИТ состоят из совокупности ИУ и СИ, соединенных в различных сочетаниях с целью реализации того или иного метода измерения. Соединение этих звеньев в определенную цепь преобразований носит название *структурной схемы*. Структурные схемы очень разнообразны. Однако все они соответствуют двум основным видам структурных схем: прямого и уравнивающего преобразования.

4.4.1 Схема прямого преобразования

По этой схеме построены многие СИТ. Отличительная особенность этой схемы состоит в том, что преобразование измерительного сигнала производится в прямом направлении (рис. 4.5).

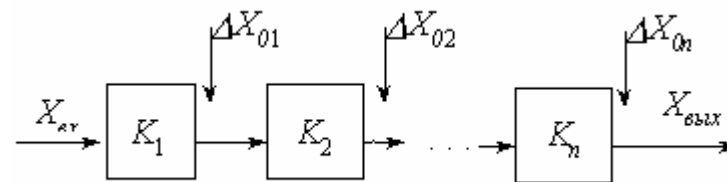


Рисунок 4.5 - Структурная схема прямого преобразования.

Если коэффициенты преобразования отдельных звеньев равны K_1, K_2, \dots, K_n , то общий коэффициент преобразования будет равен

$$K = \prod_{i=1}^n K_i \quad (4.20)$$

и уравнение всего измерительного преобразования имеет вид

$$X_{\text{вых}} = X_{\text{вх}} \cdot K. \quad (4.21)$$

На работу измерительного прибора будут оказывать влияние нестабильность коэффициентов преобразования ΔK_i , а также дрейф нуля, погрешности и наводки ΔX_{0i} .

Оценим влияние этих погрешностей на результирующую погрешность СИТ.

Абсолютная погрешность измерения выходной величины $\Delta X_{\text{вых}}$, обусловленная нестабильностью коэффициентов преобразования, может быть получена суммированием частных производных выражения (4.21), умноженных на соответствующие нестабильности ΔK_i

$$\Delta X_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_{\text{вых}}}{\partial K_i} \Delta K_i.$$

Отсюда можно найти относительную погрешность преобразования

$$\delta X_{\text{вых}} = \frac{\Delta X_{\text{вых}}}{X_{\text{вых}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{K_i} = \sum_{i=1}^n \delta K_i,$$

т.е. результирующая погрешность равна сумме относительных погрешностей преобразования.

Оценим теперь погрешность, обусловленную дрейфом нуля и наводками. Очевидно, она будет равна

$$\Delta X_{0\text{вых}} = \Delta X_{01} K_2 K_3 \dots K_n + \Delta X_{02} K_3 \dots K_n + \dots + \Delta X_{0n},$$

таким образом, погрешность, вносимая первым преобразователем, умножается на все последующие коэффициенты преобразования. Поэтому именно к первичному преобразователю при проектировании СИТ предъявляются наиболее жесткие требования по точности и стабильности. Для достижения высокой стабильности всего СИТ требуется высокая стабильность всех входящих в него звеньев.

4.4.2 Структурная схема уравновешенного преобразования

Особенность схемы (рис. 4.6) состоит в том, что выходная величина $X_{\text{вых}}$ подвергается обратному преобразованию в величину X_y , однородную с входной величиной $X_{\text{вх}}$ и почти полностью уравновешивает её, в результате чего на вход цепи прямого преобразования поступает только

небольшая часть ΔX преобразуемой величины $X_{\text{вх}}$. Другими словами, используется отрицательная обратная связь.

Возможны два режима работы схемы: режим неполного уравновешивания и режим полного уравновешивания.

1. Режим неполного уравновешивания.

В этом режиме входная $X_{\text{вх}}$ и уравновешивающая X_y величины образуют разность $\Delta X = X_{\text{вх}} - X_y$.

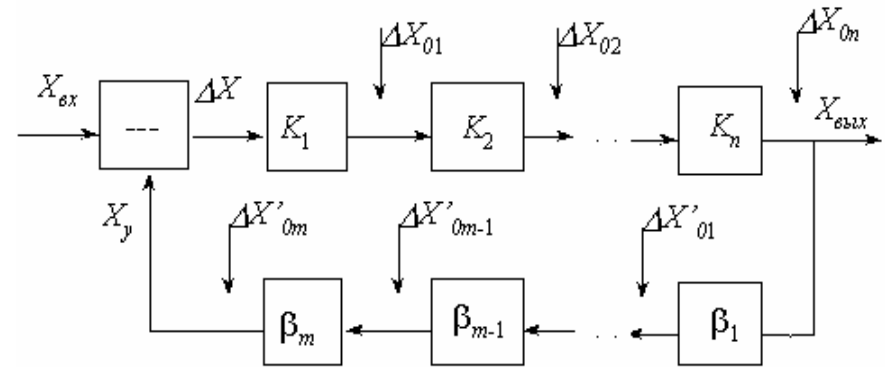


Рисунок 4.6 - Структурная схема уравновешиваемого преобразования с неполным уравновешиванием

Уравнение цепей прямого и обратного преобразования будут иметь вид, соответственно $X_{\text{вых}} = K \Delta X$ и $X_y = \beta X_{\text{вых}}$, где $K = K_1 \dots K_n$;

$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \dots \beta_m$. Отсюда имеем

$$X_{\text{вых}} = \Delta X K = (X_{\text{вх}} - X_y) K = (X_{\text{вх}} - \beta X_{\text{вых}}) K. \quad (4.22)$$

Производя перегруппировку, получаем $K X_{\text{вх}} = X_{\text{вых}} (1 + \beta K)$ или

$$X_{\text{вых}} = K X_{\text{вх}} / (1 + \beta K). \quad (4.23)$$

Коэффициент преобразования уравновешивающего СИ будет равен

$$K_y = X_{\text{вых}} / X_{\text{вх}} = K / (1 + \beta K). \quad (4.24)$$

При $\beta K \gg 1$ $K_y \approx 1/\beta$, т.е. цепь прямого преобразования слабо влияет на работу прибора, однако его чувствительность падает в $(1 + \beta K)$ раз.

