

## АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО БИНАРНЫМ СЕЧЕНИЯМ

*МАШТАЛИР С.В., МЕГЕЛЬ Ю.Е., ПУТЯТИН Е.П.*

Рассматриваются вопросы анализа геометрических характеристик изображений биологических объектов. Полутоновые изображения представляются семействами бинарных сечений. Для предварительной обработки бинарных изображений используются операции математической морфологии. Алгоритмизация поиска аппроксимаций основывается на методе наименьших квадратов и алгоритме Левенберга-Марквардта.

### Введение

Анализ и интерпретация визуальной информации в большой степени связаны с противоречивыми по своей сути задачами. С одной стороны, практически всегда наблюдается стремление к увеличению информационной составляющей, обеспечивающей наилучшую прикладную трактовку получаемых результатов, с другой — ограничения программно-аппаратной реализации индуцируют сложность, а зачастую и невозможность поиска приемлемых решений. Разумный компромисс достигается путем учета, прежде всего, специфики решаемых задач и конкретизации условий (не всегда, к сожалению, в полной мере адекватных реальным) синтеза управляющих воздействий. Одним из хорошо зарекомендовавших себя на практике является подход, когда на предварительном этапе проводится огрубление данных в целях выявления однородных компонентов, а на втором — детализация для более точной обработки. Анализ результатов двух этих этапов создает предпосылки для повышения достоверности принятия решений. Применительно к обработке изображений биологических объектов такие возможности предоставляют методы математической морфологии.

### Состояние методов морфологической обработки изображений, цель работы и постановка задач

Методы математической морфологии, трактуемые в общем виде как обработка частично упорядоченных множеств, применительно к визуальной информации делятся на две группы: полутоновую и бинарную морфологию [1-3]. В первом случае в качестве объекта анализа выступают значения функций распределения яркостей (как правило, морфологическими операциями моделируются традиционные алгоритмы предварительной обработки изображений), во втором — их носители. На этом уровне получены существенные оригинальные результаты, базируемые на теоретико-множественных операциях и алгебре Минковского [4], по фильтрации изображений [5-7], выделению границ [8,9], построению скелетов [5], анализу геометрических свойств [10]. Обработка изображений фактически осуществляется на основе сверток ис-

ходного изображения и задаваемого элемента — структурного множества, определяющего свойства результата.

При автоматическом анализе формы изображений эмбрионов — типичном представителе биологических объектов — четко выделяются задачи сегментации видеокладов и поиска основных характеристик формы — координат центра и радиуса окружностей, их описывающих. Связь задач, до настоящего времени не проанализированная в деталях, заключается в том, что на полутоновом уровне выделяются границы объектов, а на втором — на двухградационных изображениях ищутся геометрические характеристики формы.

Для выделения граничных точек традиционно используются морфологические методы, основанные на анализе скорости изменения функции распределения яркостей  $V(x, y)$ . Если функция  $V(x, y) \geq 0$  везде и в любом направлении дифференцируема, то производная по направлению

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial \bar{\xi}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{V(x + \tau \xi_1, y + \tau \xi_2) - V(x, y)}{\tau} =$$

$$= (\nabla V(x, y), \bar{\xi}) = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \sin \varphi,$$

где  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  — единичный вектор;  $\varphi$  — угол между этим вектором и осью абсцисс;  $\nabla V(x, y) = (\partial V(x, y)/\partial x, \partial V(x, y)/\partial y)$  — градиент, как функция  $\varphi$  равна 0 в направлении, параллельном линии перепада, и имеет максимум в направлении, ортогональном границе перепада, т.е. при угле  $\theta = \arctg [\partial V(x, y)/\partial x / \partial V(x, y)/\partial y]$ , совпадающем с ориентацией вектора градиента. Иначе говоря, максимальное значение величины градиента равно

$$\bar{\mathfrak{F}}(x, y) = \sqrt{(\partial V(x, y)/\partial x)^2 + (\partial V(x, y)/\partial y)^2},$$

для аппроксимации которого используются различные модели в виде масок, соответствующих структурным морфологическим элементам. Аналогично используются направленные производные высших порядков [5]:

$$\frac{\partial^n}{\partial \bar{\xi}^n} V(x, y) = (\bar{\xi} \nabla)^n V(x, y), \quad n = 2, 3, \dots$$

