

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Моделювання марковських процесів відновлення

роботоспроможності систем

(тема)

Виконав:

студент 2 курсу, групи ПМм-22-1

Антонець О.М.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Наумейко І.В.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2024 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Антонцю Олегу Миколайовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Моделювання марковських процесів відновлення
роботоспроможності систем

затверджена наказом по університету від 2 листопада 2023 р. № 1276 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 січня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи марковська модель системи
«Людина-Машина-Середовище»

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	6 – 12 листопада 2023 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	13 – 26 листопада 2023 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	27 листопада – 10 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	11 грудня – 24 грудня 2023 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	25 грудня 2023 р. – 9 січня 2024 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2024 р.	виконано

Дата видачі завдання 6 листопада 2023 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Наумейко І.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 66 с., 12 рис., 2 дод., 13 джерел.

СИСТЕМА «ЛЮДИНА-МАШИНА-СЕРЕДОВИЩЕ», МАРКОВСЬКИЙ ЛАНЦЮГ, ІНФОРМАЦІЙНА ЕНТРОПІЯ.

Об'єктом дослідження є система «Людина-машина-середовище» (ЛМС) зі скінченим простором станів s . Більшість таких систем мають марковську властивість, яка означає, що ймовірності переходу в новий стан повністю визначаються поточним станом.

Метою роботи є оптимізація структури системи ЛМС в тій її частині, яка реагує на надзвичайні ситуації, з метою скорочення часу реагування.

Методи дослідження – методи теорії масового обслуговування.

Запропоновано кілька моделей системи ЛМС з марковською властивістю. За допомогою теорії масового обслуговування розроблено низку моделей для їх дослідження та вирішення. Модель системи масового обслуговування найкраще підходить для рятувальних підрозділів, для яких ліквідація нещасних випадків є «стаціонарним станом». Перехідні ймовірності ланцюга Маркова визначаються з так званого «другого закону синергетики».

ABSTRACT

Introductory note: 66 pages, 12 figures, 2 appendixes, 13 sources.

HUMAN-MACHINE-ENVIRONMENT SYSTEM, MARKOV CHAIN, INFORMATIONAL ENTROPY.

The object of research – the system "Human-Machine-Environment" (HME) with a finite state space. Most of such systems have the Markov property, which means that the probabilities of transition to a new state are completely determined by the current state.

The purpose of the work – to optimize the structure of the HME system in that part of it that responds to emergency situations with the aim of reducing the response time.

Research methods – Q-system theory methods.

Several models of the HME system with the Markov property are proposed. With the help of mass service theory, a number of models have been developed for their research and solution. The mass service system model is best suited for rescue units for which accident resolution is a "steady state". Transition probabilities of the Markov chain are determined from the so-called "second principle of synergy".

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	10
1.1 Класифікація небезпечних та шкідливих виробничих чинників	10
1.2 Кваліметрична модель системи	11
1.3 Змістовна та формальна постановки задачі	13
1.4 Постановка задач дослідження	14
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	15
2.1 Загальний підхід	15
2.2 Визначення параметрів порядку, підпорядкованих мод та виникаючих структур	18
2.3 Наближення	21
2.4 Просторові структури	23
2.5 Зв'язок з теорією фазових переходів Ландау. Рівняння Фокера-Планка	23
2.6 Підпорядкованість інформації	27
2.6.1 Параметри порядку	27
2.6.2 Приріст інформації	28
2.6.3 Нерівноважні фазові переходи	30
2.7 Одномода нестійкість	32
2.8 Ефективність та приріст інформації	33
2.9 Розрахунок нижнього та верхнього порогів	36
2.10 Точні аналітичні розрахунки в випадку одного параметру порядку	37
Висновки за розділом 2	40
3 Програмна реалізація	42
Висновки за розділом 3	42
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	43
4.1 Чисельні результати	43

	7
4.2 Аналіз отриманих результатів.....	43
4.2.1 Точні аналітичні розрахунки у разі одного параметра порядку	44
4.2.2 Точка нестійкості	47
4.2.3 Наближення до точки нестійкості	48
4.2.4 Область стійкості	49
4.3 Закон розподілу ризику аварії.....	51
4.4 Моделі для ліквідації аварій в системі «людина-машина-середовище»	56
Висновки за розділом 4	60
Висновки	61
Перелік джерел посилання	62
Додаток А. Лістинг програми	64
Додаток Б. Залежність інформації від параметрів. Результати чисельного експерименту	65

ВСТУП

Актуальність теми. У кожній підсистемі «робоче місце» та загалом у системі «людина-машина-середовище» безпека праці визначається наявністю зв'язків, зумовлених наявністю небезпек, які можуть зустрітися у навколишньому середовищі, а також, зокрема, на робочому місці. Ці зв'язки можна назвати небезпечними та шкідливими. Вони народжують шкідливі та небезпечні виробничі фактори. Розглядається ситуація, коли «людина» може перебувати в одному зі станів, наприклад, «здорова і дієдатна», «хвора, але дієдатна», «недієдатна». Вона переходить із деякими ймовірностями з одного стану до іншого, залежно від підсистем «машина» та «система» та її стану на попередньому кроці.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є визначення величин стаціонарних ймовірностей кожного із станів системи у надзвичайних ситуаціях для запобігання виникненню вузьких місць захисту та своєчасного знешкодження таких місць ще до виникнення аварійних ситуацій. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- провести огляд та аналіз сучасного стану завдання «моделювання систем безпечної життєдіяльності в умовах ризику катастроф»;
- проаналізувати інформацію та ефективність самоорганізованих систем;
- з усіх систем «людина-машина-середовище» виділимо системи з підвищеною активністю першої підсистеми - «людина», а з іншої підсистеми - «машина» виділимо підсистему другого рівня - захист людини та середовища від небезпечних та шкідливих факторів.

Об'єктом дослідження є система «людина-машина-середовище» та її поведінка у різних надзвичайних ситуаціях.

Предметом дослідження є аналіз різноманітних моделей для ліквідації аварій у системі «людина-машина-середовище».

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи «другого початку синергетики», закони розподілу ризику та методи дослідження марковського ланцюга.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на 27-му Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 10-12 травня 2023 р.) [1].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Класифікація небезпечних та шкідливих виробничих чинників

Велика різноманітність виробничих процесів тісно пов'язана саме із взаємодією комплексу різних шкідливих та небезпечних факторів. Оператор, що знаходиться на робочому місці, піддається великому розмаїттю зовнішніх факторів, що впливають на його стан, працездатність, продуктивність праці тощо. До цих факторів можна віднести, наприклад, мікроклімат: температура повітря, вологість, шум.

До вищесказаного фактору можна додати також шкідливий вплив надвисоких частот електромагнітного поля, найбільш небезпечних у порівнянні з перевищенням оптимальних величин показників мікроклімату.

Небезпечні та шкідливі фактори впливають на оператора протягом роботи. Основне завдання роботодавця – захист від цих факторів найманого працівника та створення безпечних та нешкідливих умов праці на підприємстві.

Як шкідливі, і небезпечні виробничі чинники мають свою класифікацію. Їх ділять на хімічні, фізичні, біологічні та психофізичні.

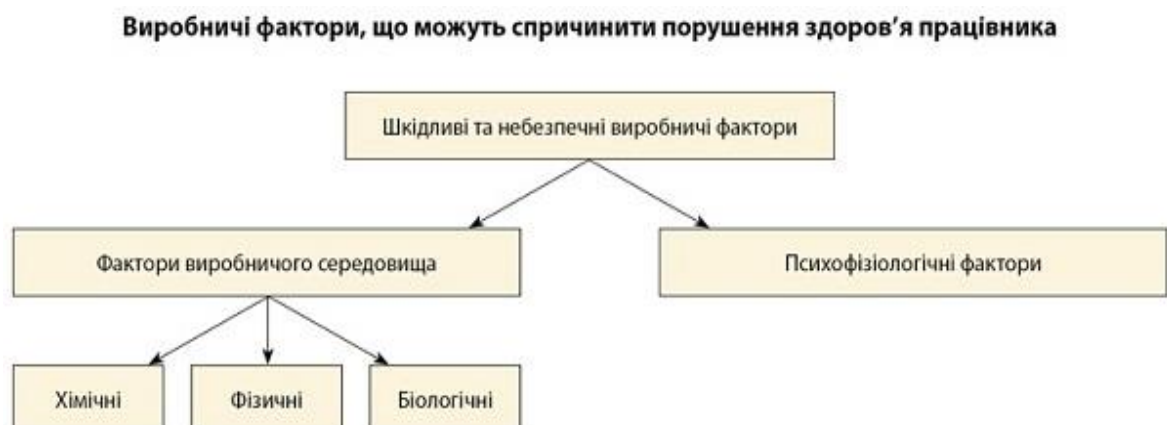


Рисунок 1.1 – Виробничі фактори, які можуть спричинити порушення здоров'я працівника

До хімічних шкідливих та небезпечних виробничих факторів можна віднести органічні та неорганічні речовини та їх сполуки.

Фізичні шкідливі та небезпечні виробничі фактори – це:

- а) незадовільний мікроклімат: температура, вологість, вентиляція повітря, інфрачервоне чи ультрафіолетове випромінювання у приміщенні;
- б) барометричний тиск;
- в) випромінювання та постійні електричні поля;
- г) високий рівень шуму;
- д) недостатній рівень освітлення у приміщенні.

До біологічних факторів можна віднести мікроорганізми, грибки, продукти мікробіологічного синтезу тощо.

Психофізіологічні фактори:

- а) емоційна напруга, наприклад, навантаження на нервову систему;
- б) динамічні та статичні навантаження;
- в) недостатня рухова активність;
- г) надто швидкий темп робіт;
- д) вимушене становище тіла під час виконання всіляких виробничих операцій [1].

Небезпечні та шкідливі виробничі фактори призводять до розвитку професійних хвороб, а також різних надзвичайних ситуацій. Тому слід заздалегідь аналізувати різні моделі ситуацій, правильно реагувати на них та удосконалювати реагування.

1.2 Кваліметрична модель системи

Побудуємо кваліметричну модель оцінки вибору алгоритму на вирішення нестационарної завдання теплопровідності, яка і буде об'єктом нашого дослідження, представимо якості рішення у вигляді ієрархічної структури за умови, що властивості характеризуються показниками, кваліметрованими у різних шкалах (від слабких до сильних).

Необхідно оцінити пріоритети методів вирішення завдання, що вивчається, за критеріями, що характеризує основні властивості процесу рішення.

Як альтернативи розглядаються методи рішення:

- а) аналітичний;
- б) аналітично-чисельний;
- в) чисельний.

Якість процесу розв'язання задачі характеризується такими властивостями:

- а) час розрахунків (необхідний метод для знаходження рішення);
- б) точність розв'язання (похибки результату від еталонного рішення);
- в) складність алгоритму (нелінійність зображена у балах, залежність від початкових умов);
- г) форма пред'явлення результату (можлива наочність результату у балах).