Определим относительную погрешность, обусловленную нестабильностью коэффициентов преобразования K и β для этой схемы. Для этого продифференцируем выражение (4.23) по K и β

$$\Delta X_{\text{вых}} = \frac{\partial X_{\text{вых}}}{\partial K} \Delta K + \frac{\partial X_{\text{вых}}}{\partial \beta} \Delta \beta \quad (4.25)$$

и деля его на $X_{\text{вых}}$, получаем

$$\begin{aligned} \delta X_{\text{вых}} &= \frac{\Delta X_{\text{вых}}}{X_{\text{вых}}} = \frac{X_{\text{вх}}(1 + \beta K - \beta K)(1 + \beta K)}{(1 + \beta K)^2 K X_{\text{вх}}} dK - \\ & - \frac{K X_{\text{вх}}(1 + \beta K) K}{(1 + \beta K)^2 K X_{\text{вх}}} d\beta = \frac{\delta K}{1 + \beta K} - \frac{\beta K \delta \beta}{1 + \beta K}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, относительная погрешность состоит из суммы двух членов, один из которых пропорционален суммарной погрешности всех преобразователей цепи прямого преобразования, а другой – суммарной погрешности преобразования цепи обратной связи. Причем погрешность от нестабильности цепи K уменьшается в $(1 + \beta K)$ раз, а погрешность, обусловленная нестабильностью цепи обратной связи, почти полностью входит в суммарную погрешность. Действительно, при $\beta K \gg 1$ $\delta X_{\text{вых}} \approx -\delta \beta$. Следовательно, в прямой цепи можно использовать нестабильные преобразователи, необходимо только, чтобы $\beta K \gg 1$ и коэффициент обратного преобразования имел высокую стабильность. Необходимо учитывать, что введением обратного преобразования в $(1 + \beta K)$ раз уменьшается чувствительность измерительного устройства. Для её сохранения коэффициент K нужно увеличить в $(1 + \beta K)$ раз. При этом могут возникнуть условия для самовозбуждения СИТ. Поэтому предел увеличения K определяется динамической устойчивостью прибора.

Необходимо отметить, что нелинейность функции прямого преобразования можно рассматривать как изменение коэффициента преобразования K относительно номинального значения.

Это изменение может быть вызвано и другими причинами: вариацией параметров окружающей среды (температуры, давления, влажности), инерционностью звеньев, механическими воздействиями (вибрацией, тряской) и т.п. Введение обратного преобразования одинаково уменьшает влияние всех вышеперечисленных причин.

Оценим погрешность, обусловленную дрейфом нуля, наводками и т.п. Для этого введем в схему дополнительные сигналы $\Delta X_{01}, \dots, \Delta X_{0n}$; $\Delta X'_{01}, \dots, \Delta X'_{0m}$. Приводя эти сигналы к входу схемы, получаем

$$\begin{aligned} \Delta X_0 &= \left(\frac{\Delta X_{01}}{K_1} + \frac{\Delta X_{02}}{K_1 K_2} + \dots + \frac{\Delta X_{0n}}{K_1 \dots K_n} \right) + \\ & + \left(\beta_2 \beta_3 \dots \beta_m \Delta X'_{01} + \beta_3 \beta_4 \dots \beta_m \Delta X'_{02} + \dots + \Delta X'_{0m} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из этого выражения видно, что аддитивная погрешность не зависит от глубины обратной связи и не может быть уменьшена по абсолютной величине введением схемы уравнивающего преобразования.

Наибольшее требование по минимальному дрейфу нуля предъявляется к первому прямому и первому обратному преобразователю.

2. Режим полного уравнивания.

В этом режиме работают так называемые астатические приборы. При полном уравнивании $\Delta X = 0$. Это возможно, если в цепи прямого преобразования имеется интегрирующее звено с передаточной функцией

$$H_u(s) = \frac{1}{s}$$

(рис. 4.7) или производится ручное уравнивание схемы. В этом случае выражение для коэффициента преобразования СИТ можно записать

$$K_y(s) = \frac{K/s}{1 + \frac{\beta K}{s}} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\frac{s}{\beta K} + 1} \right). \quad (4.28)$$

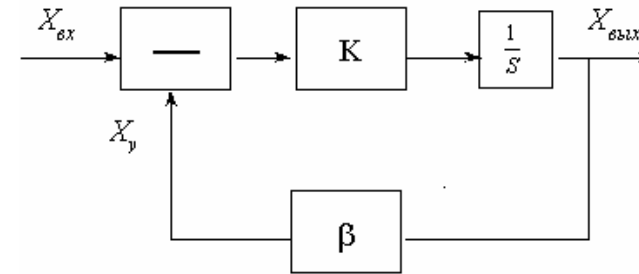


Рисунок 4.7 - Структурная схема уравниваемого преобразования с полным уравниванием

Анализируя это выражение, видим, что СИТ в этом случае представляет собой последовательное соединение пропорционального звена с коэффициентом передачи $1/\beta$ и апериодического звена с постоянной времени $1/\beta K$. Статический коэффициент преобразования такого СИТ равен $1/\beta$.

В такой цепи нестабильность звеньев прямого преобразования не оказывает влияния на погрешность СИТ. Погрешность, обусловленная

дрейфом нуля, наводками и т.п., аналогична погрешности СИТ с неполным уравновешиванием.

СИТ могут иметь также комбинированные структуры, т.е. схемы, содержащие цепь прямого преобразования, ряд звеньев которого охвачены отрицательной обратной связью.

4.5 Погрешности СИТ

СИТ чрезвычайно разнообразны, но в связи с их общим назначением имеют общую теоретическую основу – теорию погрешностей. В основе применения этой теории лежит сопоставление МХ СИТ с их условиями эксплуатации. При этом под условиями эксплуатации необходимо понимать не только параметры окружающей среды, но и параметры измеряемого сигнала, характеристики объекта измерения. Ниже будут рассмотрены наиболее характерные погрешности СИТ – погрешности квантования, динамические погрешности, погрешности, обусловленные взаимодействием СИТ с объектом измерения на его входе или выходе.

4.5.1 Погрешности квантования

В метрологической практике широкое распространение получили цифровые СИТ, т.е. такие измерительные приборы и ИП, в которых по принципу действия осуществляется квантование измеряемой величины по уровню. В процессе квантования происходит измерительное преобразование непрерывно изменяющейся величины X в ступенчато изменяющуюся величину $X_N = N \cdot q$ с заданными размерами ступеней q (рис. 4.8). При этом бесконечному множеству возможных значений величин X ставится в соответствие конечное и счетное множество возможных показаний или выходных кодов цифрового устройства N .

Квантованию, как измерительному преобразованию, присуща методическая погрешность, возникающая при отображении непрерывной по размеру величины X ограниченным по числу разрядов числом N . Погрешность квантования равна разности между результатами измерения и истинным значением величины X (рис. 4.8)

$$\Delta_k = X_N - X, \quad (4.29)$$

если погрешность меры и компаратора равны нулю. Таким образом, как следует из (4.29), зависимость погрешности квантования Δ_k от измеряемой величины X линейна в пределах шага квантования q .

