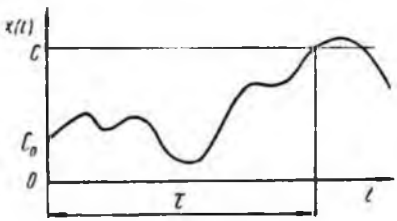
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОТКАЗОВ В СХЕМЕ МГНОВЕННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ

А. Д. Болычевцев, В. А. Добрыдень

Харьков

1. Обсуждение и постановка задачи

Модель отказов, носящая название схемы мгновенных повреждений [1], состоит в следующем. Элемент, надежность которого исследуется, подвержен воздействию случайного процесса $x(t)$, и отказ наступает в тот момент, когда значение $x(t)$ превышает некоторый критический уровень c (рис.).



Реализация времени жизни элемента τ в схеме мгновенных повреждений

Процесс $x(t)$ может рассматриваться при этом как прогнозирующий параметр [2]. В настоящей статье изучается возможность использования некоторых видов информации о процессе $x(t)$ для уточнения априорной функции распределения времени жизни элемента. Получены аналитические выражения, аппроксимирующие эту функцию, и оценены их погрешности. Процесс $x(t)$ полагается стационарным нормальным процессом с дифференцируемыми реализациями и известной корреляционной функцией.

Введем следующие обозначения: S — совокупность некоторых сведений о процессе $x(t)$ при $t = t_0$ (в дальнейшем для упрощения записей будем полагать $t_0 = 0$); $P(\tau \mid S)$ — условная функция распределения времени жизни элемента τ при условии, что известны сведения S.

Ниже рассматриваются случаи, когда S состоит в следующем:

1) S_1 — значение $x(0)$;

2) S_2 — значение $x(0)$ и, кроме того, знак производной процесса

$$v_0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}.$$

Требуется оценить функции $P(\tau \mid S_1)$ и $P(\tau \mid S_2)$.

К решению поставленной задачи неприменимы классические методы теории надежности [1—3,5].

В работе [4] указана возможность использования в описанной ситуации методов теории выбросов случайного процесса за фиксированный уровень [6—11]. Ниже для решения поставленной задачи развиваются результаты, полученные в работе [10]. С

целью упрощения выкладок и записи результатов процесс $x(t)$ будем полагать центрированным и нормированным, что не снижает общности рассмотрения и полученных соотношений.

2. Аппроксимирующие выражения

Легко заметить, что для широкого класса процессов $x(t)$ функция $P(\tau|S_1)$ при малых значениях τ (случай, наиболее важный в приложениях) может быть аппроксимирована функцией

$$P_1(\tau) = P\{x(\tau) \geqslant c \,|\, x(0) = c_0\}.$$

Указанная вероятность определяется выражением [10]

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2}[1 - \Phi(h_c)], \tag{1}$$

где

$$h_c = \frac{c - R_x c_0}{\sqrt{2(1 - R_x)^2}}; \tag{2}$$

R_x — нормированная корреляционная функция процесса $x(t)$; $\Phi(\gamma)$ — интеграл вероятности вида;

$$\Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\eta^2} d\eta. \tag{3}$$

Если помимо значения $x(0)$ фиксируется также знак производной процесса в точке $t = 0$, соответствующая условная вероятность

$$P_2(\tau) = P\{x(\tau) \geqslant c \,|\, x(0) \geqslant c_0 \wedge v_0 > 0\}$$

выражается зависимостью [10]

$$P_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h_c}^{\infty} [1 - \Phi(a\eta)] e^{-\eta^2} d\eta, \tag{4}$$

где

$$a = \frac{R_v}{\sqrt{1 - R_v^2 - R_x^2}} \tag{5}$$

(R_v — нормированная корреляционная функция связи процесса $x(t)$ и его производной).

Для широкого класса процессов $x(t)$ функция (4) при малых значениях τ, наиболее интересных с точки зрения приложений, может служить аппроксимацией функции $P(\tau|S_2)$.

Ниже предложены простые выражения, аппроксимирующие функции (1) и (4), и оценена погрешность аппроксимации.

3. Формулы для инженерных расчетов. Оценка погрешности

Зависимость (1), являясь достаточно точной и удобной для вычислений, может быть рекомендована для инженерных расчетов. Интеграл вероятности (3) протабулирован [12]; таким образом, для вычисления $P_1(\tau)$ необходимо знать лишь нормированную корреляционную функцию $R_x(\tau)$ процесса $x(t)$. При малых значениях τ величина h_c, определяемая выражением (2), оказывается весьма значительной, что позволяет в этом случае использовать для расчетов упрощенную формулу, представляющую собой первый член разложения выражения (1) в быстро сходящийся ряд [13]:

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2h_c\sqrt{\pi}} e^{-h_c^2}. \tag{6}$$

Относительная погрешность приближения (6) не превосходит величины $1/2h_c^2$.