Ступінь якості визначається за формулою:

$$Q = \lambda_T \left(1 - \frac{T_P}{T_H} \right) + \lambda_P \frac{P_P}{P_H} + \lambda_C \left(1 - \frac{C_P}{C_H} \right) + \lambda_F \frac{F_P}{F_H} + \lambda_M \left(1 - \frac{M_P}{M_H} \right),$$

де $\lambda_T, \lambda_P, \lambda_C, \lambda_F, \lambda_M$ – коефіцієнти значущості відповідних показників властивостей якості з точки зору дослідження, що визначаються експериментальним шляхом за матрицею парних порівнянь у шкалі Т. Сааті;

T_P, P_P, C_P, F_P, M_P – значення відповідних показників властивостей якості рішення;

T_H, P_H, C_H, F_H, M_H – нормативні значення відповідних показників якості рішення [2].

Враховуючи різні варіанти кваліметрування проблеми можна зробити висновок, що слід вибрати аналітично-чисельний метод розв'язання задачі виходячи з того, що він має високі показники у векторі глобальних пріоритетів і варіантах, що розглядаються, відрізняється від кращих у кожному випадку на незначну величину.

1.3 Змістовна формальна постановка задачі

«Людина-машина-система» розглядається із введеним кінцевим простором станів s . Переважній більшості таких систем властива марковська властивість, що означає можливість переходу до нового стану повністю визначаються нинішнім станом і моментом часу. Перехідні можливості Марковського ланцюга визначені шляхом максимізації інформаційної ентропії системи при обмеженнях типу математичного очікування.

Загальним завданням роботи є визначення величин стаціонарних ймовірностей кожного із станів системи у надзвичайних ситуаціях. З усіх систем ЛМС виділяються системи з підвищеною активністю першої підсистеми – людини, а з другої підсистеми – машина виділяється підсистема другого рівня – захист людини та середовища від шкідливих та небезпечних факторів.

В рамках цієї роботи вважаємо, що потік подій з боку підсистем «машина» та «середовище» найпростіший з інтенсивністю λ , а час реакція на них з боку «людини» розподілена з параметром μ . Ці типи подій можуть призвести до певної ймовірності зміни стану системи. Величина $P_i(t)$ є ймовірністю стану S_i системи на момент часу t .

Модель 1. Розглядається ситуація, типова для одноканальних систем масового обслуговування без черги: людина відповідає на взаємодію (аварію) детермінованою послідовністю з n операцій, тривалість яких розподілена з параметром μ_i . Простір станів прийнято вважати самі операції з ліквідації аварій. S_0 – стан очікування, тобто робота системи без аварій.

Модель 2. Час та якість операцій з ліквідації аварій залежать від стану людини, яка у свою чергу залежить від стану системи. Вважатимемо, що оператор може перебувати у двох станах: «цілком дієздатний» і «обмежено дієздатний». Достовірність відновлення дієздатності у процесі ліквідації аварії дорівнює нулю, а ймовірність настання недієздатного стану під час виконання i -ї операції дорівнює b_i . Після закінчення всієї роботи дієздатність оператора

відновлюється або здійснюють заміну оператора. Тоді перехідні можливості для кожної пари станів $i + 1$ і $(i + 1)_b$, що сусідять з i -м, при повній дієздатності є $b_i \mu_i$ та $(1 - b_i) \mu_i$. Стану системи, інтенсивності поновлюваних робіт та ймовірності при неповній дієздатності оператора, відповідно, i_b , μ^b і P_{ib} .

Необхідно отримати розрахункові формули для ймовірності всіх станів обох моделях, розглядаючи об'єкти як системи масового обслуговування з марковським властивістю. Перехідні можливості визначити за макрохарактеристиками об'єкта використовуючи метод максимізації інформаційної ентропії.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є визначення величин стаціонарних ймовірностей кожного із станів системи у надзвичайних ситуаціях для запобігання виникненню вузьких місць захисту та своєчасного знешкодження таких місць ще до виникнення аварійних ситуацій. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- провести огляд та аналіз сучасного стану завдання «моделювання систем безпечної життєдіяльності в умовах ризику катастроф»;
- проаналізувати інформацію та ефективність самоорганізованих систем;
- з усіх систем «людина-машина-середовище» виділимо системи з підвищеною активністю першої підсистеми – «людина», а з іншої підсистеми – «машина» виділимо підсистему другого рівня – захист людини та середовища від небезпечних та шкідливих факторів.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Загальний підхід

Пропонувалося, що параметри p_i порядку можна виміряти з допомогою експерименту. У цьому розділі показано, що цей підхід припускає узагальнення, для якого не потрібне знання параметрів порядку. Замість них можна вводити адекватні кореляційні функції, що дозволить нам визначати за допомогою формалізму параметри порядку, а також структури, що виникають, і підлеглі методи.

Припустимо, що система, що досліджується, може бути описана вектором стану

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_N), \quad (2.1)$$

компоненти якого можна виміряти. Індекс та компоненти q_i може означати як номер комірки, і різні фізичні та інші величини. Передбачається, що відомі середні статистичні компоненти q_i та моменти компонентів до четвертого порядку включно. Можна ввести такі величини як обмеження величини f :

$$f_i = \langle q_i \rangle; f_i^{(1)} = q_i, \quad (2.2)$$

$$f_{ij} = \langle q_i q_j \rangle; f_{ij}^2 = q_i q_j, \quad (2.3)$$

$$f_{ijk} = \langle q_i q_j q_k \rangle; f_{ijk}^2 = q_i q_j q_k, \quad (2.4)$$

$$f_{ijkl} = \langle q_i q_j q_k q_l \rangle; f_{ijkl}^{(2)} = q_i q_j q_k q_l. \quad (2.5)$$

За допомогою множників Лагранжа λ , а також з урахуванням обмежень (2.2) – (2.5) можна обчислити максимум інформаційної ентропії та отримати для інформації величину

$$i = \exp\{V(\lambda, q)\}, \quad (2.6)$$

у якій V розраховується виразом

$$V(\lambda, q) = \lambda + \sum_i \lambda_i q_i + \sum_{ij} \lambda_{ij} q_i q_j + \sum_{ijk} \lambda_{ijk} q_i q_j q_k + \sum_{ijkl} \lambda_{ijkl} q_i q_j q_k q_l. \quad (2.7)$$

Щоб виділити аналогію з нерівноважними фазовими переходами, знаходимо екстремум функції V :

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.8)$$

У випадку V може мати не один екстремум, а кілька. Їхні положення ми позначимо вектором q^0 . Продовжуючи дослідження нерівноважних фазових переходів q^0 слід вибрати так, щоб функції $V = (q^0 + w)$ була притаманна найбільша симетрія щодо w . Такий вибір призводить до незміщених оцінок. Це впливає з максимуму інформаційної ентропії. До зміщених оцінок призводить лише нижча симетрія, що виділяє деяку структуру. Для іншого способу визначення q^0 як вектора, що вказує на положення відповідного мінімуму слід простежувати еволюцію q^0 від безструктурного стану шляхом зміни параметра, що управляє. Припускаючи, що

$$q = q^0 + w, \quad (2.9)$$

можна записати V у вигляді

$$V(\lambda, q) = \tilde{V}(\tilde{\lambda}, w), \quad (2.10)$$

де

$$\tilde{V}(\tilde{\lambda}, w) = \tilde{\lambda} + O + \sum_{ij} \tilde{\lambda}_{ij} w_i w_j + \sum_{ijk} \tilde{\lambda}_{ijk} w_i w_j w_k + \sum_{ijkl} \tilde{\lambda}_{ijkl} w_i w_j w_k w_l, \quad (2.11)$$

і, наприклад, коефіцієнти $\tilde{\lambda}_{ij}$ визначаються виразом

$$\tilde{\lambda}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q^0}. \quad (2.12)$$

Попередні обмеження (2.2) – (2.5), перепишемо у вигляді

$$f_i = \left\langle \frac{\partial}{\partial \lambda_i} V \right\rangle, \quad (2.13)$$

а також

$$f_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}} \right\rangle \quad (2.14)$$

і так далі, одночасно перетворюються на нові обмеження:

$$\bar{f} = \left\langle \frac{\partial V, w}{\partial \tilde{\lambda}_{ij}} \right\rangle \quad (2.15)$$

і так далі [3].

2.2 Визначення параметрів порядку, підлеглих мод і виникаючих структур

Оскільки (2.14) та (2.15) є симетричними обмеженнями за індексами i та j , то множники Лагранжа так само симетричні за цими індексами:

$$\tilde{\lambda}_{ij} = \tilde{\lambda}_{ji}. \quad (2.16)$$

Виходячи з цього, ми можемо навести матрицю

$$\tilde{\lambda}_{ij} = \tilde{\lambda}_{ji}, \quad (2.16)$$

до діагонального вигляду з вагомими власними значеннями $\hat{\lambda}_k$.

Діагоналізація виконується за допомогою перетворення:

$$w_i = \sum_k a_{ik} \xi_k, \quad (2.18)$$

де

$$\tilde{V}(\tilde{\lambda}, w) = \hat{V}(\hat{\lambda}, \xi), \quad (2.19)$$

та матриця коефіцієнтів a_{ik} ортогональна.

Перетворення (2.18) дозволяє привести розподіл (2.11) до відповідного виду (2.19), в якому перша частина докладного запису приходить до наступного виду:

$$\hat{V}(\hat{\lambda}, \xi) = \tilde{\lambda} + \sum_k \hat{\lambda}_k \xi_k^2 + \sum_{k\lambda\mu} \hat{\lambda}_{k\lambda\mu} \xi_k \xi_\lambda \xi_\mu + \sum_{k\lambda\mu\nu} \hat{\lambda}_{k\lambda\mu\nu} \xi_k \xi_\lambda \xi_\mu \xi_\nu. \quad (2.20)$$

У випадку V має поблизу $\xi = 0$ сідлову точку. Відповідно, розрізняємо позитивні та негативні λ та записуємо:

$$\hat{\lambda}_k \geq 0, k \rightarrow u \text{ (загальна кількість таких } \lambda \text{ одно } N_u), \quad (2.21)$$

$$\hat{\lambda}_k > 0, k \rightarrow s \text{ (загальна кількість таких } \lambda \text{ одно } N_s).$$

Порівняно з результатами, одержаними в мікроскопічній теорії, ми можемо використовувати термінологію теорії нерівноважних фазових переходів. Ті індекси k , які належать $\hat{\lambda} \geq 0$, ми замінимо індекси u (від англ. unstable - нестійкі) і позначимо через ξ_u параметри порядку. Якщо подивитися з іншого боку, значення k , які відповідають $\hat{\lambda} < 0$, замінимо індексом s (від англ. stable - стійкі) і позначимо через ξ_s амплітуду підлеглої моди s [4].

