

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЯХ

А. Г. Евдокимов

В настоящей статье в соответствии с постановкой задачи, изложенной в [1], рассматривается задача получения требуемого потокораспределения в гидравлической сети с одним регулируемым в широких пределах активным элементом и рядом пассивных элементов (дресселирующих устройств), расположенных в некоторых ветвях сети. Требуемое воздухо-распределение в сети должно достигаться при минимальной затрачиваемой мощности.

Для решения этой задачи необходимо прежде всего математически описать установившийся процесс потокораспределения в гидравлических сетях, т. е. получить системы уравнений, однозначно отображающие зависимость между переменными и параметрами сети. Такое математическое описание должно быть универсальным по своей структуре, т. е. пригодным для сети любой топологии.

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ ПОТОКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Структурно такое описание будет определяться: а) системами уравнений, полученными из топологии сети; б) системой уравнений, составленных для ветвей сети.

1) **Топологический анализ гидравлической сети.** При топологическом анализе все ветви сети следует заменить направленными отрезками. Получающаяся при этом структура называется линейным графом. На рис. 1 приведен простой пример конкретной вентиляционной сети. Граф (геометрический образ) этой сети представлен на рис. 2.

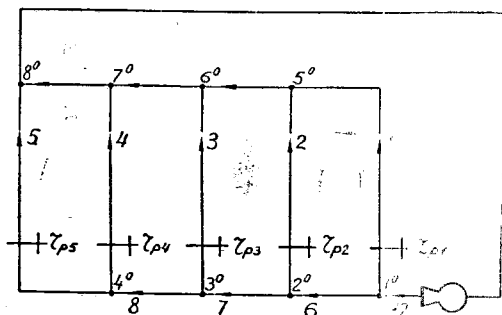


Рис. 1. Пример шахтной вентиляционной сети.

Геометрический образ гидравлической сети является связанным графом. Максимальным деревом связанного графа называется связанный подграф, который содержит все узлы графа, но не содержит замкнутых путей. Ветви сети, входящие в максимальное дерево, называются ветвями дерева, а невходящие — связями. Имеется $n - 1$ ветвь дерева и $s = m - n + 1$ связей (n и m — количество узлов и ветвей сети). Каждая связь ограничена двумя узлами, между которыми всегда можно найти незамкнутый путь, состоящий только из ветвей дерева. Этот незамкнутый путь вместе со связью образует контур. Совокупность s контуров, образованных s связями совместно с ветвями дерева, дает основную систему контуров свя-

занного графа. На рис. 2 показано одно из максимальных деревьев линейного графа вентиляционной сети, приведенной на рис. 1.

Линейный граф гидравлической сети однозначно отображается математически с помощью матрицы инцидентий. Выбранная система контуров в рассматриваемой сети может быть математически определена при помощи цикломатической матрицы [2, 3].

Произведем кодировку сети следующим образом. Свяжем, дополняющим какое-нибудь максимальное дерево сети, присвоим номера от 1 до s , а ветвям дерева — от $s+1$ до m . Контур, образованному r -й связью,

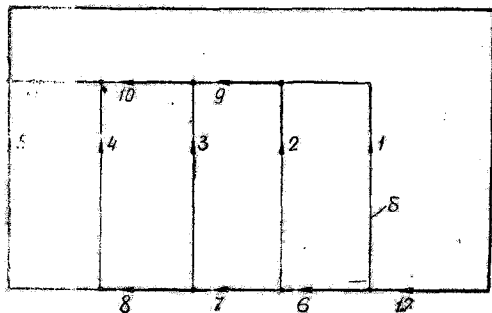


Рис. 2. Линейный граф шахтной вентиляционной сети, приведенной на рис. 1: а) ветвь дерева линейного графа; б) связь линейного графа.

присвоим номер r . Направление обхода r -го контура выберем совпадающим с r -й ветвью сети. Можно показать [2, 3], что полученная основная система контуров является независимой. Подобный способ кодировки сети и выбора системы независимых контуров назовем методом контуроразделения.