Интегральная зависимость (4) неудобна при вычислениях, поэтому для определения $P_2(\tau)$ можно рекомендовать следующее приближение:

$$P_2(\tau) = \frac{1}{2}[1 - \Phi(ah_c)][1 - \Phi(h_c)], \tag{7}$$

дающее несколько заниженный результат, либо иное приближение

$$P_2(\tau) = 1 - \Phi(h_c), \tag{8}$$

дающее завышенное значение.

Грубую оценку погрешности формулы (7) при произвольном значении τ можно получить, исходя из следующих соображений. Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{h_c}^{\infty} [1 - \Phi(z\eta)] e^{-\eta^2} d\eta.$$

Легко заметить, что

$$\lim_{z\to\infty} I(z) = 0, \quad \lim_{z\to a} I(z) = P_2(\tau).$$

Продифференцировав $I(z)$, получим

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{1}{\pi(z^2+1)} e^{-(z^2+1)h_c^2}.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах (a, ∞), находим

$$I(a) = P_2(\tau) = \frac{1}{\pi} e^{-h_c^2} \int_a^{\infty} \frac{e^{-h_c^2 z^2}}{1+z^2} dz < \frac{1}{\pi} e^{-h_c^2} \int_a^{\infty} e^{-h_c^2 z^2} dz =$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \Phi(ah_c)] \frac{1}{h_c\sqrt{\pi}} e^{-h_c^2}. \tag{9}$$

Поскольку результат (7) дает заниженное, а результат (9) — завышенное значение $P_2(\tau)$, абсолютная величина погрешности аппроксимации Δ не превышает их разности

$$\Delta \leqslant \frac{1}{2}[1-\Phi(ah_c)]\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\,h_c}e^{-h_c^2}+\Phi(h_c)-1\right]; \qquad (10)$$

$$\delta < \delta_1 = \frac{e^{-h_c^2}}{h_c\sqrt{\pi}\,[1-\Phi(h_c)]}-1. \qquad (11)$$

Отношение выражений (10) и (7) дает формулу для вычисления величины максимально возможной относительной погрешности аппроксимации.

Числитель первого слагаемого (11) является первым членом разложения его знаменателя в асимптотический ряд [13]. С ростом величины h_c это отношение стремится к единице, следовательно, относительная погрешность аппроксимации δ стремится к нулю. Оценка δ_1 достигает максимума в точке $R_x(\tau) = c_0/c$.

Выражение в правой части (11) дает завышенное значение погрешности. При величинах τ, возрастающих от нуля до значения, при котором R_x уменьшается до величины 0,4 — 0,5, можно получить более точные оценки.

Погрешность аппроксимаций (7) и (8) зависит от соотношения уровней c и c_0, а также от поведения корреляционной функции $R_x(\tau)$ в окрестности рассматриваемой точки τ. Обычно исследователя интересует участок характеристики $P_2(\tau)$ в диапазоне $(0, \tau^*)$ значений τ, соответствующем наличию существенной корреляционной связи между сечениями процесса $x(t)$. Величину τ^* можно определить, исходя из некоторого граничного значения корреляционной функции или какого-либо иного зависящего от него параметра. В качестве такого параметра используем величину a, определяемую выражением (6); на ее значение наложим ограничение

$$a < -1. \qquad (12)$$

В частности, для случая, когда корреляционная функция может быть описана выражением

$$R_x(\tau) = e^{-a\tau^2},$$

неравенство (12) эквивалентно неравенству

$$R_x(\tau) > 0{,}4. \qquad (13)$$

Для граничного значения $a = -1$ (т. е. для значения $R_x = \tau^*$) выражение (4) приобретает вид

$$P_2(\tau^*) = [1-\Phi(h_c)]\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\Phi(h_c)\right]. \qquad (14)$$

Сравнивая результат (14) с аппроксимацией (7) и (8), легко убедиться, что в интервале времени $(0, \tau^*)$ наибольшая относи-

тельная погрешность обеих аппроксимаций при любых значениях уровней c и c_0 не превышает по модулю одной трети истинного значения функции $P_2(\tau)$. При $c^2 - c_0^2 \geqslant 1$ эта погрешность не превышает 14% при $c^2 - c_0^2 \geqslant 2$ — 4% и т. д.

