

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Метод R-функцій у математичному моделюванні

процесів лазерної термообробки

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи ПМм-23-1

Фуніков А.С.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва освітньої програми)

Керівник доц. Яловега І.Г.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“25” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Фунікову Антону Сергійовичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод R -функцій у математичному моделюванні процесів лазерної термообробки

затверджена наказом університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель процесу лазерної термообробки системою рухомих джерел

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір та обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Яловега І.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 80 с., 21 рис., 1 дод., 18 джерел.

МЕТОД ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, НОРМАЛІЗОВАНЕ РІВНЯННЯ, ПОЧАТКОВА-КРАЙОВА ЗАДАЧА, ЛАЗЕРНА ТЕРМООБРОБКА, РУХОМЕ ТОЧКОВЕ ДЖЕРЕЛО.

Об'єкт дослідження – процеси лазерної термообробки.

Мета роботи – застосування методу Гальоркіна та методу R -функцій до чисельного аналізу процесу лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла.

Методи дослідження – використовуються структурний метод (метод R -функцій) для побудови структури розв'язку початково-крайової задачі, що є математичною моделлю процесу лазерної термообробки, та метод Гальоркіна для нестационарних задач для апроксимації невизначеної компоненти зазначеної структури.

Результатом виконаного моделювання стала побудована 3D модель кільцевої та квадратної пластин із зображенням процесу лазерної термообробки рухомими точковими джерелами тепла, а також побудовані ізотерми, які демонструють рівні температури. Це дозволило провести аналіз процесів теплопередачі та оцінити розподіл температур у різних ділянках пластини під впливом декількох рухомих джерел тепла.

Отримані результати моделювання теплових полів можуть бути використані для проектування та вдосконалення теплових систем. Зокрема, вони дозволяють оптимізувати розташування джерел тепла та оцінити їх вплив на температурний режим пластини. Це сприяє визначенню найкращих умов обробки та запобігає виникненню термічних деформацій або нестабільності в матеріалі.

ABSTRACT

Introductory note: 80 pages, 21 figures, 1 appendix, 18 sources.

GALERKIN METHOD, *R*-FUNCTION METHOD, NORMALIZED EQUATION, INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM, LASER HEAT TREATMENT, MOVING POINT HEAT SOURCE

Object of research – laser heat treatment processes.

Purpose of work – application of the Galerkin method and the *R*-function method to the numerical analysis of the laser heat treatment process with a system of moving point heat sources.

Methods of research – the structural method (*R*-functions method) and the Galerkin method are employed for non-stationary problems.

The result of the simulation is a 3D model of ring-shaped and square plates demonstrating the process of laser heat treatment using moving point heat sources, as well as isotherms illustrating temperature levels. This enabled the analysis of heat transfer processes and the evaluation of temperature distribution in different areas of the plates under the influence of multiple moving heat sources.

The obtained results of thermal field modeling can be utilized for designing and optimizing thermal systems. In particular, they allow the optimization of heat source placement and assessment of their impact on the temperature regime of the plate. This contributes to determining the most favorable processing conditions and preventing thermal deformations or material instability.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	8
Вступ	9
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Основні положення теорії теплопровідності	11
1.1.1 Температурний градієнт	11
1.1.2 Закон Фур'є	12
1.1.3 Диференціальне рівняння теплопровідності	13
1.1.4 Умови однозначності для процесів теплопровідності	21
1.2 Найпоширеніші методи чисельного розв'язання задач теплопровідності	25
1.3 Змістовна та формальна постановки задачі	34
1.4 Постановка задач дослідження	35
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	37
2.1 Основи методу R -функцій	37
2.2 Метод Гальоркіна для нестационарних задач	48
2.3 Застосування методів R -функцій та Гальоркіна до чисельного аналізу процесу лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла	51
Висновки за розділом 2	56
3 Програмна реалізація	57
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 12.1	57
3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання процесу лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла	57
3.3 Опис програми	58
Висновки за розділом 3	59
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	61
4.1 Обчислювальний експеримент для кільцевої та квадратної областей	61