Враховуючи це розбиття, запишемо \hat{V} у вигляді:

$$\hat{V}(\lambda, \xi) = \tilde{\lambda} + \hat{V}_u(\lambda_u, \xi_u) + \hat{V}_s(\lambda_s, \xi_s; \xi_s, \xi_u), \quad (2.22)$$

де права частина стосується лише параметрів порядку

$$\hat{V}_u = \sum_u \hat{\lambda} \xi_u^2 + \sum_{uu'u''} \hat{\lambda} \xi_u \xi_{u'} \xi_{u''} + \sum_{uu'u''u'''} \hat{\lambda} \xi_u \xi_{u'} \xi_{u''} \xi_{u'''} \cdot \quad (2.23)$$

Що стосується \hat{V}_s , то ця частина виглядає так:

$$\hat{V}_u = \sum_s (-|\lambda_s| \xi_s^2) + \sum_{suu'} 3\hat{\lambda}_{suu'} \xi_s \xi_u \xi_{u'} + \sum_{suu'u''} 4\hat{\lambda}_{suu'u''} \xi_s \xi_u \xi_{u'} \xi_{u''},$$

з додаванням суми творів

$$\xi_s \xi_{s'} \xi_u, \xi_s \xi_{s'} \xi_u \xi_{u'}, \xi_s \xi_{s'} \xi_{s''}, \xi_s \xi_{s'} \xi_{s''} \xi_u, \xi_s \xi_{s'} \xi_{s''} \xi_{s'''} \dots \quad (2.24)$$

Інтеграл

$$\int \exp\{\hat{V}_s\} d^{N_s} \xi_s = g(\xi_u) > 0, \quad (2.25)$$

визначає лише функцію параметрів порядку ξ_u . Додамо функцію h , визначивши її співвідношенням

$$h(\xi_u) + \hat{V}_s = W_s(\xi_s | \xi_u). \quad (2.26)$$

І нову функцію W_s , яка задається співвідношенням

$$h(\xi_u) + \hat{V}_s = W_s(\xi_s | \xi_u). \quad (2.27)$$

Це визначення гарантує, що величина

$$P(\xi_s | \xi_u) = \exp\{W_s(\xi_s | \xi_u)\} \quad (2.28)$$

є нормованим у просторі підлеглих мод за будь-якого параметра порядку ξ_u . Потрібно визначити нову функцію W_u , щоб розподіл (2.22) залишався незмінним під час введення h . Зробимо це за допомогою співвідношення:

$$\tilde{\lambda} + \hat{V}_u(\hat{\lambda}, \xi_u) - h(\xi_u) = W_u(\xi_u). \quad (2.29)$$

Наприкінці цього розділу запишемо розподіл (2.22) у вигляді:

$$\hat{V}(\hat{\lambda}, \hat{\xi}) = W_u(\xi_u) + W_s(\xi_s | \xi_u). \quad (2.30)$$

Це дозволить нам отримати співвідношення

$$\exp\{\hat{V}\} = P(\xi_u)P(\xi_s | \xi_u), \quad (2.31)$$

де

$$P(\xi_u) = \exp\{W_u\}, \quad (2.32)$$

а множник $P(\xi_s | \xi_u)$ визначається співвідношенням (2.28).

Зрозуміло, що $P(\xi_s | \xi_u)$ є умовною ймовірністю, в той час як $P(\xi_u)$ – функція розподілу лише параметрів порядку. До цього моменту наш підхід був лише загальним. Цей спосіб дозволяє визначити функцію розподілу параметрів порядку, а також розподіл умовних ймовірностей підлеглих мод. У окремому випадку, співвідношення (2.31), яке записано докладно, є окремим випадком принципу підпорядкованості.

2.3 Наближення

Щоб порівняти результати мікроскопічної теорії та принцип підпорядкованості у його найнижчому наближенні, слід запровадити такі апроксимації. Припустимо, що ξ_u та ξ_s не великі та по порядку величини $\xi_s \sim \xi_u^2$. З попереднього твердження випливає, що ми нехтуємо членами ξ_u^5 , ξ_u^6 і вищого порядку в \hat{V}_s .

З умови нормування випливає, що

$$\hat{V}_s \approx V_{s, \text{прибл}} = - \sum_s |\lambda_s| [\xi_s - f_s(\xi_u)]^2, \quad (2.33)$$

де

$$f_s(\xi_u) = \frac{1}{2|\lambda_s|} \left(\sum_{uu'} 3\lambda_{suu'} \hat{\xi}_u \xi_{u'} + \sum_{uu'u''} 4\lambda_{suu'u''} \xi_u \xi_{u'} \xi_{u''} \right). \quad (2.34)$$

Звернемо увагу на те, що функція h , що входить до формули (2.26), визначається співвідношенням

$$h(\xi_u) = \sum_s |\lambda_s| f_s^s(\xi_u). \quad (2.35)$$

Слід зазначити, що є інший підхід, що дозволяє апроксимувати \hat{V}_s ще більш точному ставленні до принципу максимуму інформаційної ентропії.

Наслідуючи цей підхід, ми повинні приблизно замінити $P(\xi_s | \xi_u)$ на величину

$$\bar{P} = \exp \left\{ \bar{\lambda}(\xi_u) + \sum_s \lambda(\xi_u^-) \xi_s + \lambda_{ss}^-(\xi_u) \xi_s^2 \right\}, \quad (2.36)$$

для того, щоб були виконані обмеження

$$\int \bar{P} d^{N_s} \xi_s = 1, \quad (2.37)$$

$$\int \bar{P} \xi_s d^{N_s} \xi_s = \int P(\xi_s | \xi_u) \xi_s d^{N_s} \xi_s, \quad (2.38)$$

$$\int \bar{P} \xi_s^2 d^{N_s} \xi_s = \int P(\xi_s | \xi_u) \xi_s^2 d^{N_s} \xi_s, \quad (2.39)$$

тобто тепер нам достатньо лише того, щоб були задоволені вимоги, що містять два моменти замість усіх чотирьох. Тепер, як і має бути в апроксимації

найнижчого порядку, ми отримуємо квадратичний вираз в експоненті, що стоїть у правій частині виразу (2.36).

2.4 Просторові структури

За допомогою зазначеного вище підходу ми можемо визначати параметри порядку, підпорядковані моді та їх функції розподілу. Якщо індекс i ми ототожнюємо з вузлом ґрат, то коефіцієнти α_{ik} матриці перетворення визнають просторову структуру мод, що відповідає параметру порядку з індексом k . Таким чином, суперпозиція коефіцієнтів α_{ik} з індексом k , що проходить значення індексів параметрів порядку, задає острів мод. Відповідно до цього, ми припускаємо, що симетрія функції V порушується деяким набором параметрів порядку, що належать до мінімуму функції V . З вищесказаного випливає, що запропонована нами процедура підходить не тільки для визначення структур, що еволюціонують, керованих у фізичних системах параметрами порядку, але також дозволяють встановлювати які структури домінують у загальному наборі потенційних структур. Саме тому ми сподіваємося, що наша процедура виявиться корисною про машинну ідентифікацію образів та в теорії розпізнавання образів людиною та тваринами.

2.5 Зв'язок із теорією фазових переходів Ландау. Рівняння Фокера-Планка

Наша процедура відкриває з зовсім іншого боку теорію Ландау про фазові перетворення в системах, що знаходяться на тепловій рівновазі. Вихідним пунктом цієї теорії є тепла функція розподілу, що містить під знаком експоненти власну енергію. Послідовно, ця вільна енергія розкладається в ряд за ступенями параметрів порядку. З цього випливає, що, враховуючи моменти параметрів порядку до четвертого включно, ми приходимо до таких виразів, які

були наведені нами раніше. Таким чином, принцип максимуму інформації дозволяє нам по-новому подивитись теорію фазових переходів Ландау. Причому із цілком нестандартною інтерпретацією [5].

Як відомо, стаціонарним рішенням рівняння Фокера-Планка є саме функція, яка перебуває виходячи з принципу максимуму інформації. Логічно, що напрошується питання, чи зможемо ми вивести рівняння у нашому випадку? Для вирішення цієї проблеми приймаємо до розгляду випадок однієї змінної $\xi_u \equiv \xi$.

Вважатимемо, що загальною формою рівняння Фокера-Планка із залежним від змінної з коефіцієнтом дифузії є:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{d}{d\xi}[K(\xi)P] + \frac{d}{d\xi}D(\xi)\frac{d}{d\xi}P. \quad (2.40)$$

Якщо порівнювати стаціонарне рішення цього рівняння зі знайденою нами раніше функцією розподілу (2.32), отримаємо

$$W_u(\xi_u) = -\int \frac{K(\xi)}{D(\xi)} d\xi. \quad (2.41)$$

Можна сказати, що невідомі в даний час коефіцієнт дифузії D та дрейфовий коефіцієнт K повинні задовольняти співвідношення

$$-\frac{K}{D} = W_u'. \quad (2.42)$$

Цього можна досягти декількома способами.

За допомогою принципу максимуму інформаційної ентропії неможливо доцільно вибрати потрібні нам коефіцієнти тому, що значення K і D за будь-яких їх значеннях нічим не виділені, навіть у тому випадку, коли вони задовольняють (2.42). З цього можна зробити висновок, що нам потрібно

підібрати якийсь інший критерій. Віддаємо перевагу критерію простоти припускаючи, що:

$$D = Q = \text{const} . \quad (2.43)$$

Перепишемо початкове рівняння Фокера-Планка. Тепер воно набуває вигляду:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{d}{d\xi}[K(\xi)P] + Q\frac{d^2P}{d\xi^2}, \quad (2.44)$$

де бачимо, що Q бере участь невідомого параметра, але водночас є фіксованим.

Зазначимо, що рівняння (2.44) відповідає рівнянню Ланжевена

$$\dot{\xi} = K(\xi) + F(t), \quad (2.45)$$

у якому, слід зазначити, дрейфовий коефіцієнт визначається співвідношенням, з співвідношення (2.42):

$$K \propto -\frac{\partial W_u}{\partial \xi}. \quad (2.46)$$

У рівняння (2.45), F – гаусова сила типу білого шуму. Якщо більш детально поглянути на співвідношення (2.45) і (2.46), а також функцію W_u , що задається співвідношенням (2.41), у випадку, коли дрейфовий коефіцієнт є постійною величиною можна помітити, що отримане нами рівняння Ландау відповідає функціоналу Ландау в теорії фазових переходів роду. Це може означати лише те, що принцип, який ми розглядаємо, не цілком підходить нам. Особливо це видно, коли ми переходимо до рівнянь Фокера-Планка з багатьма змінними, оскільки в цьому випадку для коефіцієнтів D і K кількість їх можливого вибору може досягати надвеликого числа.

Було продемонстровано, що функція розподілу загальної ймовірності $P(\xi_u, \xi_s)$, яка відноситься до параметра порядку ξ_u і до амплітуд ξ_s підлеглих мод, дозволяє розподіл на вираз виду

$$P(\xi_u, \xi_s) = \prod_s P_s(\xi_s | \xi_u) f(\xi_u). \quad (2.47)$$

Ми можемо відзначити, що це вираз повністю відповідає принципу підпорядкованості мікроскопічної теорії. Тепер нам слід показати, що продемонстрований вище розподіл дає нам можливість розкласти інформацію та приріст інформації на такі частини, що одна з частин відповідатиме лише параметрам порядку, тоді як інша буде сумою інформації підлеглих мод, які будуть усереднені щодо розподілу параметрів порядку. Ми побачимо, що інформація, що стосується параметрів порядку, поблизу точок нестійкості різко змінюється. А інформація, яка стосується підлеглих мод, істотних різких змін не зазнає. З цього можна зробити висновок, що достатньо дослідити поведінку інформації, яка буде відноситися до підлеглих мод і параметрів порядку. Саме це ми й досліджуватимемо в даному розділі на прикладі широкого класу систем, яким притаманні нерівноважні фазові переходи.