Таким образом, в инженерных расчетах лучше использовать более простую формулу (8).

Весьма существенно, что можно указать интервал $(0, \tau_0)$ малых вероятностей отказа, в пределах которого разность между аппроксимациями (7) и (8) составляет доли процента от значения $P_2(\tau)$, т. е. в этом интервале каждая из формул (7) и (8) обеспечивает высокую точность расчета.

4. Аппроксимация функции $P_2(\tau)$ условной плотностью выбросов

В интервале $(0, \tau_0)$ малых значений τ плотность вероятности отрицательных выбросов [7 — 9], очевидно, существенно меньше плотности вероятности положительных выбросов процесса $x(t)$ за уровень c. Естественно поэтому ожидать, что в этом интервале плотность распределения, соответствующая функции распределения $P_2(\tau)$, будет весьма точно совпадать с условной плотностью выбросов случайного процесса, изученной в работе [11].

Действительно, продифференцировав выражение (8) по времени, получаем

$$P_2(\tau) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\,\frac{cR_x - c_0}{\sqrt{(1-R_x^2)^3}}\,R_v \exp\left\{-\frac{(c-R_x c_0)^2}{2(1-R_x^2)}\right\}, \qquad (15)$$

где

$$\omega = \frac{R_x'}{R_v} = \sqrt{-R_x''(0)}\,.$$

Выражение (15) с точностью до погрешностей совпадает с результатом, полученным в работе [11] из других предпосылок.

5. Об интервале малых вероятностей отказа

Наличие зависимостей $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ позволяет вычислить вероятность появления отказа в течение времени τ после получения информации S_1 или S_2 о прогнозирующем параметре $x(t)$.

Можно решить также и обратную задачу: найти максимальный интервал $(0, \tau_1)$, условная вероятность отказа в котором (при условии S_1 или S_2) не превысит заданного значения. Действительно, используя выражения (1) и (7) с учетом (2), можно выразить величину τ_1 через соответствующее ей значение корреляционной функции $R_x(\tau_1) = R_1$.

Возможна также следующая, более общая постановка задачи: определить максимальный интервал $(0, \tau_m)$, удовлетворяющий определенному условию, зависящему от конкретного содержания

решаемого технического вопроса, не обязательно имеющего отношение к надежности. Этот интервал может иметь смысл наибольшего допустимого промежутка времени между двумя последовательными профилактическими осмотрами, максимально допустимого цикла обегания контролируемых точек в системах последовательного опроса и т. д.

Значение τ_m можно, в частности, определить как ближайшую к оси ординат абсциссу максимума кривизны условной плотности выбросов. Например, при $c \leqslant 1$, что соответствует априорной вероятности отказа, равной 0,016, получаем

$$1 - R_x(\tau_m) = \frac{(c - c_0)^2}{12}(1 - \Delta_1), \tag{16}$$

где

$$\Delta_1 \leqslant \frac{1}{12}.$$

В точке τ_m, определяемой согласно выражению (16), имеем

$$P_1(\tau_m) \approx 0{,}006.$$

Интервал $(0, \tau_m)$ представляется естественным назвать интервалом малых вероятностей отказа. При $\tau > \tau_m$ вероятности $P_1(\tau)$ и $P_2(\tau)$ очень быстро возрастают.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Б. Герцбах, Х. Б. Кордонский. Модели отказов. Изд-во «Советское радио», 1966.
2. И. Б. Герцбах. Модели профилактики. Изд-во «Советское радио», 1969.
3. Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. Математические методы в теории надежности. Изд-во «Наука», 1965.
4. П. И. Кузнецов, Л. А. Пчелинцев, В. С. Гайденко. Контроль и поиск неисправностей в сложных системах. Изд-во «Советское радио», 1969.
5. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности. Изд-во «Советское радио». 1969.
6. Г. Крамер, М. Лидбеттер. Стационарные случайные процессы. Изд-во «Мир», 1969.
7. В. И. Тихонов. Выбросы случайных процессов. Изд-во «Наука» 1969.
8. А. А. Свешников. Прикладные методы теории случайных функций. Изд-во «Наука», 1968.
9. Б. Р. Левин. Теоретические основы статистической радиотехники, кн. I. Изд-во «Советское радио», 1969.
10. А. Д. Болычевцев. Апостериорные вероятности аварийного режима контролируемого процесса. «Автометрия», 1968, № 4.
11. А. Д. Болычевцев. Условная плотность выбросов контролируемого процесса при централизованном управлении. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 4.
12. Таблицы вероятностных функций, т. I. Изд. АН СССР, 1958.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.