	7
Висновки за розділом 4	70
Висновки	72
Перелік джерел посилання	73
Додаток А Лістинг програми	75

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

МСЕ – метод скінченних елементів;

ГУ – граничні умови;

СЕ – скінченний елемент;

Вт/(м·К) – ват на метр-кельвін;

Дж – джоуль;

Вт/м³ – ват на метр кубічний;

кг/м³ – кілограм на метр кубічний;

м²/с – метр квадратний на секунду.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний розвиток технологій вимагає швидких і точних рішень для розв'язання складних задач, зокрема тих, що стосуються термообробки матеріалів. Лазерна термообробка з використанням точкових рухомих джерел тепла є одним із провідних методів, що забезпечує високу якість та точність обробки. Водночас складність фізичних процесів, які відбуваються під час цього виду термообробки, породжує значну кількість невирішених наукових питань, які потребують детального вивчення.

Математичне моделювання є незамінним інструментом для дослідження процесів лазерної термообробки. Воно дозволяє вивчати складні фізичні явища без необхідності проведення затратних натурних експериментів. Завдяки таким моделям можна не лише дослідити вплив різних параметрів на процес, але й прогнозувати зміну форми та властивостей матеріалів, а також визначати оптимальні умови обробки. Такі моделі базуються на фундаментальних положеннях фізики, термодинаміки та теплопровідності, а також враховують властивості матеріалів і зовнішні впливи. Це дозволяє зменшити витрати часу, фінансових і матеріальних ресурсів, які зазвичай потрібні для експериментальних досліджень.

Найбільш поширеними методами математичного моделювання процесів термообробки є метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. Проте, недоліками цих методів є потреба у дрібній сітці або у детальному розбитті розглядуваної області на скінчені елементи, що може призводити до складності в обробці складних геометричних конфігурацій та великої кількості обчислень.

Таким чином, необхідність удосконалення як теоретичних, так і практичних підходів до процесу лазерної термообробки залишається актуальною. Особливого значення набуває впровадження чисельних методів, зокрема на основі методів теорії R -функцій, які здатні покращити точність і ефективність моделювання та сприяти розв'язанню сучасних наукових і технічних задач.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної робо-

ти є сумісне застосування методів R -функцій та Гальоркіна до чисельного аналізу процесу лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану методів математичного моделювання процесів лазерної термообробки;
- на основі сумісного застосування методів Гальоркіна та R -функцій розробити алгоритм чисельного аналізу математичної моделі, що описує процес лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла;
- програмно реалізувати розроблений алгоритм у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 12.1;
- провести низку обчислювальних експериментів та проаналізувати їх результати.

Об'єктом дослідження є процеси лазерної термообробки.

Предметом дослідження є методи чисельного аналізу математичних моделей процесів лазерної термообробки.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються структурний метод (метод R -функцій) та метод Гальоркіна для нестационарних задач.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на XXVIII Міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка та молодь у XXI столітті» (м. Харків, 16-18 квітня 2024 р.) [14].

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Основні положення теорії теплопровідності

1.1.1 Температурний градієнт

На рисунку 1.1 зображені ізотерми в тілі довільної форми, відповідні температурам t і $t + \Delta t$ [17].

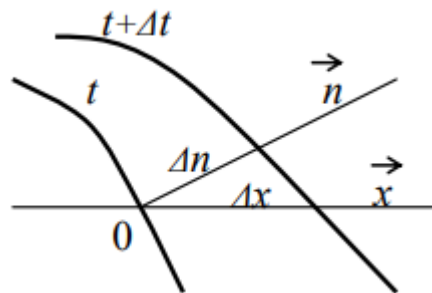


Рисунок 1.1 – До визначення температурного градієнта

Від точки 0, нанесеної на ізотермі з температурою t , зростання температури на величину Δt можна спостерігати в будь-якому з напрямів, окрім співпадаючого з даною ізотермою. Проте найбільш інтенсивне зростання температури у напрямі нормалі до ізотерми в даній точці, в якому відстань Δn між ізотермами найменша. Це зростання температури характеризується температурним градієнтом – вектором, направленим по нормалі до ізотермічної поверхні у бік зростання температури і чисельно рівним частинній похідній від температури по відстані, виміряній по цій нормалі, тобто

$$\text{grad } t = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta t}{\Delta n} \right) = \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.1)$$

Одиниця вимірювання $\text{grad } t$ – Кельвін на метр (К/м).

