УДК 629.7.058.6

В. Н. НАЗЫРОВА, канд. техн. наук

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

В условиях постоянно повышающихся требований к точности определения состояния динамических обьектов возникает проблема учета погрешностей измерительных комплексов (ИК). Поскольку эти погрешности присутствуют и остаются неизменными на протяжении всего интервала наблюдения за объектом, считаем их систематическими. Известны алгоритмы определения систематик [1], когда наблюдение за объектом ведется двумя ИК, один из которых является эталоном. Такой подход не имеет практической ценности, так как в реальности эталонный ИК, как правило, отсутствует. Используя существующую методику измерений и расчета положения объекта в пространстве, можно построить вычислительную схему определения систематических погрешностей для двух ИК без эталона.

В данной работе проводится метрологический анализ такой вычислительной схемы. Информация, полученная на стадии метрологического анализа, позволяет сформировать условия разрешимости задачи определения систематик при реально существующих соотношениях: случайный шум — систематика с использованием априорной информации об объекте, ИК и участке наблюдения.

Постановка задачи. Состояние наблюдаемого объекта измеряется одновременно двумя ИК и определяется векторами параметров $\eta_i^j = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)})$, $i = 1, 2, \ldots, N$ — номер измерения; $j = 1, 2$ — номер ИК. Известно, что $\eta_i^j = \eta_{Ti}^j + \Delta\eta^j + \xi_i^j$ (1), где η_{Ti}^j — точное значение измеряемых параметров; $\Delta\eta^j$ — вектор систематик j-го ИК;

ξ_i^j — вектор случайного шума, $\xi_i^j \in N(0, \sigma^2 K^j)$, $K^j = \mathrm{diag}$ [illegible] что $\Delta\eta^j(l) \gg \sigma\sqrt{k_l^j}$, k_l^j — l-й диагональный элемент матрицы K^j, [illegible] $= 1, 2, 3$. Для определения положения объекта в пространстве необходимо перейти от вектора измеряемых параметров η к вектору декартовых координат $h = (x, y, z)$. Известно соотношение между η и h: $\eta(l) = f_l(h, h_{j\Phi})$ **(2)**, где $h_{j\Phi}$ — вектор, задающий геодезические параметры ИК, $l = 1 \div 3$. Оценки $\hat{h}^j$ в каждой i-й точке находятся как решение нелинейной системы уравнений $\eta_i^j = F(h_i^j, h_{j\Phi})$ **(3)**, где $F(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot))^*$. Каждое $\hat{h}_i^j$ получено в своей локальной системе координат, поэтому $\hat{h}_i^1$ и $\hat{h}_i^2$ не сравнимы между собой. Для приведения данных к единой системе координат осуществляются поворот и сдвиг, которые задаются соответственно матрицами A^j, B^j. Тогда $\tilde{h}_i^j = A^j\hat{h}_i^j + B^j$ **(4)**. При отсутствии либо совпадении $\Delta\eta^j$ для $j = 1, 2$, что маловероятно, с точностью до случайного шума должно выполняться соотношение $\tilde{h}_i^1 = \tilde{h}_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Следовательно, целесообразно искать оценки $\Delta\eta$ из условия

$$I(\Delta\eta) = \sum_{i}^{N} \|\tilde{h}_i^1 - \tilde{h}_i^2\|^2 \to \min_{\Delta\eta} \qquad (5)$$

при ограничениях $\Delta\eta_{\text{мин}} \leqslant \Delta\eta \leqslant \Delta\eta_{\text{макс}}$, где $\Delta\eta = (\Delta\eta^1 : \Delta\eta^2)$, $\Delta\eta_{\text{мин}}$, $\Delta\eta_{\text{макс}}$ — известные паспортные характеристики ИК.