*Цель работы* — синтез новых методов анализа полутоновых изображений на основе обработки бинарных сечений. При решении задачи сегментации в работе в отличие от традиционных методов синтеза контурных препаратов (подчеркивания границ с учетом предварительной фильтрации) используется пирамидальное представление изображений (рис. 1), при котором полученные пространственные огрубления, в свою очередь, задаются семействами бинарных сечений (рис. 2). Множества бинарных сечений огрубляют видеоданные, но в предельном случае полностью соответствуют полутоновому изображению. Потенциальное увеличение объемов данных компенсируется возможностью обработки точечных множеств, точнее говоря, двухградационных изоб-

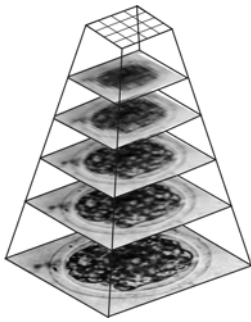


Рис. 1. Пирамидальное огрубление изображений

ражений, т.е. за счет упрощения и унификации практически всех операций.

Таким образом, первой задачей, рассматриваемой в работе, является представление изображений множествами бинарных сечений и поиск на отдельных их представителях или некоторой комбинации граничных элементов.

Вторая задача, решаемая в работе, заключается в высоко-

точной аппроксимации найденных граничных точек. Несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, применение обычного метода наименьших квадратов при обработке изображений практически невозможно. Так, при аппроксимации окружностей по данным о дугах имеется явная тенденция приближения к дуге, но не к окружности. При невысоких угловых характеристиках дуг подобный подход приводит к получению небольших окружностей.

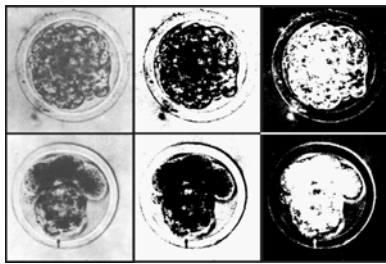


Рис. 2. Бинарные сечения

С практической точки зрения квадратичная целевая функция – достаточно сложна и может иметь несколько локальных минимумов, которые в параметрическом пространстве расположены далеко друг от друга, а их значения весьма близки к глобальному минимуму. Следует также отметить, что, во-первых, в зависимости от точности выделения точек контура или попадания в поле зрения части окружности (отдельных дуг) точность поиска координат центра и радиуса различны при использовании различных алгоритмов. Во-вторых, вычислительная сложность известных алгоритмов [1–21] существенно варьируется, т.е. необходимо искать разумный компромисс прежде всего между временными затратами и точностью. Вообще говоря, не существует конечного алгоритма, обладающего требуемой точностью и надежностью при различных условиях регистрации точек на плоскости, т.е. необходимо оперировать рядом процедур, точнее говоря, – некоторой их комбинацией. В работе в качестве начального приближения предлагается использовать традиционный метод наименьших квадратов, а для уточнения геометрических характеристик конкретизирован алгоритм Левенберга-Марквардта [22–23].

## Модель множества бинарных сечений изображений

Пусть в поле зрения  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  определено изображение

$$B(x, y) = \psi(x, y)[\lambda(x, y)V_0(x, y) + [1 - \lambda(x, y)]\Phi(x, y)] + \phi(x, y) + \eta(x, y), \quad (1)$$

где  $(x, y) \in \mathcal{D}$ ,  $V_0(x, y)$  – изображение обрабатываемого объекта;  $\lambda(x, y)$  – характеристическая функ-

ция его носителя;  $\lambda(x, y) = \begin{cases} 1, & V_0(x, y) \neq 0, \\ 0, & V_0(x, y) = 0, \end{cases} \Phi(x, y)$

– фоновая составляющая;  $\psi(x, y)$ ,  $\phi(x, y)$  – функции изменения яркости и контраста;  $\eta(x, y)$  – аддитивные случайные помехи. В общем случае задача заключается в определении характеристик изображения  $V_0(x, y)$  по функции  $B(x, y)$  при неизвестных  $\psi(x, y)$ ,  $\lambda(x, y)$ ,  $\Phi(x, y)$  и  $(x, y)$ . В качестве базы для исходных посылок (чаще всего эвристических) используется информация об условиях регистрации изображений, свойствах изображений объекта и фона.