Додатний напрямок вектора – у бік збільшення температури, тобто зворотний по відношенню до вектора теплового потоку, направленого у бік зниження температури.

Таким чином, скалярному полю температури відповідає векторне поле температурних градієнтів, а умову виникнення теплового потоку можна сформулювати нерівністю $\text{grad } t \neq 0$.

1.1.2 Закон Фур'є

В основі теорії теплопровідності лежить закон (гіпотеза) Фур'є (1807 р.) [17], відповідно до якого елементарна кількість теплоти, яка переноситься теплопровідністю усередині тіла – суцільного середовища, що не має переривистої будови, пропорційна температурному градієнту, площі ізотермічної поверхні dF , перпендикулярної напрямку теплового потоку, і тривалості процесу $d\tau$, тобто

$$dQ_{\tau} = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF d\tau. \quad (1.2)$$

Знак «мінус» у правій частині рівняння відображає протилежність напрямків векторів теплового потоку і температурного градієнта: теплота поширюється у бік зниження температури, приріст температури в цьому напрямку від'ємний.

Для теплового потоку рівняння (1.2) запишеться у вигляді:

$$Q = -\lambda \int_F \frac{\partial t}{\partial n} dF, \quad (1.3)$$

і для густини теплового потоку:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.4)$$

Коефіцієнт пропорційності λ в рівняннях (1.2) – (1.4) називається коефіцієнтом теплопровідності. Його фізичне значення легко з'ясувати, розглядаючи розв'язок рівняння (1.4) відносно λ :

$$|\lambda| = -\frac{q}{\frac{\partial t}{\partial n}}.$$

Як видно, коефіцієнт теплопровідності є величиною, чисельно рівною кількості теплоти, яка передається в одиницю часу через одиничну ізотермічну поверхню тіла при одиничному температурному градієнті. Коефіцієнт теплопровідності вимірюється у Вт/(м·К).

1.1.3 Диференціальне рівняння теплопровідності

Вивчення будь-якого фізичного явища зводиться до встановлення залежності між величинами, що характеризують це явище. Для складних фізичних процесів, в яких основні величини можуть істотно змінюватися у просторі та часі, встановити залежність між цими величинами дуже важко. У цих випадках на допомогу приходить метод математичної фізики, який виходить з того, що обмежується проміжок часу і зі всього простору розглядається лише елементарний об'єм. Це дозволяє в межах елементарного об'єму і вибраного малого відрізка часу нехтувати зміною деяких величин, що характеризують процес, і істотно спростити залежність [17].

Вибрані таким чином елементарний об'єм dv і елементарний проміжок часу $d\tau$, в межах яких розглядається процес, що вивчається, з математичної точки зору є величинами нескінченно малими, а з фізичної точки зору – величинами ще достатньо великими, щоб в їх межах можна було ігнорувати дискретну будову середовища і розглядати її як континуум (суцільну). Отримана таким чином залежність є загальним диференціальним рівнянням даного процесу.

Інтегруючи диференціальні рівняння, можна отримати аналітичну залежність між величинами для всієї області інтеграції і всього даного проміжку часу.

При розв'язанні задач, пов'язаних із знаходженням температурного поля, необхідно мати диференціальні рівняння теплопровідності. Для полегшення виводу цього диференціального рівняння зробимо наступні припущення:

- тіло є однорідним та ізотропним;
- фізичні параметри є сталими;
- деформація даного об'єму, пов'язана зі зміною температури, є дуже малою величиною порівняно з самим об'ємом;
- внутрішні джерела тепла в тілі, які в загальному випадку можуть бути задані як $q_v = f(x, y, z, \tau)$, розподілені рівномірно.