Введем в рассмотрение цикломатическую матрицу для ветвей дерева сети K . Каждой r -й строке этой матрицы соответствует r -й независимый контур, а i -му столбцу — i -я ветвь де-

рева графа. Элемент K_{ri} матрицы K , находящийся на пересечении r -й строки и i -го столбца, равен 0, 1 или -1 .

$$K_{ri} = \begin{cases} 0 & \text{— ветвь } i \text{ не принадлежит контуру } r; \\ 1 & \text{— направление } i\text{-й ветви соответствует направлению контура } r; \\ -1 & \text{— направление } i\text{-й ветви противоположно направлению контура } r. \end{cases}$$

2) **Первый и второй законы гидравлических сетей.** Состояние потоко-распределения гидравлической сети определяется многомерными векторными переменными потоком $\bar{q}$ и депрессией $\bar{h}$, составляющие которых q_i и h_i представляют собой значения потока и депрессии в i -й ветви сети (для шахтных вентиляционных сетей q_i — поток воздуха, для водопроводных сетей — поток воды; под депрессией h_i подразумевается разность давлений на концах i -й ветви сети), т. е.

$$\begin{aligned} \bar{q} &= (q_1, q_2, \dots, q_m); \\ \bar{h} &= (h_1, h_2, \dots, h_m). \end{aligned}$$

При использовании метода контуроразделения многомерные векторные переменные поток $\bar{q}$ и депрессия $\bar{h}$ разбиваются соответственно на два составляющих вектора: s -мерные векторы $\bar{q}_1$ и $\bar{h}_1$, составляющие которых q_r и h_r соответствуют потоку и депрессии r -й связи сети, и $(n-1)$ -мерные векторы $\bar{q}_2$ и $\bar{h}_2$, составляющие которых q_i и h_i представляют собой потоки и депрессии i -й ветви дерева сети, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= (q_1, q_2, \dots, q_s); \\ \bar{h}_1 &= (h_1, h_2, \dots, h_s); \\ \bar{q}_2 &= (q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_m); \\ \bar{h}_2 &= (h_{s+1}, h_{s+2}, \dots, h_m). \end{aligned}$$

Первый закон гидравлической сети указывает, что алгебраическая сумма потоков ветвей, входящих в любой узел сети, равна 0. Второй закон гидравлической сети свидетельствует о том, что алгебраическая сумма депрессий ветвей по любому замкнутому контуру (циклу) равна 0. Пользуясь рядом теорем и положений, изложенных в литературе [2, 3, 4], можно показать, что первый закон гидравлической сети позволяет определить потоки ветвей дерева сети через потоки связей этой сети, а второй — выразить депрессии связей сети через депрессии ветвей дерева этой сети:

$$q_i = \sum_{r=1}^s K_{ri} \cdot q_r \quad (i = s + 1, \dots, m); \quad (1)$$

$$h_r = - \sum_{i=s+1}^m K_{ri} \cdot h_i \quad (s = 1, 2, \dots, s). \quad (2)$$

3) Третий закон гидравлической сети. Пассивные элементы ветвей гидравлической сети характеризуются гидродинамическими или аэродинамическими параметрами — сопротивлениями r и коэффициентами турбулентности n . В случае участков гидравлических сетей эти параметры обозначим r_i и n_i , а в случае дросселирующих устройств — r_{pi} и n_{pi} для i -й ветви сети. Активные элементы этой же сети характеризуются параметрами, зависящими от их конструктивных особенностей и типоразмеров. Эти параметры условно можно определить некоторым множеством Ψ .

Параметры элементов i -й ветви гидравлической сети позволяют однозначно определить зависимость между составляющей h_i многомерного вектора депрессий $\vec{h}$ и составляющей q_i многомерного вектора потока $\vec{q}$. Эта зависимость является нелинейной и в общем случае может быть представлена для i -й ветви как алгебраическая сумма депрессий отдельных элементов этой ветви. Условимся, что депрессия пассивного элемента и поток через него будут положительными, если направление этого потока совпадает с выбранным направлением ветви. Тогда

$$h_i = h_i^* + h_{pi} + h_i^{(a)}, \quad (3)$$

где h_i^* — депрессия пассивного нерегулируемого элемента i -й ветви;

h_{pi} — депрессия дросселирующего элемента i -й ветви;

$h_i^{(a)}$ — депрессия активного элемента i -й ветви;

α_i — коэффициент, показывающий, совпадает или нет направление нагнетания активного элемента i -й ветви с выбранным направлением этой ветви.

$$\alpha_i = \begin{cases} -1 & \text{— направление нагнетания активного элемента } i\text{-й ветви совпадает с выбранным направлением этой ветви;} \\ 1 & \text{— направление нагнетания активного элемента } i\text{-й ветви. противоположно выбранному направлению этой ветви.} \end{cases}$$

Определим уравнения отдельных элементов ветвей гидравлической сети, т. е. уравнения, связывающие депрессии этих элементов, и потоки, проходящие через них.