В цифровых СИТ измеряемая величина X , находящаяся между двумя уровнями квантования X_N и X_{N+1} , как правило, отражена нижним числовым значением N . В этом случае погрешность квантования Δ_k все-

гда отрицательна, а ее максимальное (по модулю) значение равно шагу квантования q (рис.4.8).

Погрешность квантования Δ_k по характеру изменения может быть систематической постоянной по значению (при $X = const$) и случайной (при $X = var$ по случайному закону). В последнем случае закон изменения Δ_k аналогичен закону изменения измеряемой величины X . При равномерном законе изменения величины X погрешность квантования распределена по равномерному закону с математическим ожиданием $M\left(\overset{\circ}{\Delta}_k\right) = \frac{q}{2}$; СКО $\sigma\left(\overset{\circ}{\Delta}_k\right) = q/\sqrt{12}$. Характер изменения погрешности Δ_k предполагает и способы ее уменьшения.

Если измеряемая величина постоянна по размеру, то погрешность Δ_k также является постоянной величиной и может быть определена с помощью более высокочувствительного прибора или (при отсутствии такового) наложением случайного сигнала с последующей статистической обработкой ряда измерений. Для реализации второго способа на вход цифрового измерительного прибора (ЦИП) необходимо подать дополнительный случайный центрированный сигнал $\overset{\circ}{\Delta}_\delta$ с известным законом распределения $F\left(\overset{\circ}{\Delta}_\delta\right)$. На входе ЦИП образуется суммарный случайный сигнал $\overset{\circ}{X} = X_{изм} + \overset{\circ}{\Delta}_\delta$ (рис. 4.9).

При $\overset{\circ}{\Delta}_\delta = 0$ ЦИП при повторных измерениях выдает неизменный результат $X_N = qN$, содержащий погрешность Δ_k . Когда $\overset{\circ}{\Delta}_\delta \neq 0$, ЦИП выдает различные результаты измерения $N, (N+1)q, (N-1)q$ и т.д. Для определения Δ_k эти результаты подвергаются статистической обработке.

Обработка может заключаться в определении среднего значения ряда n измерений X_{cp} , которое будет приближаться к значению $X_{изм}$ с СКО $\sigma\left(\overset{\circ}{\Delta}_\delta\right)/\sqrt{n}$. В этом случае погрешность квантования определяют по формуле

$$\Delta_k = X_N - X_{cp} = N \cdot q - X_{cp}. \quad (4.30)$$

Однако среднее значение ряда показаний ЦИП становится несмещенной оценкой математического ожидания измеряемой величины только

при больших по сравнению со ступенью квантования изменениях измеряемой величины (или СКО дополнительного сигнала).

При известном распределении дополнительного случайного сигнала с известным $\sigma(\Delta_{\delta})$ определяют вероятность $P = n_1/n$, соответствующую

факту $\overset{\circ}{X} < Nq$, где n - общее число измерений $\overset{\circ}{X}$; n_1 - число измерений, при которых $\overset{\circ}{X}$ было меньше $X_N = Nq$ (рис.4.9).

Эта вероятность, очевидно, будет равна

$$P(\overset{\circ}{X} < Nq) = P(X_{изм} + \Delta_{\delta} < X_N) = P(\Delta_{\delta} < \Delta_k) = F_{\delta}(\Delta_k), \quad (4.31)$$

где $F_{\delta}(\Delta_k)$ - значение интегральной функции распределения дополнительного сигнала $\overset{\circ}{\Delta}_{\delta}$ в точке Δ_k .

Таким образом, имея аналитическое выражение для интегральной функции распределения F_{δ} дополнительного сигнала $\overset{\circ}{\Delta}_{\delta}$, можно для

$$F_{\delta}(\Delta_k) = \frac{n_1}{n} \text{ определить значение } \Delta_k = F_{\delta}^{-1}\left(\frac{n_1}{n}\right).$$

Так для *равномерного закона* $\overset{\circ}{\Delta}_{\delta}$ с предельным отклонением $\pm\Delta X_{\delta}$, аналитическое выражение для определения погрешности квантования будет иметь вид

$$\Delta_k = \Delta X_{\delta} \left(2 \frac{n_1}{n} - 1\right). \quad (4.32)$$

В случае нормального закона распределения $\overset{\circ}{\Delta}_{\delta}$ с известным среднеквадратическим отклонением $\sigma(\overset{\circ}{\Delta}_{\delta})$ погрешность Δ_k определяется по формуле

$$\Delta_k = Z \cdot \sigma(\overset{\circ}{\Delta}_{\delta}), \quad (4.33)$$

где Z - аргумент нормированного нормального распределения $F_n(Z)$

при $F_n(Z) = \frac{n_1}{n}$.

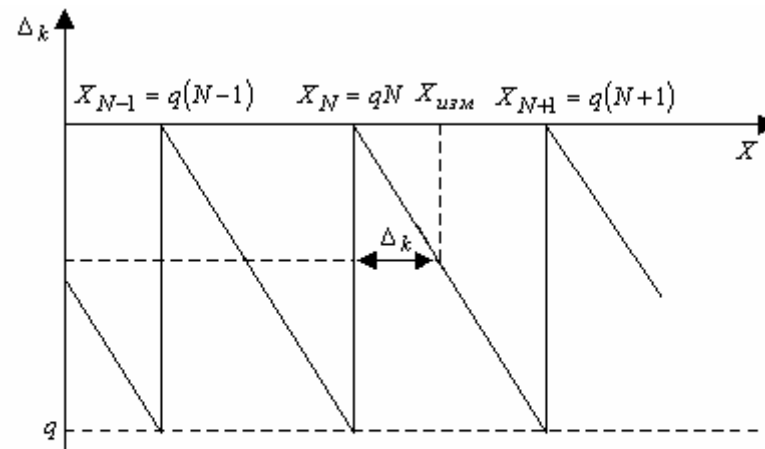


Рисунок 4.8 – Погрешность квантования

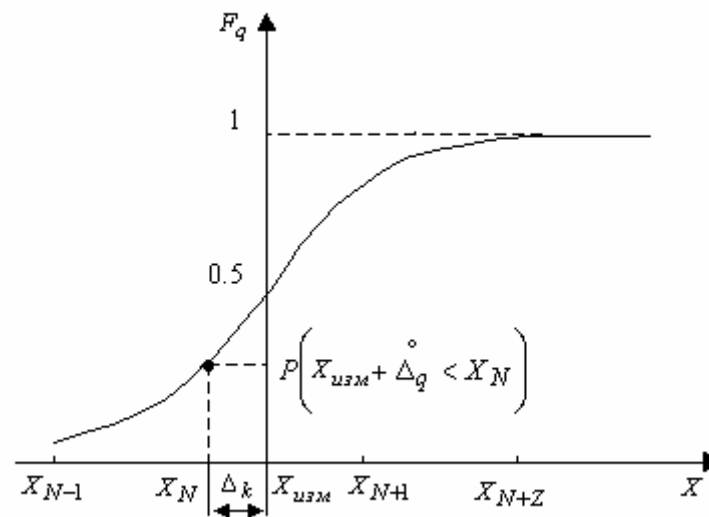


Рисунок 4.9 – Статистический метод определения погрешности квантования

На практике удобно формировать дополнительный входной сигнал Δ_{\circ} в виде синусоидально - изменяющегося воздействия с известным значением среднеквадратического отклонения σ . В этом случае погрешность Δ_k можно определить по формуле