В основі виводу диференціального рівняння теплопровідності лежить закон збереження енергії. Для даного випадку він має вигляд: кількість теплоти dQ , введена в елементарний об'єм зовні за час $d\tau$ унаслідок теплопровідності, а також від внутрішніх джерел, дорівнює зміні внутрішньої енергії або ентальпії речовини (залежно від розгляду ізохорного або ізобарного процесу), що міститься в елементарному об'ємі

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ, \quad (1.5)$$

де dQ_1 – кількість теплоти, Дж, введеної в елементарний об'єм шляхом теплопровідності за час $d\tau$;

dQ_2 – кількість теплоти, яка за час $d\tau$ виділилась в елементарному об'ємі dV за рахунок внутрішніх джерел;

dQ – зміна внутрішньої енергії або ентальпії речовини, що міститься в елементарному об'ємі dV за час $d\tau$.

Для знаходження складових рівняння (1.5) виділимо в тілі елементарний паралелепіпед зі сторонами dx , dy , dz (рис. 1.2). Паралелепіпед розташований так, щоб його грані були паралельні відповідним координатним площинам.

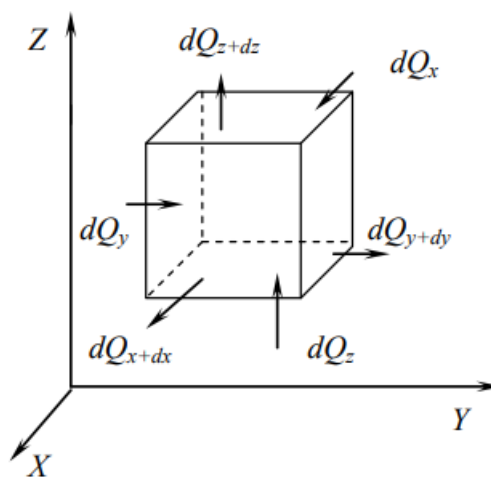


Рисунок 1.2 – До виводу диференціального рівняння теплопровідності

Кількість теплоти, яка підводиться до граней елементарного об'єму за час $d\tau$ у напрямках осей OX , OY , OZ , позначимо відповідно dQ_x , dQ_y , dQ_z .

Кількість теплоти, яка відводиться через протилежні грані в тих же напрямках, позначимо відповідно dQ_{x+dx} , dQ_{y+dy} , dQ_{z+dz} . Кількість теплоти, яка підводиться до грані $dy dz$ у напрямку осі OX за час $d\tau$, становить $dQ_x = q_x dy dz d\tau$, де q_x – проекція густини теплового потоку на напрямок нормалі до вказаної грані. Кількість теплоти, відведена через протилежну грань елементарного паралелепіпеда у напрямку осі OX , запишеться як

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz d\tau.$$

Різниця кількості теплоти, підведеної до елементарного паралелепіпеда і відведеної від нього за час $d\tau$ у напрямі осі OX , є кількістю теплоти

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx},$$

або

$$dQ_{x1} = q_x dydzd\tau - q_{x+dx} dydzd\tau. \quad (1.6)$$

Функція q_{x+dx} є неперервною в даному інтервалі dx і може бути розкладена в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Якщо обмежитися двома першими членами ряду, то рівняння (1.6) запишеться у вигляді

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydz d\tau. \quad (1.7)$$

Аналогічно можна знайти кількість теплоти, що підводиться до елементарного об'єму в напрямках двох інших координатних осей.

Кількість теплоти dQ , яка підведена теплопровідністю до даного об'єму, дорівнюватиме

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dydz. \quad (1.8)$$

Визначимо другу складову рівняння (1.5). Позначимо кількість теплоти,

що виділяється внутрішніми джерелами в одиниці об'єму середовища в одиницю часу і яке називається потужністю внутрішніх джерел теплоти, через q_v , Вт/м³. Тоді

$$dQ_2 = q_v dx dy dz d\tau. \quad (1.9)$$

Третя складова в рівнянні (1.5) знайдеться залежно від характеру термодинамічного процесу зміни системи.