Уравнение пассивного нерегулируемого элемента i -й ветви имеет следующий вид:

$$h_i^* = \text{sign } q_i r_i (q_i)^{n_i}, \quad (4)$$

где r_i — величина аэро- или гидродинамического сопротивления этого элемента; n_i — показатель турбулентности, зависящий от степени турбулентности потока; $\text{sign } q_i$ — знак q_i .

Движение газа или жидкости через дросселирующий элемент может быть описано аналогичной формулой:

$$h_{pi} = \text{sign } q_i r_{pi} (q_i)^{n_{pi}}, \quad (5)$$

где r_{pi} — сопротивление дросселирующего элемента; n_{pi} — показатель турбулентности этого элемента.

Зависимость между депрессией активного элемента i -й ветви и ее потоком может быть представлена в виде

$$h_i^{(a)} = \Psi_{0i} - \text{sign } q_i \Psi_{2i} (q_i)^{\psi_i}, \quad (6)$$

где Ψ_{0i} , Ψ_{2i} , Ψ_i — параметры активного элемента, зависящие от его типа, размера, режима работы и конструктивных особенностей.

Уравнения (4), (5) и (6) описывают математически отдельные элементы ветвей гидравлической сети. Подставляя значения их правых частей в формулу (3), получим зависимость между составляющими многомерного вектора депрессий $\bar{h}$ — h_i и составляющими многомерного вектора потока $\bar{q}$ — q_i .

$$h_i = \text{sign } q_i (r_i \cdot |q_i|^{n_i} + r_{pi} \cdot |q_i|^{n_{pi}} - \alpha_i \cdot \Psi_{2i} / |q_i|^{\psi_i}) + \alpha_i \cdot \Psi_{0i}. \quad (7)$$

Системы уравнений (1), (2) и (7) полностью определяют состояние потокораспределения в гидравлической сети любой топологии. Исключая составляющие h_i m -мерного вектора депрессий $\bar{h}$ из этих систем, получим m независимых уравнений, отображающих взаимосвязь между составляющими q_i m -мерного вектора потока $\bar{q}$, топологией сети и параметрами ее ветвей.

$$\begin{cases} \text{Система уравнений (1)} \\ \text{sign } q_r \cdot (r_r \cdot |q_r|^{n_r} + r_{pr} \cdot |q_r|^{n_{pr}} - \alpha_r \cdot \Psi_{2r} / |q_r|^{\psi_r}) + \alpha_r \cdot \Psi_{0r} + \\ + \sum_{i=s+1}^m K_{ri} \cdot [\text{sign } q_i (r_i \cdot |q_i|^{n_i} + r_{pi} \cdot |q_i|^{n_{pi}} - \alpha_i \cdot \Psi_{2i} / |q_i|^{\psi_i}) + \alpha_i \cdot \Psi_{0i}] = 0 \\ (r = 1, \dots, s). \end{cases} \quad (8)$$

При определенных фиксированных значениях параметров ветвей гидравлической сети система уравнений (8) имеет единственное решение относительно составляющих q_i m -мерного вектора потока $\bar{q}$. Изменяя сопротивления дросселирующих устройств или параметры активных элементов, можно перераспределять потокораспределение в сети. Ставится задача, каким образом необходимо расположить и изменить параметры исполнительных органов, чтобы в сети получить наперед заданное оптимальное по расходу мощности потокораспределение.

2. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЯХ ПРИ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОТОКОВ В СВЯЗЯХ СЕТИ

Рассмотрим задачу оптимального управления потокораспределением в сети с s дросселирующими устройствами, расположенными в связях сети с требуемыми значениями потоков, и регулируемым в широких пределах одним активным элементом. При этом активный элемент расположен в ветви дерева, входящей в каждый из основных контуров, образованных этими связями. Произведем кодировку сети в соответствии с методом контуроразделения, т. е. ветвям с дросселирующими элементами

присвоим номера от 1 до s , а остальным ветвям (ветвям дерева сети) — номера от $s+1$ до m . Ветви с активным элементом присвоим номер m . Считаем, что знак требуемых потоков совпадает со знаком потока через активный элемент.

Критерием оптимальности управления потокораспределением в гидравлической сети является мощность, расходуемая на это потокораспределение. Во всех случаях суммарная мощность, расходуемая на потокораспределение, равна алгебраической сумме мощностей, развиваемых включенными в сеть активными элементами [5]:

$$N = \text{const} \sum_{i=1}^m |h_i^{(Q)}| \cdot q_i = \text{const} \sum_{i=1}^m (h_i^* + h_{pi}) q_i. \quad (9)$$

Сформулируем математически рассматриваемую задачу оптимального управления потокораспределением в гидравлической сети.