Предположим, в поле зрения определено конечное множество попарно-непересекающихся подмножеств  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p$ , соответствующих “однородным” по яркости и/или с точки зрения тематической интерпретации фрагментам. Пусть  $\varphi_{\mathcal{A}_i}$  – характеристические функции множеств  $\mathcal{A}_i$ . Каждому  $\mathcal{A}_i$  поставим в соответствие  $a_i \in \mathbb{R}^1$ , огрубляя значения функции распределения яркостей. Учитывая, что множества  $\mathcal{A}_i$  не пересекаются и их число конечно, любое изображение – функцию на  $\mathcal{D}$  со значениями в  $\mathbb{R}^1$  – можно представить в виде

$$B'(x, y) = \sum_{i=1}^p \varphi_{\mathcal{A}_i}(x, y)a_i. \quad (2)$$

Пусть  $[B_{\min}, B_{\max}]$  – диапазон изменения яркостей изображения  $B(x, y)$ , на котором задано конечное разбиение точками  $\alpha_l$  такое, что

$$\alpha_1 < \alpha_{l+1}, \alpha_0 = B_{\min}, \alpha_L = B_{\max}, \alpha_{l+1} - \alpha_l < \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – заданное положительное число.

Пусть  $\mathcal{A}_l$  – множества точек  $(x, y) \in \mathcal{D}$  таких, что  $\alpha_l < B(x, y) \leq \alpha_{l+1}$  (или  $\alpha_l \leq (x, y) < \alpha_{l+1}$ ),  $l = \overline{0, L-1}$ , т.е.  $\mathcal{A}_l = B^{-1}([\alpha_l, \alpha_{l+1}])$ . Множества  $\mathcal{A}_l$  образуют конечное разбиение  $\mathcal{D}$ . Если ввести функцию  $\mathfrak{A}(x, y) = \alpha_{l+1}$  при  $(x, y) \in \mathcal{A}_l$ , то очевидно, что

$$\mathfrak{A}(x, y) - B(x, y) = \alpha_{l+1} - B(x, y) < \alpha_{l+1} - \alpha_l < \varepsilon$$

при всех  $(x, y) \in \mathcal{D}$ . Иначе говоря, представление (2) может задавать изображение с любой точностью. Функции  $\mathfrak{B}_i(x, y) = \varphi_{\mathcal{A}_i}(x, y)$ ,  $i = \overline{1, p}$  будем называть бинарными сечениями.

При цифровой форме представления  $B(m, n)$ ,  $m = \overline{1, M}$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $B(m, n) \in \{[0, (B_{max} - B_{min})b] \cap N\} \cup \{0\}$ , где  $b \in R_+^1$  – коэффициент сжатия (растяжения), определяющий число уровней квантования, в общем случае значение яркости после предварительной обработки можно представить в смешанной системе счисления,  $N$  – множество натуральных чисел,

$$B(m, n) = d_0 + d_1 r_0 + d_2 r_0 r_1 + d_3 r_0 r_1 r_2 + \dots + d_k \prod_{j=0}^{k-1} r_j.$$

Здесь  $0 \leq d_i < r_i$ ,  $r_i$ , вообще говоря, связано с разбиением (3). Тогда каждое сечение задается выражением

$$\mathfrak{B}_i(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{при } B_i(m, n) = d_0 + \sum_{p=1}^k d_p \prod_{q=0}^{p-1} r_q; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $0 \leq \mathfrak{B}_i(m, n) \leq 1 + \sum_{p=1}^k d_p \prod_{q=0}^{p-1} r_q$ . После морфологической обработки сечений применение к ним теоретико-множественных операций позволяет генерировать новые бинарные изображения, более пригодные для анализа формы объекта.

### Синтез контурного препарата

Пусть  $p = (i, j)$  – координаты точки. Тогда бинарное изображение (сечение) в поле зрения  $\mathfrak{D} \subset R^2$  можно представить в виде  $\mathfrak{B} = \bigcup_{i, j} p(i, j)$ .