Введем обозначения для системы (2) $g(h_i^j) = \eta_i^j - F(h_i^j, h_{j\Phi})$, где $g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot), g_3(\cdot))$. Тогда (3) перепишется как $g(h_i^j) = 0$ **(6)**. Эта система решается методом Ньютона в предположении, что $g(h)$ удовлетворяет всем необходимым для этого условиям [2; 3]. Учитывая, что в (5) используются данные, полученные в результате приближенного решения (6) по зашумленным и искаженным систематиками исходным измерениям, необходимо проанализировать погрешность вычисления $\tilde{h}_i^j$, причем линейный характер преобразования (4) позволяет ограничиться анализом погрешности оценки $\hat{h}_i^j$. Сравнение вклада вычислительных погрешностей и систематик в $\hat{h}_i^j$ дает возможность определить, является ли данная вычисляемая величина информационной относительно $\Delta\eta$. Таким образом, необходим метрологический анализ оценки $\hat{h}_i^j$, в результате которого будут систематизированы погрешности ее вычисления и получены количественные оценки этих погрешностей. Учитывая стохастический характер задачи, при анализе $\hat{h}_i^j$ следует исходить из общепринятых статистических свойств оценок. Однако в силу ограниченности объема исходной информации и специфики алгоритмов будут исследованы только отдельные свойства, чаще всего несмещенность оценки $\hat{h}_i^j$.

Метрологический анализ оценки $\hat{h}_i^j$. Погрешности искомой оценки можно классифицировать в зависимости от причин их возникновения. Погрешность, обусловленная методикой и алгоритмом нахождения оценки, возникающая при решении нелинейной системы (6) и имеющая место даже в отсутствие случайных шумов и систематик в измерениях, является методической погрешностью δ^M. Обозначим $\delta^M = \hat{h}_T^n - h_T$ (7) и соответственно $\Delta^M = \|\delta^M\|$ (8), где h_T — точное решение (6) при $\eta = \eta_T$; $\hat{h}_T^n$ — решение (6), полученное численным методом по измерениям η_T. Здесь и далее на стадии метрологического анализа индексы i, j опущены.

Случайная погрешность δ_s в оценке $\hat{h}$ является следствием зашумленности исходной информации. Учитывая случайную природу δ_s, ее характеристиками являются $E[\delta_s]$ — среднее и $D[\delta_s]$ — дисперсия. Можно рассматривать два типа случайной погрешности: теоретическую $\delta_s^{(1)}$ и реальную $\delta_s^{(2)}$:

$$\delta_s^{(1)} = \hat{h}_s - h_T \quad (9); \qquad \delta_s^{(2)} = \hat{h}_s^n - h_T, \tag{10}$$

где $\hat{h}_s$ — точное, а $\hat{h}_s^n$ — численное решение (6) при $\eta = \eta_T + \xi$. Распишем $\delta_s^{(2)}$ следующим образом:

$$\delta_s^{(2)} = \hat{h}_s^n - \hat{h}_s + \hat{h}_s - h_T = \delta_s^M + \delta_s^{(1)}, \tag{11}$$

где δ_s^M — методическая погрешность решения (6) при $\eta = \eta_s$. Таким образом, когда речь идет об оценке определенного типа погрешности, имеющей место при решении реальной системы, ее составляющей неминуемо будет соответствующая методическая погрешность. Присутствие систематик в исходных измерениях приводит к появлению систематической погрешности в $\hat{h}$, которую обозначим δ_c. Если $\hat{h}_c$ точное решение (6) при $\eta_c = \eta_T + \Delta\eta$, то $\delta_c^{(1)} = \hat{h}_c - h_T$ (12). Для практики представляет интерес рассмотрение систематической погрешности $\delta_c^{(2)} = \hat{h}_c^n - h_T$ (13), где $\hat{h}_c^n$ — численное решение (6) при η_c. Причем $\delta_c^{(2)} = \delta_c^M + \delta_c^{(1)}$, где δ_c^M — методическая погрешность решения (6) при $\eta = \eta_c$.

Погрешности δ^M, δ_c и δ_s, задаваемые (7)—(13), есть не что иное как смещения соответствующих оценок $\hat{h}$ относительно h_T. Найдем оценки указанных погрешностей.