Крім того, буде показано, що інформація, її приріст та ефективність можуть бути виміряні.

За визначенням, інформацією є величина

$$i = - \sum_j p_j \ln p_j, \quad (2.48)$$

а приростом інформації вважатимемо величину

$$K = \sum_j p_j \ln \frac{p_j}{P_j}. \quad (2.49)$$

В даному випадку p_j – розподіл ймовірностей станів, що характеризуються індексом j , p_j та p'_j у цій формулі – два різних розподілу ймовірності. Для того, щоб мати сильніший зв'язок з результатами, отриманими раніше, слід ототожнити індекс j з такими значеннями, які прийматимуться стохастичними змінними ξ_u, ξ_s . Як і було сказано раніше, ξ_u, ξ_s також приймають допустимі їм значення. Слід додати, що вектор стану q буде визначено у тому випадку, коли будуть відомі ξ_u і ξ_s .

2.6 Підпорядкованість інформації

2.6.1 Параметри порядку

Розподіл (2.47) дозволяє нам записати інформацію (2.48) у особливий спосіб. Для цього слід підставити розподіл (2.47) у співвідношення (2.48), замінюючи при цьому логарифм твору на суму логарифмів. Після цього ми отримаємо:

$$i = - \sum_{\xi_u, \xi_s} \prod_s P_s(\xi_s | \xi_u) f(\xi_u) [\ln f(\xi_u) + \sum_s \ln P_s(\xi_s | \xi_u)]. \quad (2.50)$$

Далі, за допомогою умови нормування

$$\sum_{\xi_s} P_s(\xi_s | \xi_u) = 1, \quad (2.51)$$

можна записати вираз (2.50) у вигляді

$$i = - \sum_{\xi_u} f(\xi_u) \ln f(\xi_u) - \sum_{\xi_u, \xi_s, s} f(\xi_u) P(\xi_s | \xi_u) \ln P_s(\xi_s | \xi_u). \quad (2.52)$$

Це слід переписати у такому вигляді

$$i = I_f + \sum_{s, \xi_u} f(\xi_u) I_s(\xi_u), \quad (2.53)$$

де

$$I_f = - \sum_{u_u} f(\xi_u) \ln f(\xi_u), \quad (2.54)$$

є інформацією, що стосується параметрів порядку.

Далі

$$I_s = - \sum_{\xi_s} P_s(\xi_s | \xi_u) \ln P_s(\xi_s | \xi_u) \quad (2.55)$$

є інформацією, що відноситься до підлеглої системи.

Далі буде продемонстровано, що поблизу точок нестійкості I_s змінюється сильно, у той час коли I_f – слабо.

Можна зазначити, що величина I_s є інформацією у тому випадку, коли ξ_u буде набувати певного значення. У нашому випадку це означає, що параметр порядку підпорядковує моді за допомогою особливого способу, що тягне за собою гарант на виникнення макроскопічної структури через самоорганізацію.

2.6.2 Приріст інформації

За визначенням (2.49) приріст інформації визначається наступним шляхом

$$K = \sum_{\xi_u, \xi_s} P_n(\xi_u | \xi_s) \ln \frac{P_n(\xi_u, \xi_s)}{P_a(\xi_u, \xi_s)}. \quad (2.56)$$

Цей вираз можна переписати у вигляді

$$K = \sum_{\xi_u, \xi_s} f_n \prod_s P_{s,n} \left[\ln f_n + \sum_{s'} \ln P_{s',n} - \ln f_a - \sum_{a'} \ln P_{s',a} \right], \quad (2.57)$$

де ми також замінюємо, як і раніше, логарифм твору на логарифм суми. Через умови нормування ми можемо записати K у вигляді суми

$$K = \sum_{\xi_u} f_n \ln \frac{f_n}{f_a} + \sum_s \sum_{\xi_u} f_n \sum_{\xi_u} P_{s,n} \ln \frac{P_{s,n}}{P_{s,a}}, \quad (2.58)$$

приймає кінцеву форму

$$K = K_f + \sum_s \sum_{\xi_u} f_n K_s, \quad (2.59)$$

де K_f є величиною

$$K_f = \sum_{\xi_u} \ln \frac{f_n}{f_a}, \quad (2.60)$$

а K_s є величиною

$$K_s = \sum_{\xi_s} P_{s,n}(\xi_s | \xi_u) \ln \frac{P_{s,n}(\xi_s | \xi_u)}{P_{s,a}(\xi_s | \xi_u)}. \quad (2.61)$$

2.6.3 Нерівноважні фазові переходи

Цей розділ показує важливість знайдених нами формул з прикладу нерівноважних фазових переходів. Нехай, власне число λ_u буде дійсним. Вкажемо типові еволюційні рівняння для системи, котрій характерні нерівноважні фазові переходи. Ці рівняння можна записати як

$$\xi_u \lambda_u \xi_u + h(\xi_u, \xi_s) + F_u(t), \quad (2.62)$$

$$\xi_s = \lambda_s \xi_s + g_s(\xi_u) + \xi_s k_s(\xi_u) + \dots + F_s(t). \quad (2.63)$$

Усі величини, що стоять у правих частинах рівнянь (2.62) і (2.63) залежатимуть від керуючого параметра, у разі, якщо система керуватися цим параметром поза системою. Слід зазначити, що величини залежали по-різному [6].

Якщо нормувати параметр, що управляє так, щоб нестійкість була нульовою, то λ_u і λ_s будуть залежати від параметра а наступним чином:

$$\lambda_u \sim \alpha^\chi, \quad \lambda_s = \lambda_s(0) + O(\alpha) \approx \lambda_s(0), \quad (2.64)$$

де χ буде деяким позитивним числом. Зрозуміло, що λ_u буде дуже чутливим до будь-яких змін параметра α . В той самий час λ_s у свою чергу залежатиме дуже слабо, оскільки головний член поділу буде ненульовою константою. Аналогічно можна сказати, що функції h_u, g_s, k_s, F_u, F_s будуть слабо залежали від α . Щоб наш приклад був максимально наочним, слід застосувати принцип підпорядкованості у його головної апроксимації. Це дозволить породити члени, які знаходяться методом адіабатичного виключення змінних, використовуючи тотожність.

$$\xi_s = 0. \quad (2.65)$$

Цей спосіб дозволить нам знайти члени рішення рівняння (2.63)

$$\xi_s \approx -\frac{1}{\lambda_s(0)} g_s(\xi_u) - \frac{1}{\lambda_s(0)} F_s(t). \quad (2.66)$$

До цього ми запровадили відповідний розподіл умовної ймовірності $P_s(\xi_s | \xi_u)$:

$$P_s(\xi_s | \xi_u) = N \exp \left\{ - \left[\xi_s + \frac{g_s(\xi_u)}{\lambda_s} \right]^2 Q^{-1} \right\}. \quad (2.67)$$

Підставимо цей вираз у формулу (2.55), який визначатиме I_s . Але при введенні нової змінної

$$\xi'_s = \xi_s - \frac{g_s(\xi_u)}{|\lambda_s|}, \quad (2.68)$$

ми маємо можливість виключити залежність розподілу ймовірності підлеглих змінних від ξ_u , так, що інформація I_s більше не залежатиме від ξ_u . Тоді у виразі (2.53) виконаємо інтегрування по ξ_u у другому члені. Отримаємо

$$I = I_f + \sum_s I_s, \quad (2.69)$$

де друга частина не залежить від $\alpha \in$, що поблизу точок нестійкості інформація залежить тільки від змін параметра порядку:

$$I(\alpha_1) - I(\alpha_2) \approx I_f(\alpha_1) - I(\alpha_2). \quad (2.70)$$

Використовуємо наближення такого ж типу та запишемо приріст інформації у вигляді

$$K = K_f = \int d^n \xi_u f(\xi_u, \alpha_2) \ln \frac{f(\xi_u, \alpha_2)}{f(\xi_u, \alpha_1)}. \quad (2.71)$$

Надалі буде показано, що I_s монотонно змінюється разом із параметром λ , у той час як в залежності I_s від параметра α проглядається свого роду сингулярність.

2.7 Одномода нестійкість

Було показано, що зміна інформації та приріст інформації всієї системи у точок нестійкості практично збігаються із змінами інформації та приросту інформації відповідно до параметрів порядку. У цьому розділі буде показано обчислення K за допомогою функції розподілу, що відноситься до параметра порядку. Функція розподілу має вигляд:

$$f(\xi) = N \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4). \quad (2.72)$$

Після підстановки експоненти (2.72) визначення інформації (2.54) отримуємо вираз

$$I_f = -\ln N - \alpha \langle \xi^2 \rangle + \beta \langle \xi^4 \rangle, \quad (2.73)$$

у якому для точності скористаємося позначенням

$$\langle \xi^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \xi^n d\xi. \quad (2.74)$$

Аналогічно, приріст інформації набуває форми

$$K = (f_\alpha, f_{\alpha_0}) = \int f_\alpha \ln \frac{f_\alpha}{f_{\alpha_0}} d\xi = \ln N(\alpha) - \ln N(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \langle \xi^2 \rangle_\alpha. \quad (2.75)$$

2.8 Ефективність та приріст інформації

Шляхом дослідження великої кількості систем самоорганізованих було встановлено той факт, що мірою макроскопічної дії таких систем може бути квадрат параметра порядку.

Якщо враховувати лазер, то як параметр порядку береться мода поля, а дія лазера може бути виміряна квадратом порядку амплітуди моди поля. Щоб далі продовжувати дослідження, слід вести нову величину.

$$\Omega(\alpha) = \langle \xi_u^2 \rangle, \quad (2.76)$$

яку ми беремо як міру макроскопічної дії, а точніше роботи нашої системи. Середнє значення визначається величиною

$$\langle \xi^2 \rangle = \int \xi^2 f(\xi) d\xi, \quad (2.77)$$

в якій ми використовуємо явний вид функції розподілу

$$f(\xi) = N \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4), \quad (2.78)$$

з нормованим множником, що визначається за допомогою виразу

$$N^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) d\xi. \quad (2.79)$$

Далі визначатимемо ефективність W як швидкість вимірювання величини Ω при зміні керуючого параметра α . Оскільки у великій кількості самоорганізованих систем цей параметр пов'язаний з потужністю вхідних даних. Тому ми інтерпретуємо параметр α як вхідна потужність:

$$W = \frac{d\Omega}{d\alpha}. \quad (2.80)$$

Зі співвідношення (2.77) – (2.79) ми можемо побачити, що

$$W = \frac{\int \xi^4 \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) d\xi}{\int \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) d\xi} - \frac{\left[\int \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) \xi^4 d\xi \right]^2}{\left[\int \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) d\xi \right]^2}. \quad (2.81)$$

Перепишемо останнє співвідношення у вигляді

$$W = \langle \xi_u^4 \rangle - \langle \xi_u^2 \rangle^2. \quad (2.82)$$

Якщо керуючий параметр α входить у функцію розподілу не явно:

$$\exp[\lambda(\alpha) \xi_u^2 - \beta \xi_u^4], \quad (2.83)$$

то співвідношення (2.82) буде доцільно замінити на

$$W = \frac{d\lambda}{d\alpha} (\langle \xi_u^4 \rangle - \langle \xi_u^2 \rangle). \quad (2.84)$$

Можна сказати, що розрахунок величини W вище та нестійкої точки нижче не займає великої кількості робочого ресурсу. Результати розрахунків будуть показані наочно у подальшій роботі.