Определить режим работы активного элемента $|h_m^{(Q)}|, q_m|$ и сопротивления дросселирующих устройств $|r_{pr} (r = 1, 2, \dots, s)|$, которые соответствуют минимуму функции цели

$$N = \text{const} h_m^{(Q)} q_m \quad (10)$$

и удовлетворяют следующим ограничениям

$$q_r = C_r \quad (r = 1, 2, \dots, s); \quad (11)$$

$$q_i = \sum_{r=1}^s K_{ri} \cdot q_r \quad (i = s+1, \dots, m); \quad (12)$$

$$r_r \cdot |q_r|^{n_r} + r_{pr} \cdot |q_r|^{n_{pr}} + \sum_{i=s+1}^m K_{ri} \text{sign } q_i \cdot r_i \cdot |q_i|^{n_i} - h_m^{(Q)} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s); \quad (13)$$

$$r_{pr} \geq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, s). \quad (14)$$

Ограничения (11) и (12) однозначно определяют потокораспределение во всей сети. Поскольку поток q_m через активный элемент однозначно определен, то минимум функции цели N будет достигаться при минимальном $h_m^{(Q)}$, удовлетворяющем ограничениям (13) и (14). Из системы уравнений (13) следует

$$h_m^{(Q)} = r_{pr} \cdot |q_r|^{n_{pr}} + H_r^{(l)} \quad (r = 1, 2, \dots, s), \quad (15)$$

где

$$H_r^{(l)} = r_r \cdot |q_r|^{n_r} + \sum_{i=s+1}^m K_{ri} \text{sign } q_i \cdot r_i \cdot |q_i|^{n_i} \quad (r = 1, \dots, s). \quad (16)$$

$H_r^{(l)}$ — естественная депрессия r -го контура, соответствующая алгебраической сумме депрессий нерегулируемых пассивных элементов ветвей r -го контура при потокораспределении, определяемом формулами (11) и (12).

Вследствие ограничения (14) (неотрицательности сопротивлений дросселирующих устройств) $h_m^{(Q)} \geq H_r^{(l)} \quad (r = 1, 2, \dots, s)$. Легко видеть, что минимальное значение депрессии активного элемента, удовлетворяющего ограничениям (11) и (12), будет достигнуто в случае

$$h_m^{(a)} = H_{k \max}^{(l)}, \quad (17)$$

где $H_{k \max}^{(l)}$ — наибольшая естественная депрессия среди естественных депрессий s контуров.

Из уравнений (15) с учетом (17) следует

$$r_{pr} = \frac{H_{k \max}^{(l)} - H_r^{(l)}}{|q_{sl}|^{n_{pr}}} \quad (r = 1, 2, \dots, s) \quad (18)$$

$$r_{pk} = 0, \quad (19)$$

т. е. оптимальное потокораспределение в сети с s дросселирующими устройствами, расположенными в связях сети с требуемыми значениями потоков, и регулируемым в широких пределах активным элементом достигается при открытом дросселирующем устройстве в связи контура с максимальной естественной депрессией. Эта максимальная естественная депрессия соответствует депрессии, развиваемой активным элементом.

Запишем последовательность математических операций, которую необходимо произвести для решения сформулированной выше задачи оптимального управления потокораспределением в гидравлических сетях.

1) Из (11) и (12) находим m -мерный вектор потока q .

2) По формулам (16) определяем естественные депрессии $H_r^{(l)}$ контуров.

3) Методом сравнения выбираем наибольшую естественную депрессию и на основе (17) приравниваем ее депрессии активного элемента ($h_m^{(q)}$).

4) Подсчитываем величины сопротивлений дросселирующих устройств по формуле (18).

Рис. 3. Блок-схема программы решения на ЭВМ задачи оптимального управления потокораспределением в гидравлических сетях при заданных значениях потоков в s связях сети.

Блок-схема программы, реализующей вычисление на ЭВМ этой последовательности операций для гидравлической сети любой топологии, приведена на рис. 3. Она состоит из:

1) блока преобразования числового массива, осуществляющего перевод числового материала из одной системы счисления в другую;

2) блока настройки программы, настраивающего программу на сеть новой топологии;

3) блока q_r , производящего вычисление по формуле (12);

4) блока $H_r^{(l)}$, осуществляющего вычисление по формуле (16);

5) блока $h_m^{(a)}$, производящего выбор максимальной естественной депрессии;

6) блока r_{pr} , осуществляющего вычисление по формуле (18);

7) блока печати результата и конца решения, осуществляющего печать результата и фиксирующего окончание решения задачи.