Согласно итерационному характеру численного метода решения (6) $\hat{h}_T^n$ в (7) есть оценка, полученная после n итераций. Согласно [2] легко показать, что

$$\Delta^M = \|\hat{h}_T^n - h_T\| \leqslant \beta\gamma \|\hat{h}_T^{n-1} - h_T\|^2 \leqslant \ldots \leqslant (\beta\gamma)^{2n-1} \|\hat{h}_T^0 - h_T\|^{2^n} < (\beta\gamma)^{2^n-1} e_0, \tag{14}$$

где $\nabla g(h)$ — градиент (6); $\beta = \max\|\nabla^{-1} g(h^*)\|$; $\gamma = \mathrm{const}$ Липшица для $\nabla g(h^*)$, $h^* \in R_\varepsilon$, ε — заданный радиус окрестности решения h_T, $e_0 = \|\hat{h}_T^0 - h_T\|^{2^n}$. Аналогичные соотношения можно выписать для $\Delta_s^M = \|\delta_s^M\|$ и $\Delta_c^M = \|\delta_c^M\|$ с заменой e_0 на $e_s = \|\hat{h}^0 - h_T\|^{2^n}$ и $e_c = \|\hat{h}_c^0 - h_T\|^{2^n}$ соответственно. Относительно соотношения (14) и аналогичных ему для Δ_s^M и Δ_c^M следует заметить, что независимо от величин e_0, e_s, e_c можно гарантировать ограниченность методической погрешности только при условии $e_0^{1/2^n}\beta\gamma < 1$, т. е. это условие является необходимым для успешного поиска решения (6). Для того чтобы оценить $\delta_s^{(1)}$, проведем линеаризацию (6) в точке h_T при $\eta = \eta_s$. Тогда

$$h_s = h_T + [F'(h_T,\ h_\Phi)]^{-1}(\eta_s - F(h_T,\ h_\Phi)) = h_T + G(h_T)\,\xi,$$

где $G(h_T) = [F'(h_T,\ h_\Phi)]^{-1}$. Считаем среднее и дисперсию $\delta_s^{(1)}$:

$$E[\delta_s^{(1)}] = 0;\ D[\delta_s^{(1)}] = \sigma^2 G(h_T)\,KG(h_T)^*. \quad (15)$$

В дальнейшем при сравнительном анализе погрешностей различных типов потребуются обобщенные характеристики, поэтому целесообразно посчитать

$$\Delta_s^{(1)} = \|E[\delta_s^{(1)}]\| = 0;\ d_s^{(1)} = \|D[\delta_s^{(1)}]\| \leqslant \sigma^2\beta^2\|K\|. \quad (16)$$

Проводим аналогичные исследования с заменой h_s на $\tilde{h}_s^n$ и получаем оценки для $\delta_s^{(2)}$. Используя (11), (14) и (15), можно записать

$$E[\delta_s^{(2)}] = \delta_s^M,\ D[\delta_s^{(2)}] = D[\delta_s^{(1)}]$$

и, соответственно,

$$\Delta_s^{(2)} = \|E[\delta^{(2)}]\| = \|\delta_s^M\| \leqslant (\beta\gamma)^{2^n-1}e_s;\ d_s^{(2)} = \|D[\delta_s^{(2)}]\| = d_s^{(1)}. \quad (17)$$