Обчислимо величину інформації I_f . Якщо враховувати співвідношення (2.79), за допомогою формули (2.78) ми отримуємо

$$-I_f = \ln N + \alpha \langle \xi^2 \rangle - \beta \langle \xi^4 \rangle. \quad (2.85)$$

Слід зазначити, що, незважаючи на те, що другий та четвертий моменти можуть бути виміряні безпосередньо, виникає потреба у зв'язку $\ln N$ із вимірними вже величинами.

Для цього нам насамперед слід продиференціювати $\ln N$ за керуючим параметром α :

$$\frac{d \ln N}{d\alpha} = - \frac{\int \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) \xi^2 d\xi}{\int \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) \xi^2 d\xi} \quad (2.86)$$

і записати це співвідношення у вигляді

$$\frac{d \ln N}{d\alpha} = - \langle \xi^2 \rangle. \quad (2.87)$$

Після інтегрування цього виразу ми отримуємо

$$\ln N = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \langle \xi \rangle^2 d\alpha + \ln N(\alpha_0). \quad (2.88)$$

Далі нам слід виконати підстановку виразу (2.88) у вираз (2.84), щоб зробити перетворення останнього на вигляд

$$-I_f = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \langle \xi^2 \rangle d\alpha + \ln N(\alpha_0) + \alpha \langle \xi^2 \rangle - \beta \langle \xi^4 \rangle. \quad (2.89)$$

Обчислюємо відповідну інформацію при нульовому параметрі, що управляє, щоб виключити $\ln N$:

$$-I_f(\alpha) + I_f(\alpha_0) = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \langle \xi^2 \rangle d\alpha + \alpha \langle \xi^2 \rangle_{\alpha} - \beta \langle \xi^4 \rangle_{\alpha} - \alpha_0 \langle \xi^2 \rangle_{\alpha_0} + \beta \langle \xi^4 \rangle_{\alpha_0}. \quad (2.90)$$

Приріст інформації записуємо наступним чином:

$$K = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \langle \xi^2 \rangle_{\alpha} d\alpha + (\alpha - \alpha_0) \langle \xi^2 \rangle_{\alpha}. \quad (2.91)$$

2.9 Розрахунок нижнього та верхнього порогів

Слід звернути увагу на те, що параметр порядку безперервний. У цьому випадку інформація набуває вигляду

$$I_f = -\int d\xi f(\xi) \ln f(\xi) - \ln \varepsilon, \quad (2.92)$$

де ε є величиною, що ставить похибку розрахунків. Потім обчислюємо величину (2.73):

$$I_f = -\ln N - \alpha \langle \xi^2 \rangle + \beta \langle \xi^4 \rangle - \ln \varepsilon. \quad (2.93)$$

При розрахунку нижнього порога параметр α є негативним, його абсолютна величина надто велика.

Саме тому у співвідношенні (2.72) вагомим буде тільки член, який квадратичний ξ . Це означає, що слід розрахувати інформацію (2.93) для гаусівської функції

$$f \approx N \exp(-|\alpha| \xi^2). \quad (2.94)$$

Нормальний множник дорівнюватиме

$$N = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\pi}}. \quad (2.95)$$

Інтеграли, що входять до інформації:

$$|\alpha| \langle \xi^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad (2.96)$$

$$\beta \langle \xi^4 \rangle = \frac{3\beta}{(2|\alpha|)^2}. \quad (2.97)$$

Кінцевий результат запишемо за умови, що за досить великих значень $|\alpha|$ можна не брати до уваги (2.97):

$$I_f = -\frac{1}{2} \ln |\alpha| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \pi - \ln \varepsilon. \quad (2.98)$$

2.10 Точні аналітичні розрахунки в випадку одного параметру порядку

З іншого боку, якщо досліджувати верхні пороги, можна зазначити, що з досить великих значеннях управляючого параметра можна апроксимувати

гаусівськими функціями [7]. Щоб це зробити, скористаємося методом перевалу та запишемо вираз (2.72) у вигляді:

$$f(\xi) = N \exp[g(\xi)]. \quad (2.99)$$

Зрозуміло, що

$$g(\xi) = \alpha \xi^2 - \beta \xi^4. \quad (2.100)$$

Екстремуми цієї функції та функції f визначаються за допомогою умови

$$g'(\xi) = 0 = 2\alpha\xi - 4\beta\xi^3,$$

де ненульове рішення дорівнюватиме

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}}.$$

Введемо нову змінну η при позитивних значеннях ненульового рішення:

$$\xi = \xi_0 + \eta.$$

Тепер розподіл

$$g(\xi) = g(\xi_0 + \eta) = g(\xi_0) + g'(\xi_0)\eta + \frac{1}{2}g''(\xi_0)\eta^2,$$

дозволяє нам записати функцію (2.99) у вигляді:

$$f = N \exp\left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} - 2\alpha\eta^2\right),$$

у якому нормування слід обирати на інтервалі $-\infty < \xi < +\infty$. Тоді маємо, що

$$N = \frac{2\alpha}{\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right),$$

буде виразом, за допомогою якого визначається нормувальний множник.

Оцінімо інформацію для випадку, коли може реалізуватися лише один максимум. Інформація I_f дорівнюватиме:

$$I_f = \frac{1}{2} \ln \alpha - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} - \ln \xi.$$

Трапляються такі випадки, коли система може бути в одному зі станів. Це означає, що функція розподілу має два максимуми. У цьому випадку нормуючий множник дорівнюватиме:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N \exp(\alpha\xi^2 - \beta\xi^4) d\xi = 1.$$

Так як максимуми розташовані симетрично щодо початку $\xi = 0$, Замінюємо ліву частину попередньої умови інтегралом:

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha\xi^2 - \beta\xi^4) d\xi.$$

Як показано вище, цей інтеграл може бути апроксимований величиною:

$$\exp\left(\frac{\alpha^2}{4\beta}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\alpha\eta^2) d\eta.$$

Після розрахунків даного інтегралу отримуємо результати, наведені на рис. 2.1.

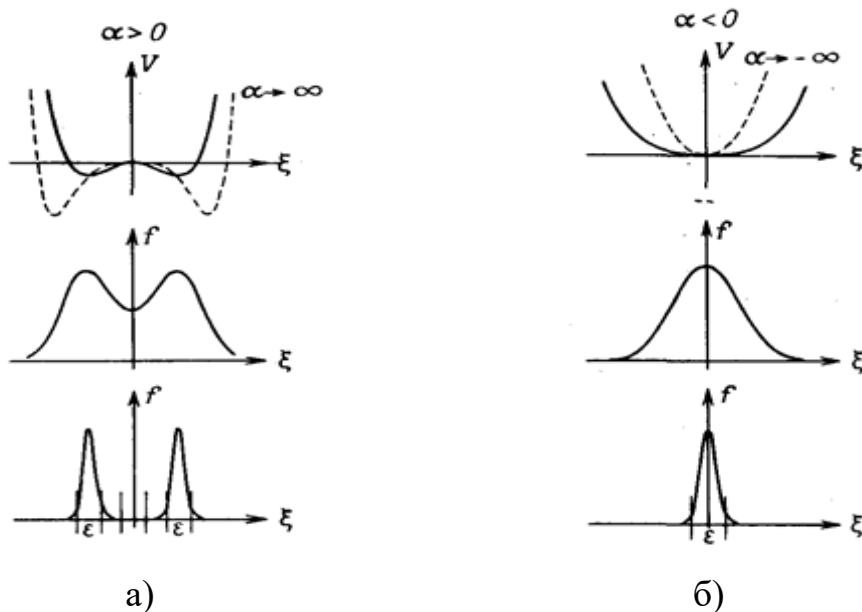


Рисунок 2.1 – Графіки розподілу $f(\xi)$ у багатомодовому випадку:

а) перший стан, нуль бітів; б) другий стан, один біт

Висновки за розділом 2

Відомо, що функція розподілу (2.99) за умови (2.100) може бути інтерпретована як функція розподілу для координати частинки, яка рухається в потенційній ямі та на неї взаємодіє додаткова сила, що флукутує. З лівого боку показаний потенціал при негативних α . Зрозуміло, що є лише один мінімум, відповідний якому може релаксувати одна частка. З правого боку показаний потенціал за умови, що керуючий параметр більший за нуль. В даному випадку видно, що потенціал став крутішим і має два мінімуми.

Для того щоб розрахувати інформацію, ми повторюємо всі етапи розрахунків та отримуємо кінцевий результат:

$$I_f = -\frac{1}{2}2\alpha + \frac{1}{2}\ln \pi + \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln \varepsilon.$$

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Система Mathematica була створена американською компанією Wolfram Research, Inc. Основним автором розробки є відомий фізик та математик з однойменним прізвищем Стефан Вольфрам (Stephen Wolfram). Концепція системи Mathematica полягає в системі символної математики, в якій можна обробляти різні аспекти технічних обчислень і не тільки. Особливістю пакета є застосування символної комп'ютерної мови, що дозволяє маніпулювати широким діапазоном об'єктів, необхідних досягнення універсальності, обов'язкових для технічних обчислень, використовуючи лише невелику кількість примітивів. Робота з численними методами та програмування нових алгоритмів тут можлива і навіть продуктивніша, ніж при використанні звичайних алгоритмічних мов. Тому для роботи обрано вільно розповсюджений (з обмеженим терміном користування) сучасний пакет Mathematica.

Приклад використання у поточному дослідженні – див. додаток А.