Определим понятия отношений связности точки  $q = (m, n)$  с точкой  $p = (i, j)$  [5]:

$$N_4(p) = \{(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)\};$$

$$N_d(p) = \{(i-1, j-1), (i-1, j+1), (i+1, j-1), (i+1, j+1)\};$$

$$N_8(p) = N_4 \cup N_d,$$

т.е. точки  $p$  и  $q$  являются соседними: по отношению четырехсвязности, если  $q \in N_4(p)$ , по отношению восьмисвязности, если  $q \in N_8(p)$ .

Теперь можно формализовать понятие границы объекта на бинарных сечениях:

горизонтальные границы

$$Fr_g(\mathfrak{B}) = \{(i, j) : \mathfrak{B}(i, j-1) + \mathfrak{B}(i, j+1) = 1\};$$

вертикальные границы

$$Fr_v(\mathfrak{B}) = \{(i, j) : \mathfrak{B}(i-1, j) + \mathfrak{B}(i+1, j) = 1\};$$

диагональные границы

$$Fr_d = Fr_g \cap Fr_v;$$

полная граница области

$$Fr = Fr_g \cup Fr_v.$$

Для устранения малоплощадных компонентов бинарных сечений необходимо предварительно провести фильтрацию

$$\mathfrak{B}^* = \gamma_H(\mathfrak{B}) = \delta_H(\varepsilon_H(\mathfrak{B})) = (\mathfrak{B} \ominus H) \oplus H,$$

где  $\delta_H$ ,  $\varepsilon_H$  – соответственно сложение и вычитание по Минковскому со структурным множеством  $H$ :

$$\delta_H(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \oplus H = \bigcup_{h \in H} (\mathfrak{B} + h),$$

$$\varepsilon_H(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B} \ominus H^s = \bigcap_{h \in H} (\mathfrak{B} + h).$$

Вследствие многосвязности бинарных сечений для устранения ложных контуров они должны быть первоначально огрублены. Операция замыкания  $\phi$  по Минковскому позволяет заполнять мелкие области внутри изображений объектов. В работе использовался структурный элемент  $H$  в виде квадрата размерностью  $31 \times 31$ . Отметим, что операцию замыкания со структурным элементом  $(2k+1) \times (2k+1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  можно редуцировать к последовательности операций сложения и вычитания со стандартным структурным множеством  $3 \times 3 - H_3$ :

$$\phi_H(\mathfrak{B}) = \varepsilon_H(\delta_H(\mathfrak{B})) = (\mathfrak{B} \oplus H_{3(1)} \oplus \dots \oplus H_{3(2k+1)}) \ominus \ominus H_{3(1)} \ominus \dots \ominus H_{3(2k+1)}.$$

Действительно, это непосредственно следует из ассоциативности операций сложения и вычитания по Минковскому:

$$\mathfrak{B} \oplus H_{3(1)} \oplus \dots \oplus H_{3(2k+1)} = \mathfrak{B} \oplus (H_{3(1)} \oplus \dots \oplus H_{3(2k+1)}) = \mathfrak{B} \oplus H_{2k+1}.$$

Аналогично  $\mathfrak{B}' \ominus H_{3(1)} \ominus \dots \ominus H_{3(2k+1)} = \mathfrak{B}' \ominus H_{2k+1}$ .

На втором этапе была найдена граница получившейся области по формуле  $Fr(\mathfrak{B}^*, H^s) = \mathfrak{B} / \varepsilon_{N_4}(\mathfrak{B}^*)$ , где  $H^s \subset H$ .

На рис. 3 приведен пример построения морфологическими алгоритмами контурных препаратов изображений эмбрионов.

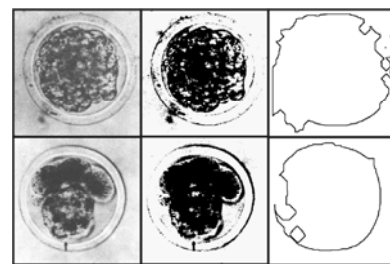


Рис. 3. Морфологический поиск контуров

### Поиск параметров аппроксимирующих окружностей

Итак, при помощи математической морфологии найдены граничные точки  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, N$ , которые необходимо аппроксимировать окружностью  $\mathfrak{M}_0$ . Пусть  $d_i$  – расстояние от точки  $(x_i, y_i)$  до окружности, лучшим выбором для каждого  $i$  является максимальное приближение кривой  $\mathfrak{M}_0$  к наблюдаемой точке, т.е. требуется найти

$$F = \sum_{i=1}^N d_i^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Обратимся к аппроксимации окружностей

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

где  $A \neq 0$  (иначе, анализу подлежит прямая),  $B^2 + C^2 - 4AD > 0$  (при  $B^2 + C^2 - 4AD < 0$  имеем пустое множество, при  $B^2 + C^2 - 4AD = 0$  получаем точку).