$$\Delta_k = \sqrt{2}\sigma \sin \pi \left(\frac{n_1}{n} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.34)$$

Погрешность определения Δ_k статистическим способом, зависит от количества измерений и отношения $\sigma \left(\Delta_{\circ} \right)$ к шагу квантования q . Определив значение погрешности квантования Δ_k , можно уточнить результат измерения, введя в него поправку, по формуле

$$X = X_N - \Delta_k, \quad (4.35)$$

вытекающей из выражения (4.29).

4.5.2 Динамические погрешности

СИТ могут эксплуатироваться не только в статическом режиме, когда измеряемая величина постоянная, но и в динамическом, когда измеряемая величина изменяется во времени. В последнем случае могут возникать следующие составляющие динамические погрешности: *погрешность измерительного преобразования* (обусловленная инерционными свойствами СИТ) и *погрешность измерения с регистрацией* (обусловленная дискретизацией изменяющейся величины во времени). Эти составляющие могут сопутствовать друг другу, однако и в этом случае их вклад в суммарную погрешность можно рассматривать отдельно.

Погрешность измерительного преобразования.

При измерительном преобразовании источником динамической погрешности является инерционность измерительного преобразователя. Значение динамической погрешности в этом случае будет зависеть не только от ДХ ИП, но и от формы входного сигнала. Оценка этой составляющей погрешности весьма сложна, поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда ИП моделируется аperiodическим звеном первого порядка. В этом случае дифференциальное уравнение ИП имеет вид

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t), \quad (4.36)$$

где $y(t)$, $x(t)$ - выходной и входной сигналы ИП;
 τ - постоянная времени;

K - статический коэффициент преобразования.

Погрешность измерения $x(t)$, приведенная к максимальному значению входного сигнала x_{\max} будет равна

$$\delta(t) = \frac{y(t) - Kx(t)}{Kx_{\max}} = -\frac{\tau}{Kx_{\max}} \frac{dy(t)}{dt}. \quad (4.37)$$

Так как скорость изменения выходного сигнала линейного инерционного ИП не может быть больше скорости изменения его входного сигнала, то максимальное значение $\delta(t)$ можно найти из выражения

$$\delta_{\max} = -\frac{\tau}{x_{\max}} \left[\frac{\partial x(t)}{\partial t} \right]_{\max}. \quad (4.38)$$

Для сигналов с финитным спектром известно неравенство Бернштейна, связывающее граничную частоту спектра f_{zp} с любой из его нормированных производных

$$f_{zp}^n \geq \frac{x_{\max}^n}{x_{\max}}. \quad (4.39)$$

Для $n = 1$

$$\delta_{\max} = -\tau f_{zp}. \quad (4.40)$$

Отсюда можно получить допустимую инерционность ИП при измерительном преобразовании сигнала

$$\tau = -\delta_{\max} / f_{zp}. \quad (4.41)$$

Так, для сигнала с граничной частотой спектра $f_{zp} = 1$ кГц и допустимой погрешностью $\delta_{\max} = 1\%$ постоянная времени не должна превышать 10^{-5} с.

Динамическая погрешность измерения с регистрацией измеряемой величины во времени.

Измерение с регистрацией изменений величины во времени наиболее характерная задача динамических измерений, при решении которой осуществляются совместные измерения интересующей величины и времени. Наиболее часто эту задачу решают путем дискретизации измеряемой величины во времени с последующим восстановлением промежуточных значений с помощью различных интерполяционных функций (рис. 4.10).

В этом случае погрешность измерения имеет три составляющих

$$\Delta x = \Delta x_{un} + \Delta x_m + \Delta x_u. \quad (4.42)$$

Здесь Δx_{un} - инструментальная погрешность непосредственного измерения значения $x(t)$ в точке t (имеет статическую и динамическую составляющую);

Δx_m - погрешность масштабирования появляющаяся из-за не-
точного измерения времени t ;

Δx_u - погрешность интерполяции, причиной которой является
неточность восстановления $x(t)$ по дискретным значениям.

Измеряемую величину представим в виде

$$x(t) = x f(t) \quad (4.43)$$

где x - значения $x(t)$ в точке t ;

$f(t)$ - нормированная в точке t функция измеряемой величины.

Дифференцируя (4.43) по уровню и времени, получаем

$$dx(t) = dx \cdot f(t) + x \cdot df(t) = x[\delta x_{un} + f'(t)dt],$$

где δx_{un} - инструментальная относительная погрешность измерения;

$f'(t)dt = \delta_m$ - относительная погрешность масштабирования.

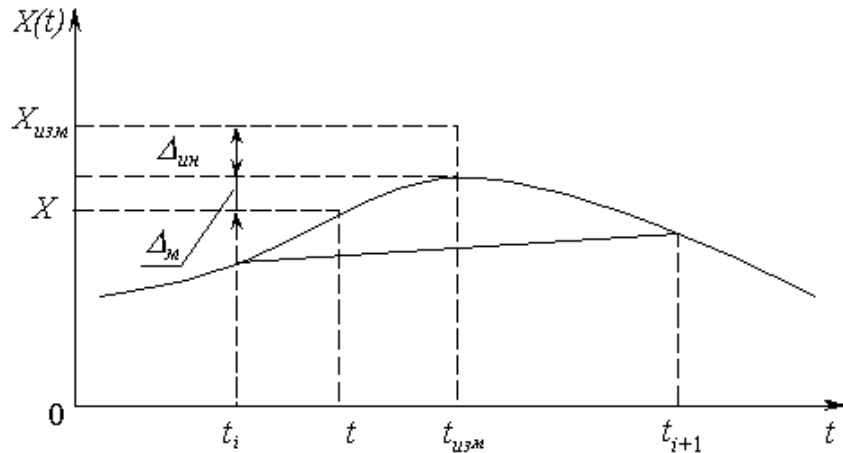


Рисунок 4.10 - Погрешность измерения с регистрацией

Последнюю составляющую можно представить в виде

$$\delta_m = t \cdot \delta t \cdot f'(t), \quad (4.44)$$

где δt - относительная погрешность измерения времени.