Висновки за розділом 3

Завдання роботи складається з розв'язку низки задач, кожна з котрих може бути вирішена за допомогою найбільш адекватного інструментарію – інтерактивно, чи програмно, чи навіть аналітично. Для задач, де потрібні графічні заходи та програмні обчислення, більш підходить Mathematica. Цім міркуванням і обумовлено вибір програмного забезпечення.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Чисельні результати

Щодо інформації, яка була продемонстрована у минулому розділі, ми можемо зазначити, що інформація переходить від негативних значень параметра a до позитивних у зв'язку з появою максимуму. Таку залежність інформації від параметра, що управляє, можна зрозуміти з фізичних висновків. Поблизу точки, коли параметр, що управляє, дорівнює нулю, виникають критичні флуктуації, добре нам відомі по теорії фазових переходів. Саме вони зумовлюють розтягнення функції f та збільшення інформації. Коли керуючий параметр перетворюється на область негативних значень, то функція f буде зосереджена близько одного максимуму, а інформація падатиме, тоді як із зростаючих позитивних значеннях керуючого параметра функції f з'являються два різних максимуму, а інформація знову падає, хоча й більше найвищого рівня [8]. Для ясності розрахуємо приріст інформації, який визначається наступним виразом:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi f_{\alpha} \ln \frac{f_{\alpha}}{f_{\alpha_0}}, \quad (4.1)$$

де як f_{α} приймається функція:

$$f_{\alpha} = N(\alpha) \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4).$$

4.2 Аналіз отриманих результатів

Були продемонстровані детальні зміни інформації в системі, що самоорганізується, яка описується одним параметром порядку i для якої

характерний фазовий перехід другого роду. Видно, що зміна інформації є несуттєвою, але в той же час повністю відповідає нашим очікуванням. Система властива зберіганню одного біта інформації, якщо з допомогою порушення симетрії самої системи ми можемо створювати одне із двох можливих станів. Для нас це головна причина, чому саме ми віддаємо перевагу інформації перед поняттям ентропії, коли застосовуємо формулу (2.92) до систем, які далекі від теплової рівноваги. Крім того, поведінка системи поблизу порога показує нам те, що інформація може сильно зростати через критичні флуктуації. У разі поняття «ентропії» може здаватися краще. Але, як було показано в главі 2, обмеження, при яких потрібно знайти максимум інформаційної ентропії, сильно відрізняться для систем, що знаходяться в тепловій рівновазі і не далеко від них. За теорією нерівноважних фазових переходів відомо, що в області $\alpha > 0$ виникають упорядковані структури. Результати розрахунків, зображені на рисунку 4.1, показують нам, що у цьому упорядкованому стані інформаційна ентропія вище, ніж у неупорядкованому стані. Цей висновок відрізняється від інтуїтивного висновку і деякі дослідники вважають, що для переходу з неупорядкованого стану в упорядкований як у рівноважному, так і в нерівноважному випадку $dS > 0$. Але робити такий висновок недоцільно. Помилковість даного твердження буде наочною для дослідження термодинаміки, згідно з якою ентропія і безлад у замкнутій системі можуть тільки зростати. Це означає, що й повну енергію системи зберігаємо постійної і порівнюємо два стану, то стан із більшою ентропією відповідає більшому безладді.

4.2.1 Точні аналітичні розрахунки у разі одного параметра порядку

У цьому підрозділі буде продемонстровано точні аналітичні розрахунки для інформації, приросту інформації та ефективності. Всі ці величини ми обчислюємо для

$$f(\xi) = N \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4). \quad (4.2)$$

Оскільки другий момент $\langle \xi^2 \rangle_\alpha$ є мірою інтенсивності випромінювання, тобто всієї виконаної роботи, про ефективність можна судити за величиною:

$$W = \frac{d\langle \xi^2 \rangle_\alpha}{d\alpha}. \quad (4.3)$$

Використовуючи формулу (4.2), розраховуємо ефективність W :

$$W = \langle \xi^4 \rangle_\alpha - \langle \xi^2 \rangle_\alpha^2. \quad (4.4)$$

Основним математичним інструментом, яким ми будемо користуватися для обчислення співвідношення між I_f , K_f , W та керуючими параметрами, буде стандартний інтеграл:

$$\int_0^\infty x^n \exp(\alpha x^{2m} - \beta x^{4m}) dx = (2m)^{-1} (2\beta)^{-(n+1)/4m} \Gamma\left(\frac{n+1}{2m}\right) D_{-(n+1)/2m}(\lambda) \exp(\lambda^2/4), \quad (4.5)$$

де $\lambda = -\alpha/\sqrt{2\beta}$;

Γ – гама функція;

D – функція параболічного циліндра.

Так як

$$N^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\alpha \xi^2 - \beta \xi^4) d\xi, \quad (4.6)$$

це нам дозволяє записати нормувальні:

$$N = (2\beta)^{1/4} \pi^{-1/2} e^{-x^2/4} [D_{-1/2}(\lambda)]^{-1}. \quad (4.7)$$

Аналогічним способом можна обчислити другий та четвертий моменти функції розподілу $f(\xi)$:

$$\langle \xi^2 \rangle = (2\beta)^{-1/2} \frac{D_{-3/2}(\lambda)}{2D_{-1/2}(\lambda)}, \quad (4.8)$$

$$\langle \xi^4 \rangle = (8\beta)^{-1} \frac{3D_{-5/2}(\lambda)}{D_{-1/2}(\lambda)}. \quad (4.9)$$

Щоб розрахувати інформацію, пов'язану з функцією розподілу, нам достатньо підставити вирази N , $\langle \xi^2 \rangle$, $\langle \xi^4 \rangle$ у формули I_f , K_f та W :

$$I_f = 0,3991 - \frac{1}{4} \ln \beta + \frac{1}{4} \lambda^2 + \ln D_{-1/2}(\lambda) + \frac{(\lambda/2)D_{-3/2}(\lambda) + (3/8)D_{-5/2}(\lambda)}{D_{-1/2}(\lambda)}.$$

Аналогічним шляхом визначаємо приріст інформації:

$$K_{ff_0} = \frac{\alpha_0^2 - \alpha^2}{8\beta} + \ln \frac{D_{-1/2}(\lambda_0)}{D_{-1/2}(\lambda)} - (\lambda - \lambda_0) \frac{D_{-3/2}(\lambda)}{2D_{-1/2}(\lambda)},$$

де $x_0 = -\alpha_0 / \sqrt{2\beta}$.

Ефективність системи:

$$W = \frac{3D_{-5/2}(\lambda)D_{-1/2}(\lambda) - [D_{-3/2}(\lambda)]^2}{8\beta [D_{-1/2}(\lambda)]^2}.$$

Слід зазначити, що наведені у розділі формули містять аналітичні функції управляючих параметрів α і β , причому $\beta \neq 0$, $\alpha < \infty$. Бачимо, що інформація, приріст та ефективність залежать від λ дуже складним способом. Оскільки D – функція параболічного циліндра, що відноситься до спеціальних функцій математичної фізики, то вирази I_f, K_f та W не підлягають спрощенню. Ми можемо тільки затабулювати функції, що входять в них, залежать від β .

Далі будуть продемонстровані три випадки, які потребують додаткового дослідження

4.2.2 Точка нестійкості

Функція параболічного циліндра пов'язана із функцією Вебера співвідношенням

$$D_{-pp-1/2}(\lambda) = U(p, \lambda).$$

Використовуючи властивість Вебера у точці нестійкості $\alpha=0$:

$$U(p, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{p/2+1/4}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-1},$$

ми можемо відзначити, що нормувальна константа N досягає максимуму

$$N_c = 0,5516\beta^{1/4}.$$

Другий та четвертий моменти рівні, відповідно:

$$\langle \xi^2 \rangle_c = 0,3380\beta^{-1/2},$$

$$\langle \xi^4 \rangle_c = 0,2550\beta^{-1}.$$

Відповідно до цього маємо, що інформація, приріст інформації та ефективність рівні:

$$I_c = 0,8449 - \frac{1}{4} \ln \beta,$$

$$K_{ff_c} = 0,5949 - \frac{1}{4} \ln \beta + \ln N + \alpha \langle \xi^2 \rangle_\alpha,$$

$$W_c = 0,1358\beta^{-1}.$$

Висловлювання інформації та ефективності залежать тільки від β і являють собою максимуми своїх функцій по α .

Для того щоб отримати значення K в околі порогу, ми поклали $\beta = 1$ та обчислили K при фіксованому значенні α_0 і параметру, що управляє, змінюється на проміжку від -15 до 15 . (див. додаток Б).

4.2.3 Наближення до точки нестійкості

Скористаємося наступним асимптотичним уявленням функції Вебера:

$$U(p, \mp|\lambda|) \approx \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2^{p/2+1/4}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right)^{-1} \right] e^{\mp\sqrt{p\lambda}}.$$

Користуючись цією функцією знаходимо головні члени, що описують поведінку величин N , $\langle \xi^2 \rangle$, $\langle \xi^4 \rangle$ поблизу $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
 N &\approx N_c e^{-\lambda^2} / 4, \\
 \langle \xi^2 \rangle &\approx \langle \xi^2 \rangle_c e^{\mp \lambda}, \\
 \langle \xi^4 \rangle &\approx \langle \xi^4 \rangle_c e^{\mp \sqrt{2\lambda}}.
 \end{aligned}$$

У цих формулах знак мінус відповідає $\lambda > 0$ ($\alpha < 0$), а знак плюс – зворотної нерівності $\lambda < 0$ ($\alpha > 0$).

Відповідно до цього маємо, що інформація, приріст інформації та ефективність рівні:

$$I_f \approx I_c + \lambda^2 / 4 + 0,478\lambda \exp(\mp \lambda) + 0,250 \left[\exp(\mp \sqrt{2\lambda}) - 1 \right],$$

$$K_{ff_0} \approx K_{ff_c} + \frac{\alpha_0^2}{8\beta} - \alpha_0 \langle \xi^2 \rangle_\alpha,$$

$$W \approx W_c e^{-\sqrt{2\lambda}}.$$

4.2.4 Область стійкості

У цьому випадку ми відходитимемо від точки нестійкості. Відповідний розподіл Вебера має вигляд:

$$U(p, \lambda) \approx e^{-\lambda^{2/4}} \lambda^{-p-1/2},$$

в якому старшому ступені параметра ($1/\lambda$) відкинути. Далі отримуємо:

$$N \approx (2\beta)^{1/4} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/2},$$

де очевидним буде той факт, що потрібна умова $\lambda < 0$. Аналогічно отримуємо вирази для другого та четвертого моментів:

$$\langle \xi^2 \rangle \approx \frac{1}{2} (2\beta)^{-1/2} \lambda^{-1},$$

$$\langle \xi^4 \rangle \approx \frac{3}{8} \beta^{-1} \lambda^{-2}.$$

Підставляючи ці висловлювання у формулу знаходимо, що інформація, приріст інформації та ефективність рівні:

$$I_f = 0,5724 - \frac{1}{2} \ln \lambda - \frac{1}{4} \ln(2\beta) + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \lambda^{-2},$$

$$K \approx \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\alpha_0} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0} \right),$$

$$W \approx \frac{1}{4} \beta^{-1} \lambda^{-2}.$$

Проаналізувавши інформацію, яка була висвітлена в цьому розділі, можна зробити висновок, що в околицях точки нестійкості інформація та ефективність системи зростають експоненціально як функція від енергії на вході. З цього випливає, що з високою ймовірністю придушуються вклади модних підлеглих. З іншого боку, далеко від точки нестійкості вони зменшуються як квадрат енергії на вході σ .

Тому в цій галузі знову посідають своє місце підлегли моди. Слід зазначити, що величина $\langle \xi^2 \rangle^2 / \langle \xi^4 \rangle$ має постійне значення в обох межах. В околиці точки воно дорівнюватиме 0,4570, що показує нам набагато більшу інтенсивність, ніж в області стійкості, де це ж саме відношення дорівнює тільки 0,083.

4.3 Закон розподілу ризику аварії

Існує думка, що об'єкти, що мають достатній запас стійкості до зовнішніх факторів, також надійні і до помилок людини. На жаль, це твердження не підтверджується тому, що достатній запас стійкості не може компенсувати похибки оператора. Слід зазначити, що саме помилка людини є найчастішою причиною аварій. За рахунок помилок людини фактична ймовірність аварії P_o зростає у кілька разів, згідно з теоретичною ймовірністю P_T . Цей факт зображено на рисунку 4.1. На ньому наведено закони розподілу взаємодій F на об'єкт та їх опір S . Людські похибки розмивають закон розподілу опору об'єкта зовнішньою взаємодією (пунктирна лінія на рисунку 4.1) [9].