Для решения нелинейной задачи аппроксимации методом наименьших квадратов воспользуемся итерационным алгоритмом Левенберга-Марквардта [22, 23], обеспечивающим достаточно быструю (квадратичную) сходимость к локальным минимумам и высокую надежность минимизации за счет проведения итераций в направлении, обратном к градиенту целевой функции.

Суть алгоритма Левенберга-Марквардта сводится к следующему. Если целевая функция (4) представлена в виде

$$F(\bar{a}) = \sum_{i=1}^N f_i^2(\bar{a}), \quad (5)$$

где  $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$  – вектор неизвестных параметров,  $k < N$ , то итерационная процедура  $\bar{a}_i = \bar{a}_{i-1} + \bar{h}$ , где  $\bar{h}$  является решением уравнения

$$\mathfrak{S}^T \mathfrak{S} \bar{h} = -\mathfrak{S}^T \bar{f}, \quad \bar{f} = (f_1(\bar{a}), f_2(\bar{a}), \dots, f_N(\bar{a})),$$

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial a_1 & \dots & \partial f_k / \partial a_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_N / \partial a_1 & \dots & \partial f_N / \partial a_k \end{pmatrix}.$$

В алгоритме Левенберга-Марквардта вводится параметр  $\lambda > 0$ , обеспечивающий положительную определенность нормальной матрицы  $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}^T \mathfrak{S}$  за счет увеличения диагональных элементов нормальной матрицы  $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N} + \lambda I$ .

В качестве стартового значения параметра  $\lambda > 0$  выбирается малая величина (обычно  $10^{-3}, 10^{-4}$ ). Если новое значение  $\bar{a}$  уменьшает целевую функцию  $F$ , то для следующей итерации величина  $\lambda$  уменьшается на коэффициент  $\alpha$  (обычно  $\alpha \in [0,4; 0,1]$ ). В противном случае величина  $\lambda$  увеличивается на коэффициент  $\beta$  (как правило,  $\beta = 10$ ) и вновь решается уравнение  $\mathfrak{N}_\lambda \bar{h} = -\mathfrak{S}^T \bar{f}$ . Итерационная процедура продолжается до тех пор, пока увеличение  $\bar{h}$  уменьшает значение  $F$ .

Применительно к аппроксимации окружностей алгоритм Левенберга-Марквардта конкретизируется следующим образом. Пусть расстояние от точки  $(x, y)$  до окружности  $\mathfrak{M}_0$  с радиусом  $R$  и центром  $(a, b)$  определяется выражением

$$d = \left| \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - R \right|.$$

Тогда целевая функция (5) примет вид

$$\mathfrak{F}(a, b, R) = \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R \right)^2.$$

Здесь с учетом, что  $A \neq 0$ , получаем

$$x^2 + \frac{B}{A}x + y^2 + \frac{C}{A}y = -\frac{D}{A}$$

$$\text{или} \quad \left( x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \left( y + \frac{C}{2A} \right)^2 = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{D}{A},$$

т.е. окончательно имеем

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = -\frac{C}{2A}, \quad R = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}}.$$

Введем обозначения

$$r_i = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2},$$

$$u_i = -\partial r_i / \partial a = (x_i - a) / r_i,$$

$$v_i = -\partial r_i / \partial b = (y_i - b) / r_i$$

и будем также пользоваться обозначением моментов  $M_r = \sum r_i$ ,  $M_u = \sum u_i$ ,  $M_v = \sum v_i$ ,  $M_{uu} = \sum u_i^2$  и т.д. Тогда непосредственно можно найти

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} -u_1 & -v_1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -u_N & -v_N & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} M_{uu} & M_{uv} & M_u \\ M_{uv} & M_{vv} & M_v \\ M_u & M_v & N \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{S}^T \bar{f} = \begin{pmatrix} R M_u - M_{ur} \\ R M_v - M_{vr} \\ R N - M_r \end{pmatrix}.$$