Из (4.44) видно, что погрешность масштабирования пропорциональна
времени измерения, т.е. способна накапливаться во времени.

Для восстановления $x(t)$ наиболее часто используют *полином Ла-
гранжа* в общем случае степени n . В этом случае оценка $\bar{x}(t)$ измеряе-
мой величины $x(t)$ имеет вид

$$\bar{x}(t) = \sum_{j=0}^n x_j \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-t_k}{t_j-t_k}, \quad (4.45)$$

где t - заданная временная координата на интервале интерполяции $(t_0; t_n)$;
 x_j, t_j - координаты узлов интерполяции.

Оценка $\bar{x}(t)$ отличается от $x(t)$ на величину методической погреш-
ности интерполяции Δx_u , значение которой определяется остаточным
членом полинома

$$\Delta x_u = -\frac{x^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (t-t_j), \quad (4.46)$$

где $x^{(n+1)}(\tau)$ - $(n+1)$ -я производная измеряемой величины в некото-
рой точке τ интервала интерполяции. При малых погрешностях интерпо-
ляции можно считать, что $x^{(n+1)}(\tau) = const$ во всем интервале $(t_0; t_n)$.

Наиболее часто используют ступенчатую ($n=0$) и линейную ($n=1$) ин-
терполяции.

В случае *ступенчатой интерполяции* (при $n=0$) $x(t) = x(t_0)$, где t_0 -
временная точка дискретизации, предшествующая t , а погрешность интер-
поляции

$$\Delta x_{u_0} = -x'(t) \cdot (t-t_0), \quad (4.47)$$

Для *линейной интерполяции* (при $n=1$)

$$x(t) = x_0 \frac{t-t_1}{t_0-t_1} + x_1 \frac{t-t_0}{t_1-t_0};$$

$$\Delta x_{u_1} = -\frac{x''(t)}{2} (t-t_0)(t-t_1) = -\frac{x''(t)}{2} (t^2 - tt_0 - t_1t + t_0t_1).$$

Определим максимальное значение Δx_{u_1}

$$\Delta' x_{u_1} = -\frac{x''}{2} (2t - t_0 - t_1) = 0, \quad t = \frac{t_1 + t_0}{2}.$$

Отсюда

$$\Delta x_{u_1 \max} = -\frac{x''}{2} \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - t_0 \right) \left(\frac{t_1 + t_0}{2} - t_1 \right) = -\frac{x''}{2} \left(\frac{t_1 - t_0}{2} \right) \left(\frac{t_0 - t_1}{2} \right).$$

Для равномерной дискретизации

$$\Delta x_{u_1 \max} = \frac{x'' \Delta t^2}{8}, \quad (4.48)$$

где Δt - интервал дискретизации.

4.5.3 Погрешность, обусловленная взаимодействием СИТ с объектом на его входе и выходе

Эту погрешность будем исследовать на примере измерительного преобразователя напряжения, подключенного по входу к источнику \dot{E}_Γ с внутренним комплексным сопротивлением \dot{Z}_Γ и нагруженным на сопротивление нагрузки \dot{Z}_H . Сам ИП имеет входное сопротивление \dot{Z}_{ex} , а выходное - $\dot{Z}_{вых}$.

В этом случае значение напряжения на входе ИП будет равно

$$\dot{U}_{ex} = \dot{E}_\Gamma \frac{\dot{Z}_{ex}}{\dot{Z}_\Gamma + \dot{Z}_{ex}}. \quad (4.49)$$

Абсолютная погрешность измерения \dot{U}_{ex}

$$\Delta \dot{U}_{ex} = \dot{U}_{ex} - \dot{E}_\Gamma,$$

а относительная

$$\delta \dot{U}_{ex} = \frac{\Delta \dot{U}_{ex}}{\dot{U}_{ex}} = \frac{\dot{Z}_{ex} - \dot{Z}_\Gamma - \dot{Z}_{ex}}{\dot{Z}_\Gamma + \dot{Z}_{ex}} = -\frac{\dot{Z}_\Gamma}{\dot{Z}_\Gamma + \dot{Z}_{ex}}. \quad (4.50)$$

Из этого выражения легко получить амплитудную погрешность

$$|\delta \dot{U}_{ex}| = \sqrt{\text{Re}^2[\delta \dot{U}_{ex}] + \text{Im}^2[\delta \dot{U}_{ex}]},$$

и фазовую

$$\text{Arg} \delta \dot{U}_{ex} = \text{arctg} \frac{\text{Im}[\delta \dot{U}_{ex}]}{\text{Re}[\delta \dot{U}_{ex}]}.$$

Для чисто активных сопротивлений (на постоянном токе), имеем

$$\delta U_{ex} = -\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma + R_{bx}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_{ex}}{R_\Gamma}}. \quad (4.51)$$

Обычно $\frac{R_{ex}}{R_\Gamma} \gg 1$, поэтому $\delta U_{ex} \approx -\frac{R_\Gamma}{R_{ex}}$.

В выходной цепи можно записать аналогичные выражения путем замены $\dot{Z}_\Gamma \rightarrow \dot{Z}_{ex}; \dot{Z}_{ex} \rightarrow \dot{Z}_H$

$$\delta U_H \approx -\frac{R_{вых}}{R_H}. \quad (4.52)$$

Для СИТ неэлектрических величин выражения для погрешности аналогичны, с учетом замены входящих в них параметров на соответствующие неэлектрические.