Для получения оценки $\delta_c^{(1)}$ проведем линеаризацию (6) в точке h_T при $\eta = \eta_c$. Откуда $\hat{h}_c = h_T + G(h_T)(\eta_c - F(h_T,\ h_\Phi))$, или $\hat{h}_c = h_T + G(h_T)\,\Delta\eta$. Тогда согласно (12) $\delta_c^{(1)} = G(h_T)\,\Delta\eta$, или, используя известные ограничения (5) на $\Delta\eta$ для $\Delta_c^{(1)} = \|\delta_c^{(1)}\|$, можно записать $\bar{\beta}m \leqslant \Delta_c^{(1)} \leqslant \beta M$ (18), где $m = \|\Delta\eta_{\text{мин}}\|$, $M = \|\Delta\eta_{\text{макс}}\|$, $\bar{\beta} = \min\|\nabla^{-1}g(h^*)\|$, $h^* \in R_\varepsilon$. Используя (13)—(14) и (18), можно выписать оценку для $\delta_c^{(2)} = \delta_c^M + G(h_T)\,\Delta\eta$ (19) и, соответственно, $\Delta_c^{(2)} = \|\delta_c^{(2)}\| \leqslant (\beta\gamma)^{2^n-1}e_c + \beta M$ (20).

Пример формирования условий разрешимости. Оценки погрешности $\delta^м$, δ_c и δ_s служат основой для исследования условий разрешимости задачи определения систематик ИК в предлагаемой постановке. Очевидно, что одним из необходимых условий разрешимости является информационность (5) по отношению к $\Delta\eta$. Поскольку $\Delta\eta$ входит в $\hat{h}_i^j$ (и, соответственно, в $\tilde{h}_i^j$) посредством погрешности δ_c, это означает, что функционал (6) будет информационным относительно $\Delta\eta$ только в том случае, когда $\delta_c > \delta^м$ и $\delta_c > \delta_s$, т. е. когда основной вклад в погрешность определения $\hat{h}$ вносит $\Delta\eta$. Полный анализ условий разрешимости осуществляется с привлечением методов статистического анализа и может быть темой для отдельной работы. Здесь в качестве примера использования полученных оценок погрешностей приводится сравнение δ_c с $\delta^м$ и выводы, которые из этого следуют. Для практического использования полученных оценок недостает информации о e_0, e_s, e_c для соответствующих методических погрешностей.

Для задачи (3) известно правило задания $\hat{h}^0$ по реальным η исходя из физических соображений. Поэтому оценка этих величин не представляет труда на тестовых примерах с гарантией достоверности для реальных задач. Можно также получить оценки β, $\bar{\beta}$ и γ для заданной окрестности решения в каждой конкретной точке $\hat{h}_i^j$. Таким образом, на практике есть возможность получить оценки Δ^M. Сначала для каждого i и j проверяется выполнимость условия $e_c^{1/2n}\,\beta\gamma < 1$, гарантирующего сходимость решения (6). Предположим, что это условие выполняется. Задаем n — число итераций и считаем Δ_c^M. Используя (14), (18), проверяем выполнимость соотношения

$$\beta M < \Delta_c^M < (\beta\gamma)^{2^n-1} e_c. \qquad (21)$$

Если (21) выполняется, т. е. верхняя граница δ_c^1 не превосходит методической погрешности и с ростом n (21) продолжает сохраняться, следовательно, в этой точке наблюдения основной вклад в погрешность вычисления $\hat{h}_i^j$ вносит δ^M, а зависимость от $\Delta\eta$ практически отсутствует. Соотношение (21) может служить мерой эффективности поиска решения (6), причем если оно выполняется не в одной точке, а на всем интервале наблюдения, то следует считать, что исходная задача в предлагаемой постановке здесь неразрешима. В то же время, если

$$(\beta\gamma)^{2^n-1} e_c < \bar{\beta} m, \qquad (22)$$

то имеется гарантия, что вклад систематической погрешности превосходит вклад δ_c^M в $\hat{h}_i^j$.

Условие разрешимости (5) относительно $\Delta\eta$, кроме необходимого условия (22), содержит еще целый ряд подобных соотношений, в том числе и статистического характера.

Список литературы: 1. *Белова Н. С., Сотский Н. М.* Оценивание параметров движения объекта в системе управления // Автоматика и телемеханика. 1977. № 11. С. 30—38. 2. *Деннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решение нелинейных уравнений. М., 1988. 440 с. 3. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. М., 1983. 384 с.

Поступила в редколлегию 21.06.89