Необходимо отметить, что если изображение окружности центрировано, то  $\sum x_i = \sum y_i = 0$ . Учтывая, что  $M_{ur} = \sum x_i - Na$  и  $M_{vr} = \sum y_i - Nb$ , в этом случае получаем существенное упрощение, увеличивающее к тому же вычислительную устойчи-

$$\text{вость} \quad \mathfrak{S}^T \bar{f} = \begin{pmatrix} R M_u + Na \\ R M_v + Nb \\ R N - M_r \end{pmatrix}.$$

Сходимость алгоритма может быть существенно улучшена путем непосредственного вычисления гессiana  $F$ . Отметим, прежде всего, что один параметр ( $a$  именно,  $R$ ) может исключаться из рассмотренной выше процедуры. Действительно, поскольку функция  $F(a, b, R)$  квадратична относительно  $R$ , можно зафиксировать параметры  $a$  и  $b$ , а в результате найти

$$R = \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} = M_r / N = \bar{r}, \quad (6)$$

$$\text{т.е.} \quad F(a, b) = \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2.$$

Отметим, что непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} -u_1 + \bar{u} & -v_1 + \bar{v} \\ \vdots & \vdots \\ -u_N + \bar{u} & -v_N + \bar{v} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \overline{uu} - \bar{u}^2 & \overline{uv} - \bar{u}\bar{v} \\ \overline{uv} - \bar{u}\bar{v} & \overline{vv} - \bar{v}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{S}^T \bar{f} = \begin{pmatrix} -\bar{u}\bar{r} + \bar{u}\bar{r} \\ -\bar{v}\bar{r} + \bar{v}\bar{r} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $\bar{u} = M_u/N$ ,  $\bar{v} = M_v/N$ ,  $\bar{uu} = M_{uu}/N$ ,  $\bar{uv} = M_{uv}/N$ ,  $\bar{vv} = M_{vv}/N$ . Если, как и выше, окружность центрирована, то получаем упрощение

$$\mathfrak{G}^T \bar{f} = \begin{pmatrix} a + \bar{u} \bar{r} \\ b + \bar{v} \bar{r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на каждом шаге решается система  $\mathfrak{N}_\lambda \bar{h} = -\mathfrak{G}^T \bar{f}$ , полученная при помощи (7).

Далее в предположении центрирования окружностей представим (6) в виде

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) + N(a^2 + b^2 - \bar{r}),$$

что в силу  $\sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2) = \text{const}$  равносильно (опуская  $N$ ) поиску  $F_1(a, b) = a^2 + b^2 - \bar{r} \rightarrow \min$ .

Дифференцируя по  $a$  и  $b$ , получаем

$$\frac{1}{2} \nabla F_1 = \begin{pmatrix} a + \bar{u} \bar{r} \\ b + \bar{v} \bar{r} \end{pmatrix}.$$

Вычисление частных производных второго порядка дает

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial a^2} = 1 - \bar{u}^2 + \bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial a},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial b^2} = 1 - \bar{v}^2 + \bar{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial b},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1}{\partial a \partial b} = -\bar{u} \bar{v} + \bar{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial a}.$$

Вычисляя частные производные и обозначая результаты

$$-\frac{\partial \bar{u}}{\partial a} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{v_i^2}{r_i} = \overline{vv\bar{r}},$$

$$-\frac{\partial \bar{v}}{\partial b} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{u_i^2}{r_i} = \overline{uu\bar{r}},$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial b} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{u_i v_i}{r_i} = \overline{uv\bar{r}},$$

окончательно находим

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 1 - \bar{u}^2 + \bar{r} \overline{vv\bar{r}} & -\bar{u} \bar{v} + \bar{r} \overline{uv\bar{r}} \\ -\bar{u} \bar{v} + \bar{r} \overline{uv\bar{r}} & 1 - \bar{v}^2 + \bar{r} \overline{uu\bar{r}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, заменяя матрицу  $\mathfrak{N}$  на  $\mathfrak{N}_\lambda$ , на каждом шаге итерации будем решать уравнение

$$\mathfrak{N}_\lambda \bar{h} = -\nabla F_1 / 2.$$

Проанализированные выше итерационные алгоритмы, с одной стороны, обеспечивают высокую точность поиска параметров окружностей, с другой — являются весьма чувствительными к выбору