4.6 Контрольные вопросы, задачи и упражнения

1. Что такое СИТ и как они различаются в зависимости от структурной схемы?
2. Чем отличаются СИТ в зависимости от роли, выполняемой ими в процессе измерений?
3. Перечислите классификацию СИТ в зависимости от роли, выполняемой ими в системе обеспечения единства измерений.
4. Перечислите основные принципы нормирования метрологических характеристик.
5. Перечислите основные группы нормируемых метрологических характеристик.
6. Что такое статическая характеристика преобразований, чувствительность и цена деления СИТ?
7. Чем отличаются абсолютная, относительная и приведенная погрешности?
8. Как определить погрешность измерения по классу точности СИТ?
9. Перечислите основные влияющие величины и дайте определение функции влияния.
10. Чем отличаются полные и частные динамические характеристики СИТ?
11. Дайте классификацию полных динамических характеристик.
12. В чем заключается методика аналитического определения динамических характеристик?
13. Какие операции включает в себя методика экспериментального определения динамических характеристик?
14. Как взаимодействие СИТ с объектом измерения влияет на результат измерения?
15. Приведите пример неинформативных параметров выходного сигнала СИТ.
16. Дайте классификацию основным методам измерения.
17. Выведите выражения для относительной погрешности измерения выходной величины СИТ прямого преобразования, обусловленной нестабильностью коэффициентов преобразования его звеньев.
18. Изобразите структурную схему СИТ уравнивающего преобразования и выведите выражения для его коэффициента преобразования в режимах неполного и полного уравнивания.
19. Выведите выражения для относительной погрешности измерения СИТ с неполным уравниванием, обусловленной нестабильностью коэффициентов прямого и обратного преобразования.

Приложение А

Статистические таблицы

Таблица А.1 – Функция Лапласа

F(z)	z	F(z)	z
0,01	0,0250	0,26	0,7033
0,02	0,0500	0,27	0,7356
0,03	0,0750	0,28	0,7688
0,04	0,1001	0,29	0,8028
0,05	0,1252	0,30	0,8378
0,06	0,1504	0,31	0,8739
0,07	0,1757	0,32	0,9111
0,08	0,2011	0,33	0,9496
0,09	0,2267	0,34	0,9896
0,10	0,2524	0,35	1,0313
0,11	0,2782	0,36	1,0748
0,12	0,3043	0,37	1,1205
0,13	0,3306	0,38	1,1687
0,14	0,3570	0,39	1,2197
0,15	0,3883	0,40	1,2741
0,16	0,4108	0,41	1,3327
0,17	0,4381	0,42	1,3961
0,18	0,4658	0,43	1,4658
0,19	0,4938	0,44	1,5434
0,20	0,5223	0,45	1,6316
0,21	0,5511	0,46	1,7348
0,22	0,5804	0,47	1,8606
0,23	0,6102	0,48	2,0255
0,24	0,6408	0,49	2,320
0,25	0,6716	0,50	∞

Таблица А.2 – Зависимость вероятности P₀ от λ в критерии Колмогорова

P ₀	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997	0.964	0.864
λ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

Таблица А.3 – Значения χ_0^2 для различных К и P₀ в критерии Пирсона

К	Заданная вероятность P ₀			
	0.90	0.95	0.99	0.999
3	6,215	7,815	11,345	16,27
4	7,779	9,489	13,277	18,46
5	9,236	11,070	15,086	20,50
6	10,645	12,592	16,812	22,50
7	12,016	14,067	19,475	24,30

Таблица А.4 – Статистика величины d в составном критерии

n	P = 0,9		P = 0,95		P = 0,99	
	d _{min}	d _{max}	d _{min}	d _{max}	d _{min}	d _{max}
11	0,7409	0,8899	0,7153	0,9073	0,6675	0,9359
16	0,7452	0,8733	0,7263	0,8884	0,6829	0,9137
21	0,7495	0,8631	0,7304	0,8768	0,6950	0,9001
26	0,7530	0,8570	0,7360	0,8686	0,7040	0,8901
31	0,7559	0,8511	0,7404	0,8625	0,7110	0,8827
36	0,7583	0,8468	0,7440	0,8578	0,7167	0,8769
41	0,7604	0,8436	0,7470	0,8540	0,7216	0,8722
46	0,7621	0,8409	0,7496	0,8508	0,7256	0,8682
51	0,7636	0,8385	0,7518	0,8481	0,7291	0,8648

Таблица А.5 – Коэффициент распределения Стьюдента для числа измерений n

n	Доверительная вероятность P			
	0,9	0,95	0,99	0,999
2	6,31	12,71	63,68	636,62
3	2,92	4,30	9,93	31,60
4	2,35	3,18	5,84	12,92
5	2,13	2,78	4,60	8,61
6	2,02	2,57	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,50	5,41
9	1,86	2,31	3,36	5,04
10	1,83	2,26	3,25	4,78
11	1,81	2,23	3,17	4,59
12	1,80	2,20	3,11	4,44
13	1,78	2,18	3,06	4,32
14	1,77	2,16	3,01	4,22
15	1,76	2,15	2,98	4,14
16	1,75	2,13	2,95	4,07
17	1,75	2,12	2,92	4,02
18	1,74	2,11	2,90	3,97
19	1,73	2,10	2,88	3,92
20	1,73	2,09	2,86	3,88
21	1,65	1,96	2,58	3,29

Таблица А.6 – Зависимость $\beta(n)$ в критерии Смирнова

n	β		n	β	
	0,9	0,95		0,9	0,95
3	1,412	1,414	23	2,683	2,843
5	1,869	1,917	25	2,718	2,880
7	2,093	2,182	27	2,749	2,913
9	2,238	2,349	29	2,778	2,944
11	2,343	2,470	31	2,805	2,972
13	2,426	2,563	33	2,830	2,998
15	2,532	2,670	35	2,853	3,022
17	2,551	2,701	37	2,874	3,044
19	2,601	2,754	39	2,894	3,065
21	2,644	2,801	41	2,913	3,084