При розгляді ізохорного процесу вся теплота, підведена до елементарного об'єму, піде на зміну внутрішньої енергії речовини, укладеної в цьому об'ємі, тобто $dQ = dU$.

Якщо розглядати внутрішню енергію одиниці об'єму $u = u(t, v)$, тоді dU знаходиться як

$$dU = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dx dy dz, \quad (1.10)$$

де c_v – питома ізохорна теплоємність, Дж/(кг·К);

ρ – густина речовини, кг/м³.

Підставляючи вирази (1.8), (1.9) і (1.10) у рівняння (1.5), отримаємо:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v, \quad (1.11)$$

або

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\text{div} q + q_v. \quad (1.12)$$

Вираз (1.12) є диференціальним рівнянням енергії для ізохорного процесу перенесення теплоти.

При розгляді ізобарного процесу вся теплота, підведена до об'єму, піде на зміну ентальпії речовини, укладеної в цьому об'ємі, і рівняння (1.6) запишеться таким чином:

$$dQ_1 + dQ_2 = dI. \quad (1.13)$$

Якщо розглядати ентальпію одиниці об'єму як $i = i(t, p)$, то

$$dI = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dx dy dz = \rho \frac{\partial i}{\partial t} dx dy dz, \quad (1.14)$$

де c_p – питома ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К).

Якщо вирази (1.8), (1.9) і (1.14) підставити в рівняння (1.13), отримаємо:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v, \quad (1.15)$$

або

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div} q + q_v. \quad (1.16)$$

Співвідношення (1.16) є диференціальним рівнянням енергії в загальному вигляді для ізобарного процесу перенесення теплоти.

У твердих тілах перенос тепла здійснюється відповідно до закону Фур'є ($q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$), числове значення різниці c_p і c_v мале, та можна прийняти

$$c_p = c_v = c.$$

Проекції вектора густини теплового потоку на координатні осі OX, OY, OZ визначаються виразами:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Підставляючи отримані вирази проєкцій вектора густини теплового потоку в рівняння (1.13) і опускаючи індекс при c , отримаємо:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c_p \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c_p \rho}, \quad (1.17)$$

або

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c_p \rho} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (1.18)$$

Вираз (1.17), так само як і (1.18), називається диференціальним рівнянням теплопровідності. Воно встановлює зв'язок між часовою і просторовою змінами температури в будь-якій точці тіла, в якому відбувається процес теплопровідності.

Загальне диференціальне рівняння теплопровідності в частинних похідних має ту ж форму, що і (1.17), але зі змінними теплофізичними характеристиками λ , c_p , ρ , які можна позначити як $\lambda(x, y, z, t)$, $c_p(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$. Такий запис включає як просторово-часову, так і температурну залежність. Рівняння (1.17) описує велику кількість задач теплопровідності, що становлять практичний інтерес. Так, якщо прийняти теплофізичні характеристики сталими, що передбачалося при виводі рівняння, то (1.17) набуде виду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (1.19)$$

У рівнянні (1.19) можна позначити:

$$\frac{\lambda}{c_p \rho} = a$$

та

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t,$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – вираз оператора Лапласа в декартовій системі координат.

Вираз $\nabla^2 t$ в циліндричній і сферичній системах координат матиме вигляд:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2},$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}.$$

З урахуванням введених позначень рівняння (1.19) запишеться таким чином:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}. \quad (1.20)$$

Коефіцієнт пропорційності a , $\text{м}^2/\text{с}$, у рівнянні (1.20) називається коефіцієнтом температуропровідності і є фізичним параметром речовини.