Проиллюстрируем изложенное выше на решении конкретного примера. Дана вентиляционная сеть, изображенная на рис. 1 и состоящая из 12 ветвей и восьми узлов с цикломатическим числом $s = 5$. Кодировка этой сети произведена в соответствии с методом контуроразделения. В первых пяти ветвях сети расположены дросселирующие устройства, в 12-й ветви находится вентилятор главного проветривания. Коэффициенты турбулентности элементов ветвей сети одинаковы и равны 2.

Будем рассматривать естественные сопротивления ветвей сети как n -мерный вектор сопротивлений $\bar{r}$, составляющая r_i которого представляет собой сопротивление i -й ветви. Аналогично введем в рассмотрение s -мерный вектор сопротивлений дросселирующих устройств $\bar{r}_p$, составляющая r_{ps} которого соответствует сопротивлению дросселирующего ветви. Величины естественных депрессий по s независимым контурам представим в виде s -мерного вектора $\bar{H}^{(l)}$, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (r_1, r_2, \dots, r_m); \\ \bar{r}_p &= (r_{p1}, r_{p2}, \dots, r_{ps}); \\ \bar{H}^{(l)} &= (H_1^{(l)}, H_2^{(l)}, \dots, H_s^{(l)}). \end{aligned}$$

Параметры сети, приведенной на рис. 1, характеризуются вектором сопротивлений $\bar{r} \cdot \bar{r} = (0,5; 1; 1; 1; 0,5; 0,2; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,03)$.

Топологию этой сети можно отобразить следующей цикломатической матрицей для ветвей дерева сети.

$$K = \begin{array}{c} \begin{array}{c} I \\ II \\ III \\ IV \\ V \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{array}$$

Найдем вектор $\bar{r}_p$ и режим работы главного вентилятора $(h_{12}^{(Q)}, q_{12})$, при которых в связях сети установится потокораспределение $q_1 = (8, 6, 6, 6, 8)$ при минимальной затрате мощности на проветривание сети.

1) Определяем по формуле (12) потокораспределение в ветвях дерева сети:

$$\bar{q}_2 = (26, 20, 14, 14, 20, 26, 34).$$

2) Из (16) находим вектор естественных депрессий $\bar{H}^{(l)}$.

$$\bar{H}^{(l)} = (217; 356,2; 416,6; 415,8; 348,2).$$

3) Определяем наибольшую естественную депрессию в независимых контурах сети:

$$H_3^{(l)} = 416,6.$$

Согласно (17), $h_{12}^{(Q)} = 416,6$.

4) Определяем по формуле (18) вектор сопротивлений дросселирующих устройств:

$$\bar{r}_p = (3,2; 1,67; 0; 0,022; 1,05).$$

Следовательно, требуемое потокораспределение $\bar{q}_1 = (8, 6, 6, 6, 8)$ при минимальной затрате мощности на проветривание сети установится при $\bar{r}_p = (3,2; 1,67; 0; 0,022; 1,05)$; $h_{12}^{(Q)} = 416,6$; $q_{12} = 34$.

ВЫВОДЫ

Определение оптимальных алгоритмов управления потокораспределением в сложных гидравлических сетях (вентиляционных, газовых, водопроводных и т. д.) основывается на единых теоретических предпосылках и методах подхода. Указанные предпосылки и методы изложены в настоя-

щей работе при решении конкретной задачи оптимального управления потокораспределением в гидравлических сетях. При этом получены следующие результаты.

1) Разработано универсальное математическое описание установившихся процессов потокораспределения в сложных гидравлических сетях при наличии регулирующих органов, пригодное для сети любой топологии.

2) Сформулирована задача оптимального управления потокораспределением в гидравлических сетях как задача нелинейного программирования. Математически доказана возможность сведения этой задачи к более простой.

3) Определен алгоритм оптимального управления потокораспределением в гидравлических сетях при заданных значениях потоков в s связях сети.

4) Разработана блок-схема программы реализации на ЭВМ полученного алгоритма оптимального управления.

5) Рассмотрен конкретный пример решения задачи оптимального управления по разработанному алгоритму применительно к шахтной вентиляционной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Волков. Принципы построения оптимальных автоматических систем управления потокораспределением в гидравлических сетях. Настоящий сборник.

2. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд-во иностр. лит., М., 1962.

3. С. Сешу и Н. Балабанян. Анализ линейных цепей. Госэнергоиздат, 1963.

4. Н. Г. Максимович. Линейные электрические цепи и их применения. Госэнергоиздат, 1961.

5. А. Д. Багриновский. Регулирование распределения воздуха в диагональных соединениях выработок. Сб. «Проблемы рудничной аэрологии», АН СССР, 1963.