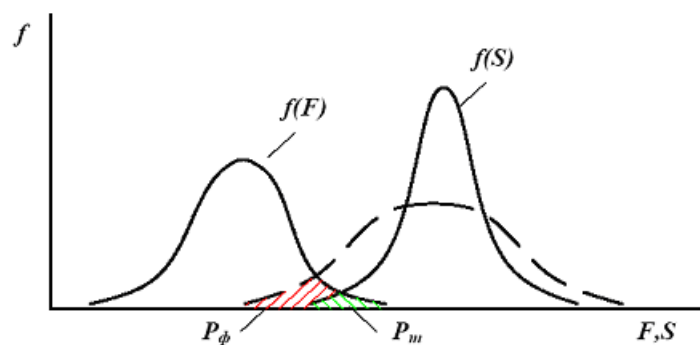


Рисунок 4.1 – Теоретична та фактична ймовірність аварії

Фактична ймовірність аварії може бути записана як $P_o = P_T + P_d$, де P_d – додаткова ймовірність аварії з допомогою помилок людей.

Для визначення цієї ймовірності використовується теорема гіпотез, що дозволяє нам перерахувати апріорні ймовірності у зв'язку з інформацією про допущені похибки. Вводяться дві протилежні події: C – помилки є, C^* – помилок немає. Ці події є повною групою несумісних подій, що ідентифікуються в процесі роботи.

Приймаються такі значення:

- а) $P(C^*) = v$ – ймовірність того, що помилок немає;
- б) $P(C) = (1-v)$ – ймовірність протилежної події.

Апріорні ймовірності настання аварії невідомі і відповідно дорівнюють P_T і $(1-P_T)$. З формули Байєса знаходимо наступне співвідношення:

$$P_d = P_T P(C/A) / [P_T P(C/A) + (1-P_T)P(C/A^*)], \quad (4.10)$$

де $P(C/A)$ - ймовірність події C за умови, що аварія буде;

$P(C/A^*)$ – ймовірність за умови, що аварії не буде.

Прийоми нечіткої логіки дозволяють прийняти як гіпотезу той факт, що умовні ймовірності $P(C/A^*) = \nu$, а $P(C/A) = 1-\nu$. Після встановлення цих нерівностей у байєсовське співвідношення з урахуванням того, що ймовірність P_T має порядок $\sim 10^{-6}$, отримуємо, $P_d = P_T (1-\nu) / \nu$. Добуток P_d і P_T дає $P_{\phi}/P_T = 1/\nu$, у якому під параметром ν слід приймати рівень конструктивної надійності об'єкта.

Настільки малі ймовірності, якими є P та P_T можуть бути зрозумілими практиками тільки через своє ставлення, яке є цілою величиною. Тут важливим фактором є те, що ймовірність P_T існує на генетичному рівні і досягається лише в тому випадку, якщо при побудові об'єкта не буде порушено вимог проекту.

Так як величина P_d завжди буде більше 1 і показує на скільки фактичний ризик виникнення аварії більший за практичний, вона є інтегральним показником технічного стану об'єкта і може бути прийнята за величину ризику аварії:

$$r = P_d / P_T = 1/\nu. \quad (4.11)$$

Для пошуку на необмеженій множині нових об'єктів закону розподілу щільності ймовірностей випадкової величини r за відсутності статистичних даних про її можливі значення сформовані такі аксіоми.

Аксіома 1. Імовірність значень $r \leq 1$ дорівнює нулю.

Аксіома 2. Крива розподілу асиметрична; мода випадкової величини r зсунута вліво від середнього значення.

Даним аксіом відповідає однопараметричний розподіл

$$f(r) = (r-1) / \sigma^2 \exp[-(r-1)^2 / 2\sigma^2], \quad (4.12)$$

Відомо, що у даному розподілі параметр σ пов'язаний з математичним очікуванням ризику аварії R за співвідношенням:

$$R = 1 + 1,25\sigma. \quad (4.13)$$

Скористаємося наступною формулою для розрахунку середнього значення ризику:

$$R = 1/M_v, \quad (4.14)$$

де M_v – середнє значення випадкової величини в межах від 0 до 1

Стандартні ризики аварій – це середні значення ризику, при досягненні яких об'єкт перетворюється на якісно новий стан. Ці ризики використовуються для формування потреб рівня конструкційної безпеки об'єктів в оцінці їх технічного стану.

Для їхнього пошуку використовують закон розподілу (4.3). При цьому нормальний ризик аварії дорівнює величині характерного ризику нових об'єктів, показником якого можуть бути середні значення закону розподілу ризику аварії (рисунок 4.2).

Фактична ймовірність аварії об'єкта після закінчення будівництва в середньому збільшується вдвічі порівняно з ймовірністю, яку закладають в об'єкт при проектуванні.

Закон розподілу ризику аварії збудованого об'єкта в процесі експлуатації розмивається. Причинами цього можуть бути порушення правил експлуатації, старіння та пошкодження з часом опорних конструкцій.

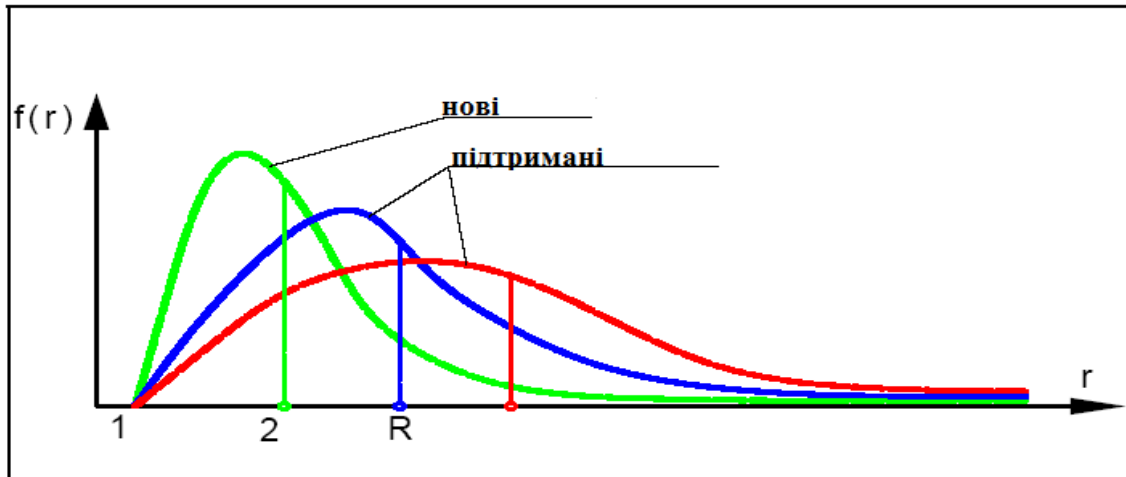


Рисунок 4.2 – Вид закону розподілу ризику аварії для нових об'єктів у процесі експлуатації

Внаслідок цього середнє значення ризику зміщується вправо. При цьому ступінь невизначеності технічного стану каркасу збільшується. У загальному випадку інформаційна ентропія закону розподілу визначається за такою формулою:

$$H = - \sum P(A_i) \log_2 P(A_i), \quad (4.15)$$

де $P(A_i)$ - ймовірність події, суть якої полягає в тому, що ризик знаходиться в i -му діапазоні значень.

На цьому рисунку зображено графік функції $H(R)$, побудований на основі машинного експерименту з формулами (4.11), (4.12) та (4.15). Отриманий графік апроксимований рівнянням виду:

$$H(R) = \log 2,15 R. \quad (4.16)$$

Для практичного застосування цього закону його теоретична крива, зображена на рисунку 4.3, поділена на три лінійні частини. Можна побачити, що на місці сходження швидкість ентропії змінюється стрибками.

Зміни технічного стану об'єкта змінюються залежно зміни швидкості ентропії [10]. Наше дослідження та аналіз результатів дозволяє нам прийняти рішення про місцезнаходження, які показані на рисунку 4.4.