Якщо система тіл не містить внутрішніх джерел теплоти ($q = 0$), тоді вираз (1.20) набуває форми рівняння Фур'є:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (1.21)$$

Якщо є внутрішні джерела теплоти, але температурне поле стаціонарне $t = t(x, y, z)$, то диференціальне рівняння теплопровідності перетворюється на рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.22)$$

Для стаціонарної теплопровідності й відсутності внутрішніх джерел теплоти вираз (1.22) набуває вигляду рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.23)$$

1.1.4 Умови однозначності для процесів теплопровідності

Оскільки диференціальне рівняння теплопровідності виведено на основі загальних законів фізики, то воно описує явище теплопровідності в загальному вигляді. Тому можна сказати, що отримане диференціальне рівняння описує цілий клас явищ теплопровідності. Щоб з незліченної кількості виділити конкретно даний процес і дати його повний математичний опис, до диференціального рівняння необхідно додати математичний опис всіх особливостей даного про-

цесу. Ці особливості, які спільно з диференціальним рівнянням дають повний математичний опис конкретного процесу теплопровідності, називаються умовами однозначності або крайовими умовами.

Умови однозначності включають:

- геометричні умови, які характеризують форму та розміри тіла, в яких відбувається процес;
- фізичні умови, які характеризують фізичні властивості середовища та тіла (також може бути заданий закон розподілу внутрішніх джерел тепла);
- часові (початкові) умови, що характеризують розподіл температур у тілі, що вивчається, в початковий момент часу (ці умови необхідні при розгляді нестационарних процесів і полягають у задаванні закону розподілу температури усередині тіла в початковий момент часу);
- межові умови, що характеризують взаємодію даного тіла з навколишнім середовищем (межові умови можуть бути задані декількома способами).

В загальному випадку початкова умова аналітично може бути записана так:

$$t = f(x, y, z), \text{ коли } \tau = 0. \quad (1.24)$$

При рівномірному розподілі температури в тілі початкова умова спрощується:

$$t = t_0 = \text{const}, \text{ коли } \tau = 0. \quad (1.25)$$

Межові умови першого роду. Задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_c = f(x, y, z, \tau), \quad (1.26)$$

де t_c – температура на поверхні тіла;

x, y, z – координати поверхні тіла.

В окремому випадку, коли температура на поверхні є незмінною протягом всього часу протікання процесів теплообміну, рівняння (1.26) спрощується і набуває вигляду:

$$t_c = \text{const.}$$

Межові умови другого роду. Задаються значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла і будь-якого моменту часу:

$$q_n = f(x, y, z, \tau), \quad (1.27)$$

де q_n – щільність теплового потоку на поверхні тіла.

У найпростішому випадку густина теплового потоку по поверхні і з часом залишається сталою:

$$q_n = q_0 = \text{const.} \quad (1.28)$$

Межові умови третього роду. При цьому задаються температура навколишнього середовища $t_{жс}$ і закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Для опису процесу теплообміну між поверхнею тіла і середовищем використовується закон Ньютона-Ріхмана.

Процес теплообміну між поверхнею тіла і середовищем відноситься до дуже складних процесів і залежить від великої кількості параметрів.

Згідно з законом Ньютона-Ріхмана кількість теплоти, що віддається одиницею поверхні тіла в одиницю часу, пропорційна різниці температур поверхні тіла t_c та навколишнього середовища $t_{жс}$ ($t_c > t_{жс}$):

$$q = \alpha(t_c - t_\infty), \quad (1.29)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Коефіцієнт тепловіддачі характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем. Чисельно він дорівнює кількості теплоти, що віддається (або сприймається) одиницею поверхні в одиницю часу при різниці температур між поверхнею тіла і навколишнім середовищем, рівній одному градусу.

Згідно із законом збереження енергії кількість теплоти, яка відводиться з одиниці поверхні, в одиницю часу унаслідок тепловіддачі (рівняння (1.29)), повинна дорівнювати теплоті, що підводиться до одиниці поверхні в одиницю часу унаслідок теплопровідності з внутрішніх об'ємів тіла (рівняння (1.4)), тобто

$$\alpha(t_c - t_{жс}) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1.30)$$

де n – нормаль до поверхні тіла; індекс “с” вказує на те, що температура та градієнт відносяться до поверхні тіла (при $n = 0$).