начальных приближений. Для выбора стартовых значений при анализе изображений эмбрионов безусловно можно использовать эвристические соображения, базирующиеся на знании характеристик видеодатчика, его взаимного расположения с объектом, геометрических свойств точек контура в поле зрения. В частности, несложно найти пределы изменения параметров  $A, B, C, D$  (при произвольном положении центра системы координат):

$$|A| \leq \frac{N}{2d_{\max}},$$

$$|B| \leq 1 + N \frac{\max\{|x_{\min}|, |x_{\max}|\}}{d_{\max}},$$

$$|C| \leq 1 + N \frac{\max\{|y_{\min}|, |y_{\max}|\}}{d_{\max}},$$

$$|D| \leq \frac{N}{2d_{\max}} \left( \max\{x_{\min}^2, x_{\max}^2\} + \max\{y_{\min}^2, y_{\max}^2\} \right) + \left( 1 + N + \frac{\max\{|x_{\min}|, |x_{\max}|\}}{d_{\max}} \right) \max\{|x_{\min}|, |x_{\max}|\} + \left( 1 + N + \frac{\max\{|y_{\min}|, |y_{\max}|\}}{d_{\max}} \right) \max\{|y_{\min}|, |y_{\max}|\},$$

где  $d_{\max} = \max_{i, j \in \{1, 2, \dots, N\}} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ ;  $x_{\min}$ ,

$y_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\max}$  — соответственно минимальные и максимальные координаты точек контуров.

В качестве естественного пути поиска начального приближения для итерационных алгоритмов можно также применять и традиционный метод наименьших квадратов, когда требуемая кривая представляется полиномом. Такой подход весьма прост в реализации. Целевая функция в этом случае представляется в виде

$$F_2(a, b, R) = \sum_{i=1}^N \left( (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 - R^2 \right)^2 = \sum_{i=1}^N (Az_i + Bx_i + Cy_i + D)^2,$$

где  $z_i = x_i^2 + y_i^2$  (не нарушая общности рассмотрения, можно полагать  $A = 1$ );  $B = -2a$ ,  $C = -2b$ ,  $D = a^2 + b^2 - R^2$ . Дифференцируя  $F_2$  по  $B, C, D$ , получаем систему линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} M_{xx}B + M_{xy}C + M_x D &= -M_{xz} \\ M_{xy}B + M_{yy}C + M_y D &= -M_{yz} \\ M_x B + M_y C + ND &= -M_z \end{aligned} \right\},$$

где, как и ранее,  $M_{xx}, M_{xy}$  и т.д. — соответствующие моменты. Решая данную систему относительно  $B, C, D$ , находим стартовые значения  $a, b, R$  для исследованных выше итерационных алгоритмов.

### Выводы и перспективы

Предложены новые процедуры поиска геометрических характеристик (координат центра и апп-

роксимирующей окружности) изображений эмбрионов. На первом этапе полутоновое изображение представляется множеством бинарных сечений, которые затем подвергаются морфологической обработке. На основе анализа полученных контурных препаратов при помощи алгоритма Левенберга-Марквардта ищутся требуемые характеристики. На рис. 4 представлены результаты поиска окружностей по бинарным сечениям (см. рис. 3).

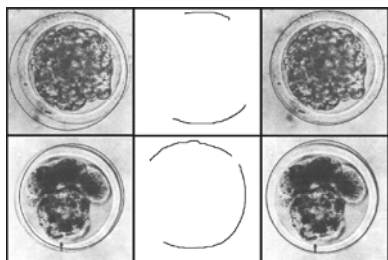


Рис. 4. Аппроксимация изображения эмбрионов

В силу сложности с точки зрения интерпретации исходного изображения, а следовательно, неточности построения контурного препарата ошибка определения геометрических характеристик достаточно велика (см. рис. 3 слева). Однако применение эвристических процедур скрининга анализируемых точек позволяет повышать точность. Так, в центре иллюстрации показаны участки с практически постоянным радиусом кривизны, а справа — высокоточная аппроксимация. Экспериментальные исследования показали, что требуемая точность достигается в случаях корректного определения 10% граничных точек. Перспективным направлением развития предложенного подхода является комплексированный анализ всего множества или же некоторого подмножества бинарных сечений изображений. Повышение эффективности будет достигаться за счет “взвешенного усреднения” сечений с помощью синтеза новых бинарных изображений путем комбинирования имеющихся.