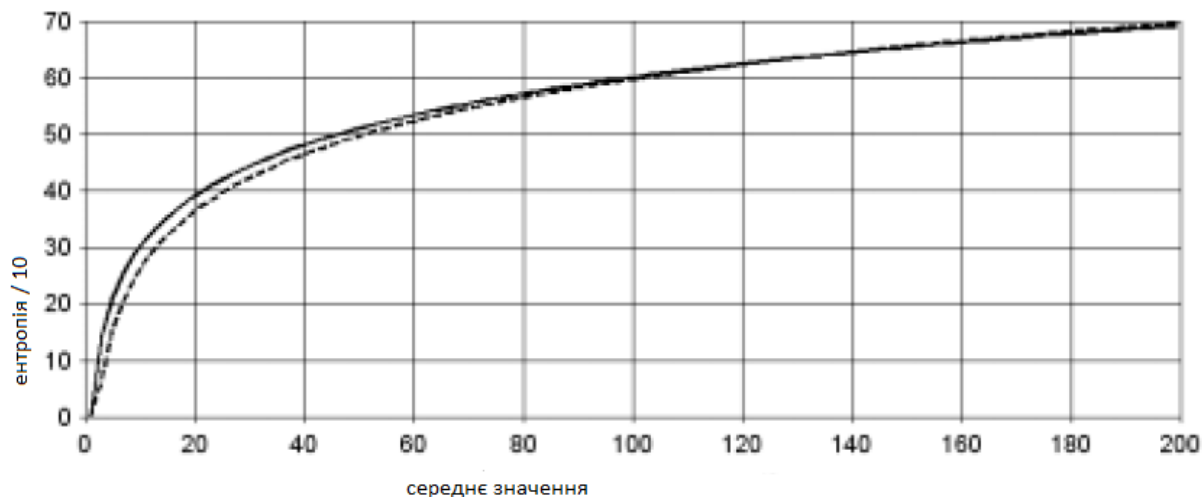


Рисунок 4.3 – Залежність ентропії від середнього ризику аварії

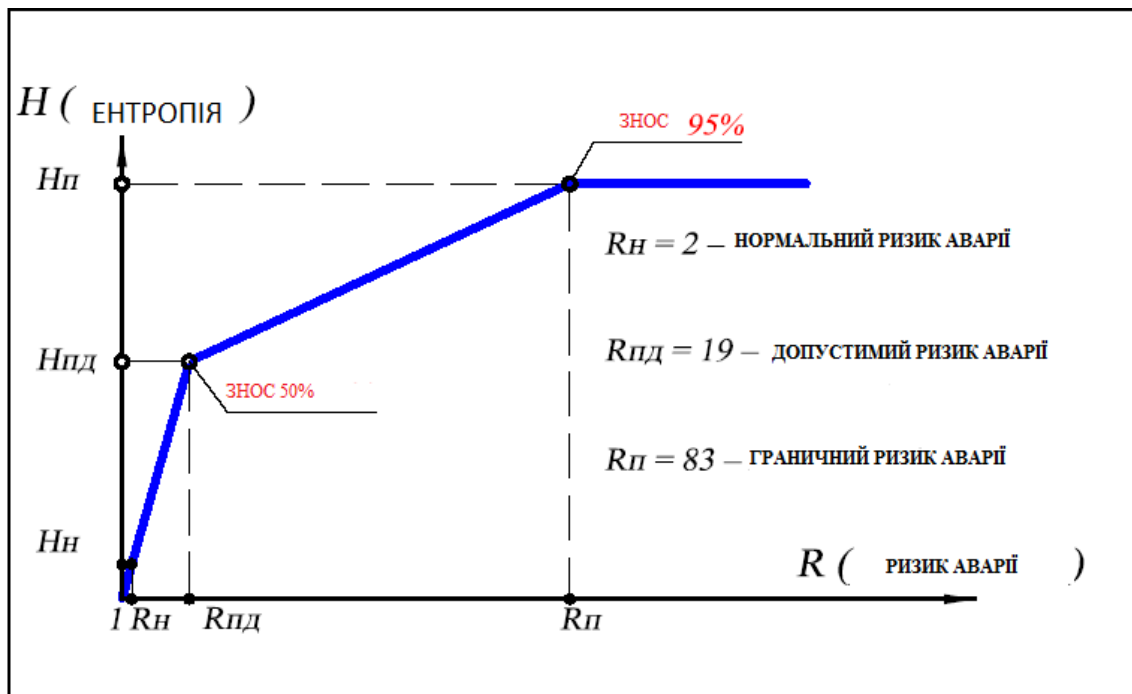


Рисунок 4.4 – Модель деградації об'єкта та порогові значення ризику аварії

Розглядаючи модель, зображену рисунку 4.4, можна дійти невтішного висновку, що час експлуатації об'єкта з моменту закінчення будівництва до

досягнення першої точки ризику аварії ($R = 19$) визначає ресурс T_6 . У цей період експлуатації через те, що відмови відсутні, можна стверджувати, що об'єкт стійкий також і до не врахованих при проектуванні навантажень. Ці навантаження виникають у надзвичайних ситуаціях. На даному проміжку можна стверджувати, що стан об'єкта буде безпечним [11].

4.4 Моделі для ліквідації аварій в системі «людина-машина-середовище»

Модель 1. Розглядається ситуація, типова для одноканальних систем масового обслуговування без черги: людина відповідає на взаємодію (аварію) детермінованою послідовністю з n операцій, тривалість яких розподілена з параметром μ_i . Простір станів прийнято вважати самі операції з ліквідації аварій, S_0 – стан очікування, тобто робота системи без аварій.

Рівняння Колмогорова для ймовірностей:

$$\begin{aligned} P'_0(t) &= -\lambda P_0(t) + \mu_n P_n(t), \\ P'_1(t) &= -\mu_1 P_1(t) + \lambda P_0(t), \\ P'_i(t) &= -\mu_i P_i(t) + \mu_{i-1} P_{i-1}(t), i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.17)$$

за умови, що $\sum P_i(t) \equiv 1$.

Нам уже відомо, що граничні ймовірності P_i при $t \rightarrow \infty$ не залежить від початкового розподілу ймовірностей.

Виходячи з (4.17), ми отримуємо, що при $P'_i(t) = 0$ і $\sum P_i = 1$:

$$\lambda P_0 = \mu_n P_n, \lambda P_0 = \mu_1 P_1, \mu_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i, i = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Діаграму системи показано на рисунку 4.5.

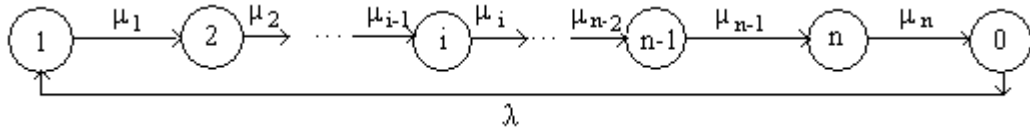


Рисунок 4.5 – Діаграма системи першої моделі

Знайдемо рішення рекурентної системи (4.18):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu_i}}; \quad P_i = \frac{\frac{\lambda}{\mu_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\mu_i}}, \quad i=1, \dots, n.$$

Якщо ввести середній час i -ї операції $T_i = \frac{1}{\mu_i}$ та час ліквідації аварії

$T_a = \sum T_i$, то ми отримаємо:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \lambda T_a}; \quad P_i = \frac{\lambda T_i}{1 + \lambda T_a}; \quad P_a = \sum_{i=1}^n P_i = \frac{\lambda T_a}{1 + \lambda T_a}.$$

У найпростішому випадку: $\mu_i = \mu$, $i=1, \dots, n$: $P_0 = \frac{\mu}{n\lambda + \mu}$; $P_i = \lambda(n\lambda + \mu)$.

Модель 2. Час та якість операцій з ліквідації аварій залежать від стану людини, яка у свою чергу залежить від стану системи. Вважатимемо, що оператор може перебувати у двох станах: «цілком дієздатний» і «обмежено дієздатний». Достовірність відновлення дієздатності у процесі ліквідації аварії дорівнює нулю, а ймовірність настання недієздатного стану під час виконання i -ї операції дорівнює b_i . Після закінчення всієї роботи дієздатність оператора відновлюється або здійснюють заміну оператора. Тоді перехідні можливості для кожної пари станів $i+1$ і $(i+1)_b$, що сусідять з i -м, при повній дієздатності

$$P_k = \frac{B_k}{\mu_k(\Sigma_1 + \Sigma_2)}, P_{k,b} = \frac{A_k}{\mu_k^b(\Sigma_1 + \Sigma_2)}, k = 1, \dots, n;$$

$$P_0 = \frac{B_{n+1}}{\lambda(\Sigma_1 + \Sigma_2)}, P_{0,b} = \frac{A_{n+1}}{\lambda(\Sigma_1 + \Sigma_2)}, P_0^* = \frac{1}{\lambda(\Sigma_1 + \Sigma_2)}.$$

За допомогою макро-характеристики об'єкта, що мають характер середнього значення, знайдемо перехідні ймовірності:

$$\sum_{j=1}^n p_j q_{ij} = M_i, \quad (4.19)$$

у яких використовуємо метод максимізації інформаційної ентропії:

$$S_I = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i, \quad (4.20)$$

який дуже широко застосовують щодо динаміків різних систем. Цей метод називають "другим началом синергетики". Таку назву цього методу дав Хакен [12].

Розглянемо ситуацію, коли «людина» може перебувати в одному зі станів, наприклад, $s_1 = \text{«здорова і дієздатна»}$, $s_2 = \text{«хвора, але дієздатна»}$, $s_3 = \text{«недієздатна»}$. Відповідно можна відзначити, що критерій (4.20) буде функцією трьох змінних, а саме завдання може мати не більше двох обмежень. Одне з обмежень буде очевидним і одно одиниці.

Візьмемо до розгляду статистику температури тіла:

$$T(s_1) = 36, \quad T(s_2) = 37.5, \quad T(s_3) = 39.$$

Після нормування обмежень завдання оптимізації виглядатиме:

$$\begin{aligned}SI &= - \sum p_i \cdot \ln p_i \rightarrow \max; \\ \sum p_i &= 1, \quad 0 < p_i < 1; \\ 0,973 \cdot p_1 + 1,013 \cdot p_2 + 1,054 \cdot p_3 &= 1.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Висновки за розділом 4

Зі сказаного вище видно, що максимум буде єдиним. Це твердження впливає з того, що функція S буде опуклою нагору по кожній змінній [13].

Даний приклад можна вирішити або шляхом множників Лагранжа, або проєкції градієнта, або шляхом умовних градієнтів. При більшій кількості станів слід використовувати програмне забезпечення для зручності.

ВИСНОВКИ

Класичні СМО адекватно моделюють систему за умови простоти вхідного потоку і відсутності наслідків та стаціонарності явищ.

Проаналізувавши цю роботу, можна зробити висновок, що при дуже невеликих значеннях $\lambda \ll 1$ припущення простоти потоку даних справедливе для потоку аварій. Також можна помітити, що найбільш імовірними будуть короткі інтервали між аваріями. Це можна побачити з експонентності розподілу довжин інтервалів між аваріями. Це означає, що саме така модель системи масового обслуговування підходить для рятувальних підрозділів під час воєнних дій та тривалих техногенних катастроф, для яких ліквідація аварії стає стаціонарним станом.

За допомогою завдань оптимізації для інформаційної ентропії розраховано значення перехідних ймовірностей.

Вирішуючи диференційовані рівняння Колмогорова можемо побачити, що й початковий стан системи – «очікування» близько до стаціонару, то перехідні процеси загасають швидко. Це означає, що стаціонарна модель буде адекватною.

Якщо розглядати модель 2, то якщо ймовірність $(i+1)_b$ стану велика, це можна буде назвати «вузьким місцем» системи. Тому потрібно буде шукати засоби зменшення параметрів цієї ймовірності.

З літератури відомо [2, 3], що аварії чи катастрофи мають релеївські, чи ерлангові закони розподілу. Тому це призводить до абсолютно нових математичних моделей, які не підлягають класичній теоремі Хінчина про збігання до найпростішого потоку.

Практична цінність даної роботи полягає в тому, що моделювання позаштатної, аварійної або катастрофічної ситуації дозволяє запобігти виникненню «вузьких місць» системи захисту та своєчасно знешкоджувати такі місця ще до появи таких ситуацій.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Антоненць О.М. Моделювання марковських процесів відновлення працездатності систем. *27-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка і молодь у XXI столітті»*. Зб. матеріалів форуму. Т. 7. Харків: ХНУРЕ. 2023. 243 с.
2. Небезпечні та шкідливі чинники. URL : <https://www.sop.com.ua/article/206-qqq-16-m6-13-06-2016-nebezpechn-tashkdliiv-virobnich-faktori> (дата звернення 07.11.2023).
3. Азгальдов Г.Г. Квалиметрия в архитектурно-строительном проектировании. Москва : Стройиздат, 1989. 264 с.
4. Дзюндзюк Б.В., Наумейко І.В., Сердюк Н.М. Змістовна модель взаємодії кількох шкідливих факторів на людину. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2000. №3. С. 131-132.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности. Москва: Наука, 1969. 366 с.
6. Мельчаков А.П. Оценка надежности возведенных строительных конструкций на основе методов теории множеств. *7 Уральские академические чтения*. Екатеринбург: Изд. УралНДИпроект, 2002. С. 12.
7. Мельчаков А. П. К теории прогнозирования риска аварий объектов строительства. *Вестник Южно-Уральского государственного университета*. Серия "Строительство и архитектура". 2001. Вып. 1 С. 5-7.
8. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. Москва: Машиностроение, 1990. 448 с.
9. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой входной информации. Москва: Наука, 1981. 208 с.
10. Ржаницын А.Г. Теория расчета строительных конструкций на надежность. Москва: Стройиздат, 1978. 239 с.

11. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам / перев. с англ. Ю. А. Данилова. Москва: Мир, 1991. 240 с.

13. Haken H. Synergetics. An Introduction. 3rd ed. Berlin, New York: Springer, Heidelberg, 1983. 234 p.