Остаточно граничну умову третього роду можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_c - t_\infty). \quad (1.31)$$

Рівняння (1.31) по суті є окремим випадком закону збереження енергії для поверхні тіла.

Межові умови четвертого роду. В цьому випадку теплообмін системи тіл або тіла з навколишнім середовищем здійснюється за законом теплопровідності. Передбачається, що виконуються умови рівності температур і теплових потоків по обидві сторони від межі розділу. За відсутності на межі розділу сере-

довищ процесів з виділенням або поглинанням теплоти умови спряження мають вигляд:

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = \lambda_2 \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c;$$

$$t_1(x_c, y_c, z_c, \tau) = t_2(x_c, y_c, z_c, \tau).$$

Диференціальне рівняння (1.31) спільно з умовами однозначності дає повне математичне формулювання конкретної задачі теплопровідності. Поставлена таким чином задача розв'язується аналітичним, чисельним або експериментальним методом.

1.2 Найпоширеніші методи чисельного розв'язання задач теплопровідності

Розглянемо два найбільш поширені методи чисельного розв'язання задач теплопровідності: метод скінченних елементів і метод скінченних різниць [16]. Обидва підходи мають високу популярність завдяки своїй універсальності та відносній простоті, що дозволяє ефективно моделювати теплові процеси у різноманітних геометричних конфігураціях і за різних граничних умов.

Метод скінченних різниць базується на заміні похідних їх наближеними значеннями, вираженими через різниці значень функцій у окремих дискретних точках вузлів сітки. Диференціальне рівняння в результаті таких перетворень замінюється еквівалентним співвідношенням у скінченних різницях, розв'язання якого зводиться до виконання нескладних алгебраїчних операцій.

Кінцевий результат розв'язання задається виразом, за яким значення температури у даній точці є функцією часу у складних вузлових точках. Повторюваність однакових операцій при розрахунку полів температури створює значні зручності для застосування обчислювальних машин.

Наближену заміну першої та другої похідних через різницеві співвідношення можна виконати наступним чином [16]. Нехай дана функція $y = f(x)$ (рис 1.3).

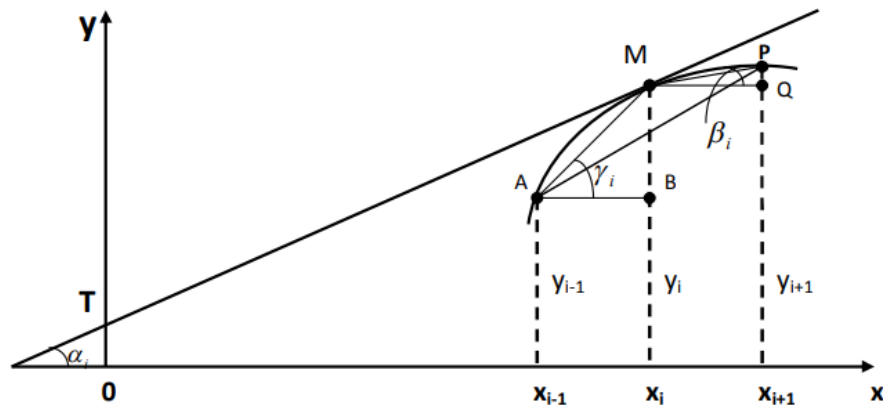


Рисунок 1.3 – Схема визначення похідної функції та заміни її різницевими відношеннями

Якщо через λ_i позначити кут, утворений додатним напрямком осі абсцис і дотичною до кривої, проведеною в точці $M(x_i, y_i)$, то похідна функція $x = x_i$ визначається за формулою $y_i \operatorname{tg} \lambda_i$. Візьмемо на кривій дві сусідні точки $A(x_{i-1}, y_{i-1})$ та $P(x_{i+1}, y_{i+1})$ так, щоб різниці $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ були достатньо малими, і наближено замінимо λ_i на β_i або γ_i . Тоді

$$y_i \approx \operatorname{tg} \beta_i = \frac{OP}{MQ} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (1.32)$$

або

$$y_i \approx \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{BM}{AB} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (1.33)$$