Таблица А.7 – Значения (I-P) –процентных точек распределения Фишера

K2	P	K1									
		4	9	14	19	24	29	39	49	99	∞
4	0,9	4,11	3,94	3,88	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
	0,95	6,39	6,00	5,87	5,81	5,77	5,75	5,72	5,70	5,66	5,63
	0,99	16,0	14,7	14,2	14,0	13,9	13,9	13,8	13,7	13,6	13,5
9	0,9	2,69	2,44	2,35	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	2,19	2,16
	0,95	4,26	3,18	3,02	2,95	2,90	2,87	2,83	2,80	2,76	2,71
	0,99	8,02	5,35	5,00	4,84	4,73	4,66	4,57	4,52	4,42	4,31
14	0,9	2,39	2,12	2,02	1,97	1,94	1,92	1,89	1,87	1,83	1,80
	0,95	3,11	2,65	2,48	2,40	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,13
	0,99	5,56	4,03	3,70	3,54	3,43	3,36	3,27	3,22	3,11	3,00
19	0,9	2,27	1,98	1,88	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,67	1,63
	0,95	2,90	2,42	2,26	2,17	2,11	2,08	2,03	2,00	1,94	1,88
	0,99	4,50	3,53	3,19	3,03	2,93	2,86	2,77	2,71	2,60	2,49
24	0,9	2,19	1,91	1,80	1,74	1,70	1,68	1,64	1,62	1,58	1,53
	0,95	2,78	2,30	2,13	2,05	1,98	1,95	1,90	1,86	1,80	1,73
	0,99	4,22	3,26	2,93	2,77	2,66	2,59	2,50	2,44	2,33	2,21
29	0,9	2,15	1,86	1,75	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,52	1,47
	0,95	2,70	2,22	2,05	1,96	1,90	1,86	1,81	1,78	1,71	1,64
	0,99	4,04	3,09	2,77	2,60	2,49	2,43	2,33	2,28	2,16	2,03
39	0,9	2,10	1,79	1,68	1,62	1,58	1,55	1,52	1,49	1,44	1,39
	0,95	2,61	2,13	1,95	1,86	1,79	1,76	1,70	1,67	1,60	1,52
	0,99	3,83	2,89	2,57	2,41	2,29	2,22	2,14	2,08	1,95	1,82
49	0,9	2,09	1,74	1,68	1,58	1,52	1,49	1,46	1,45	1,40	1,34
	0,95	2,56	2,07	1,90	1,78	1,74	1,66	1,64	1,61	1,54	1,40
	0,99	3,73	2,79	2,47	2,28	2,19	2,11	2,02	1,96	1,85	1,62
99	0,9	2,00	1,70	1,58	1,51	1,47	1,44	1,39	1,37	1,30	1,22
	0,95	2,46	1,97	1,79	1,60	1,63	1,59	1,50	1,49	1,39	1,28
	0,99	3,51	2,59	2,26	2,10	1,98	1,93	1,80	1,74	1,59	1,43
∞	0,9	1,94	1,63	1,51	1,43	1,38	1,35	1,30	1,26	1,18	1,00
	0,95	2,37	1,88	1,69	1,59	1,52	1,47	1,40	1,35	1,24	1,00
	0,99	3,32	2,41	2,07	1,91	1,79	1,72	1,60	1,53	1,36	1,00

Трансформация законов распределения погрешностей при нелинейном преобразовании

Для решения задачи определения погрешности измеряемой величины y , связанной с влияющей величиной x нелинейной функцией преобразования

$$y = \varphi(x), \tag{Б.1}$$

необходимо по известной функции распределения $F(x)$ и выражению (Б.1) найти функцию распределения $G(y)$.

По определению интегральной функции распределения

$$F(x) = P(X < x).$$

Очевидно, что для монотонно возрастающей функции преобразования

$$P(X < x) = P(Y < \varphi(x)).$$

Поскольку по определению

$$P(Y < \varphi(x)) = G(\varphi(x)),$$

то

$$F(x) = G(\varphi(x)). \tag{Б.2}$$

Производя обратное преобразование выражения (Б.1), получаем

$$x = \varphi^{-1}(y),$$

тогда

$$G(y) = F(\varphi^{-1}(y)). \tag{Б.3}$$

Дифференцируя выражение (Б.3), получаем дифференциальную функцию распределения частной погрешности y :

$$g(y) = \frac{\partial G(y)}{\partial y} = \frac{\partial F(\varphi^{-1}(y))}{\partial y} = f(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial \varphi^{-1}(y)}{\partial y}. \tag{Б.4}$$

При нахождении доверительных границ частной погрешности y , их можно получить для той же самой доверительной вероятности P_δ из границ изменения влияющей величины x a и b :

$$x \in [a; b], P_\delta,$$

$$y \in [\varphi(a); \varphi(b)], P_\delta,$$

где $P_\delta = F(b) - F(a) = G[\varphi(b)] - G[\varphi(a)].$

Графическое решение задачи трансформации законов распределения приведено на рисунке Б.1. Этот способ трансформации удобен в том случае, когда аналитическое решение затруднительно или исходное распределение $F(x)$ получено экспериментальным путем.

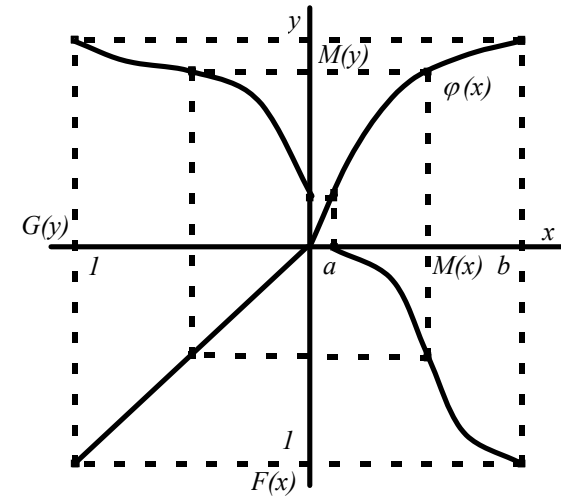


Рисунок Б.1 – Графическая интерпретация трансформации закона распределения

Рассмотрим несколько случаев трансформации законов распределений.

1. *Линейная функция преобразования* $y = k_1x + k_0$.

Произведем обратное преобразование $x = \frac{y - k_0}{k_1}$, тогда по формуле

$$(Б.3) \text{ имеем } G(y) = F(\varphi^{-1}(y)) = F\left(\frac{y - k_0}{k_1}\right).$$

Таким образом, при линейном преобразовании функция распределения не изменяется, а лишь сдвигается по оси абсцисс на k_0 и претерпевает компрессию (декомпрессию) в k_1 раз.

2. *Квадратическая функция распределения* $y = kx^2$.

Рассмотрим преобразование величины x , имеющей равномерное распределение

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad x \in [a; b]. \tag{Б.5}$$

Обратное преобразование $x = \sqrt{\frac{y}{k}}$. По формуле (Б.3) функция распределения величины y имеет вид

$$G(y) = \frac{\sqrt{\frac{y}{k}} - a}{b - a}, \quad y \in [ka^2; kb^2]$$

Если влияющая величина x имеет нормальное распределение с функцией распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} du,$$

то при трансформации с квадратичной функцией преобразования функция распределения преобразуется к виду

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{y}{k}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{kv}}} e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{v}{k}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} dv.$$

Дифференциальная функция распределения при этом

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y k \sigma}} e^{-\frac{(\sqrt{y-m\sqrt{k}})^2}{2\sigma^2 k}}.$$

3. Функция преобразования вида $y = k \sin x$.

Этот случай встречается при оценивании погрешности рассогласования при измерении мощности на СВЧ. По такому закону изменяется погрешность рассогласования в зависимости от фазы коэффициента отражения. Величина фазы детерминирована, но неизвестна, поэтому для отыскания погрешности рассогласования предполагают, что все значения фазы распределены по равномерному закону, функция распределения которого имеет вид (Б.5). Необходимо определить, по какому закону распределена погрешность рассогласования.