**Литература:** 1. *Serra J.* Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. I. London: Academic Press, 1982. 610 p. 2. *Serra J., Matheron G., Meyer F., Preteux F., Schmitt M.* Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol.2: Theoretical Advances (*Serra J., ed.*). London: Academic Press, 1988. 411 p. 3. *Пытьев Ю.П.* Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, №5. С. 1061-1064. 4. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с. 5. *Shalkoff R.J.* Digital image processing and computer vision. — New York — Chichester — Brisbane — Toronto — Singapore: John Wiley & Sons, Inc. 1989. 489p. 6. *Haralick R., Sternberg S. and Zhuang X.* Image analysis using mathematical morphology // IEEE Transactions on PAMI. 1987. №9. P. 532-550. 7. *Imiya A. and Nakamura T.* Morphological operations via convolution // in Proceedings of the 6th Scandinavian Conference on Image Analysis. Oulu, Finland. 1989. Vol. II. P. 878-881. 8. *Van den Boomgaard R. and van Balen R.* Methods for fast

morphological image transforms using bitmapped binary images // Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1992. Vol. 54, No. 3. P. 252-258. 9. *Rangnemalm I.* Fast erosion and dilation by contour processing and thresholding of distance maps // Pattern Recognition Letters. 1992. Vol. 13. P. 161-166. 10. *Vincent L.* Morphological transformations of binary images with arbitrary structuring elements // Signal Processing. 1991. Vol. 22, No. 1. P. 3-23. 11. *Ahn S.J., Rauh W. and Warnecke H.J.* Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola // Pattern Recognition. 2001. Vol. 34. P. 2283-2303. 12. *Chaudhuri B.B. and Kundu P.* Optimum circular fit to weighted data in multi-dimensional space // Pattern Recognition Letters. 1993. Vol. 14, No. 1. P.1-6. 13. *Landau U.M.* Estimation of a circular arc center and its radius // Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1987. Vol. 38. P. 317-326. 14. *Paton K.* Conic sections in chromosome analysis // Pattern Recognition. 1970. Vol. 2. P. 39-51. 15. *Pratt V.* Direct least-squares fitting of algebraic surfaces // Computer Graphics. 1987. Vol. 21. P. 145-152. 16. *Sampson P.D.* Fitting conic section to very scattered data: an iterative refinement of the Bookstein algorithm // Computer Graphics and Image Processing. 1982. Vol. 18. P. 97-108. 17. *Spath H.* Least-squares fitting by circles. // Computing. 1996. 57. P. 179-185. 18. *Taubin G.* Estimation of planar curves, surfaces and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1991. Vol.13. P. 1115-1138. 19. *Thomas S.M. and Chan Y.T.* A simple approach for the estimation of circular arc center and its radius // Computer Vision, Graphics and Image Processing. 1989. Vol. 45. P. 362-370. 20. *Wu Z., Wu L. and Wu A.* The robust algorithms for finding the center of an arc // Computer Vision and Image Understanding. 1995. Vol. 62. P. 269-278. 21. *Zhang Z.* Parameter estimation techniques: a tutorial with application to conic fitting // International Journal of Image Processing and Vision Computing. 1997. P. 59-96. 22. *Levenberg K.* A Method for the solution of certain non-linear problems in least squares // Quart. Applying Mathematics. 1944. No 2. P. 164-168. 23. *Marquardt D.* An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters // SIAM Journal on Applying Mathematics. 1963. Vol. 11. P. 431-441.

Поступила в редколлегия 24.12.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

**Машталир Сергей Владимирович**, аспирант каф. информатики ХНУРЭ. Научные интересы: распознавание образов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-419, e-mail: Mashtalir\_S@kture.krarkov.ua

**Мегель Юрий Евгеньевич**, канд. техн. наук, профессор кафедры вычислительной техники ХГТУСХ. Научные интересы: автоматизация биотехнологических процессов в АПК. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Артема, 44, тел. 164-170.

**Путятин Евгений Петрович**, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой информатики ХНУРЭ. Научные интересы: распознавание образов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-419.