Выполним обратное преобразование функции преобразования

$$x = \arcsin \frac{y}{k}.$$

Тогда выражение для функция распределения погрешности рассогласования согласно формуле (Б.3) запишется следующим образом

$$G(y) = \frac{1}{b-a} \arcsin \frac{y}{k} - \frac{a}{b-a}, \quad k \sin a < y < k \sin b.$$

Обычно фаза коэффициента отражения изменяется в пределах $\pm \frac{\pi}{2}$,

то есть $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$, тогда выражение (Б.5) преобразуется к виду

$$G(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{y}{k}, \quad -k < y < k.$$

Из последнего выражения видно, что погрешность рассогласования распределена по закону арксинуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.- М.: Наука, 1981. - 721 с.
2. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. – М.: Изд-во стандартов, 1985. – 286 с.
3. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – М.: Энергоатомиздат, 1990.– 288 с.
4. Земельман М.А. Метрологические основы технических измерений. – М.: Изд-во стандартов, 1991.- 228 с.
5. Закон України про метрологію та метрологічну діяльність. – К.: Держстандарт України, 1998. – 20 с.
6. Кузнецов В.А., Ялунина Г.В. Метрология (теоретические, прикладные и законодательные основы): Учеб. пособие. – М: ИПК Издательство стандартов, 1998. – 336 с.
7. Кукуш В.Д. Определение погрешностей результатов и средств измерений. – Харьков: ХПИ, 1979. – 116 с.
8. Кукуш В.Д. Электрорадиоизмерения. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 367 с.
9. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 248 с.
10. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев.: Вища школа, 1983. – 455 с.
11. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. – Энергия, 1978.- 262 с.
12. Шишкин И.Ф. Теоретическая метрология. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 492 с.
13. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики: Справочник. – Киев.: Наук. Думка, 1970. – 800 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1 ОСНОВЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ.....	4
1.1 Сущность понятия “измерение”	4
1.2 Единицы физических величин и их системы	6
1.3 Воспроизведение единиц физических величин.....	11
1.3.1 Эталон единицы длины	13
1.3.2 Эталон единицы массы.....	16
1.3.3 Эталон единиц времени и частоты	18
1.3.4 Эталон единицы силы электрического тока	20
1.3.5 Эталон единицы температуры	23
1.3.6 Эталон единицы силы света	25
1.3.7 Единица количества электричества.....	27
1.4 Квантовая метрология	27
1.4.1 Эталон вольта на эффекте Джозефсона	28
1.4.2 Эталон ома на основе квантового эффекта Холла	30
1.5 Передача размеров единицы ФВ от эталонов к рабочим СИ.....	32
1.5.1 Основные принципы.....	32
1.5.2 Поверочные схемы.....	33
1.6 Контрольные вопросы	36
2 ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ	38
2.1 Основные положения и определения	38
2.2 Вероятностное представление результатов и погрешностей измерений	41
2.3 Случайные погрешности	50

2.3.1 Определение точечных оценок числовых характеристик эмпирических законов распределения случайной погрешности.....	50
2.3.2 Определение закона распределения случайной погрешности	59
2.3.3 Минимизация случайной погрешности.....	66
2.4 Грубые погрешности и промахи	69
2.4.1 Критерий Райта	69
2.4.2 Критерий Смирнова	70
2.5 Систематические погрешности.....	70
2.5.1 Классификация систематических погрешностей	71
2.5.2 Обнаружение систематических погрешностей	73
2.5.3 Компенсация систематических погрешностей.....	76
2.6 Суммирование погрешностей	80
2.7 Контрольные вопросы, задачи, упражнения.....	89
3 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ.....	91
3.1 Прямые измерения	94
3.1.1 Обработка результатов прямых измерений с однократными наблюдениями	94
3.1.2 Обработка прямых измерений с многократными наблюдениями	97
3.1.3. Обработка нескольких групп прямых измерений с многократными наблюдениями	98
3.2 Косвенные измерения	104
3.2.1 Частные случаи вычисления погрешностей при косвенных измерениях.....	110
3.2.2 Критерий ничтожных погрешностей.....	113
3.3 Совместные измерения.....	114
3.3.1 Определение параметров линейной зависимости	118
3.3.2 Определение параметров неполиномиальных зависимостей с помощью МНК	119
3.4 Совокупные измерения.....	121
3.5 Контрольные вопросы, задачи, упражнения.....	126

4. СРЕДСТВА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ.....	129
4.1 Общие положения и определения	129
4.2 Метрологические характеристики СИТ и их нормирование	132
4.2.1 Характеристики, предназначенные для определения результатов измерений	134
4.2.2 Характеристики погрешностей СИТ.....	134
4.2.3 Характеристики чувствительности СИТ к влияющим факторам	136
4.2.4 Динамические характеристики СИТ	137
4.2.5 Характеристики взаимодействия СИТ с объектом измерения на входе или выходе СИТ.....	141
4.2.6 Неинформативные параметры входного сигнала СИТ.....	142
4.3 Основные методы измерений.....	142
4.3.1 Метод сопоставления.....	142
4.3.2 Метод совпадения	143
4.3.3 Метод замещения	145
4.3.4 Дифференциальный метод	145
4.3.4 Нулевой метод.....	147
4.4 Обобщенные структурные схемы СИТ.....	147
4.4.1 Схема прямого преобразования.....	147
4.4.2 Структурная схема уравнивающего преобразования.....	148
4.5 Погрешности СИТ.....	152
4.5.1 Погрешности квантования	152
4.5.2 Динамические погрешности.....	156
4.5.3 Погрешность, обусловленная взаимодействием СИТ с объектом измерения на его входе и выходе	160
4.6 Контрольные вопросы, задачи и упражнения	161
Приложение А. Статистические таблицы.....	162
Приложение В. Трансформация законов распределения погрешностей при нелинейном преобразовании	166
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	170

Навчальне видання

І.П. Захаров

ТЕОРЕТИЧНА МЕТРОЛОГІЯ

Навчальний посібник

Редактор Б.П. Косіковська

План 99, поз.

Підп. до друку 22.10.99. Формат 60×84¹/₁₆. Умов. друк. арк.10,00.
Облік.-вид. арк. 9,2. Тираж прим. Зам. № . Ціна договірна.

Харківський державний технічний університет радіоелектроніки.

Україна, 61166 Харків, просп. Леніна, 14.

Надруковано в учбово-виробничому видавничо-поліграфічному центрі ХТУРЕ.
Україна, 61166 Харків, просп. Леніна, 14.