Якщо ж кутовий коефіцієнт дотичної MT наближено замінити кутовим

коефіцієнтом січної AP , то

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (1.34)$$

Праві частини формул (1.32) та (1.33) називаються відповідно різницеvim співвідношенням вперед, різницеvim співвідношенням назад і симетричним різницеvim співвідношенням. Наближене значення другої похідної y''_i функції при $y = f(x)$ може бути отримане, якщо замінити криву на ділянці AP ламаною лінією AMP , яка має в точці M два нахили, тобто

$$y''_i = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i-1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i+1}}{h} \right] = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (1.35)$$

Розглянемо, наприклад, одновимірне рівняння теплопровідності для ізоляованого тонкого стержня довжиною L . Оскільки $T(x, y)$ залежить від двох змінних x та t , то використовуємо сітку прямокутного типу (рис. 1.4).

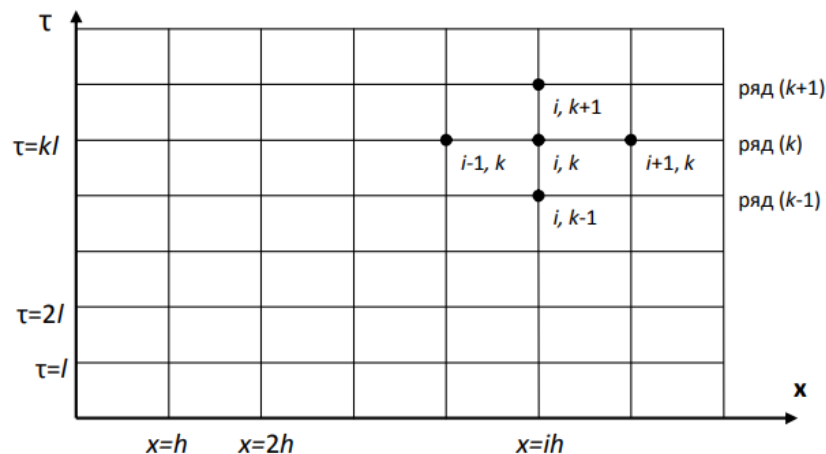


Рисунок 1.4 – Схема розрахунку по сітці прямокутного типу

На осі абсцис відкладаємо відрізок довжиною L і ділимо його на n рів-

них частин. Отриманий крок на осі абсцис позначимо через $h = \frac{L}{n}$. Точки поділу (вузли) на осі мають абсциси $x = 0, x = h, \dots, x = L$. По осі ординат відкладаємо значення часу через рівні проміжки l . Проведемо через отримані вузли на осях координат прямі, паралельні координатним осям, які утворюють прямокутну сітку. Значення T у вузлах, що лежать на осях координат прямої, паралельної осі ординат і розташованої на відстані L , знаходяться з початкових і межових умов.

Задача наближеного чисельного інтегрування рівняння (1.35) за методом сіток полягає у знаходженні наближеного значення функції у кожному вузлі сітки. Позначимо T_i^k істинне значення температури в точці стержня $x = ih$ в момент $t = kl$. Виразимо частинні похідні у точці (ih, kl) через різницеві співвідношення по формулах (1.32) – (1.34), тобто покладемо

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_i^k}{\partial t} &= \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{l} + \xi_2, \\ \frac{\partial^2 T_i^k}{\partial x^2} &= \frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2} + \xi_2.\end{aligned}\tag{1.36}$$

Тоді у вузлі (ih, kl) диференціальне рівняння (1.36) замінюється співвідношенням

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{l} + \xi = a \left(\frac{T_{i-1}^k - 2T_i^k + T_{i+1}^k}{h^2} + \xi_2 \right)$$

або

$$T_i^{k+1} = \frac{1-2al}{h^2} T_i^k + \frac{al}{h^2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) + lk,\tag{1.37}$$

де $k = a\xi_2 - \xi_1$. Відкидаючи у виразі (1.37) залишковий член, отримуємо різни-
цеве рівняння

$$T_i^{k+1} = \frac{1+2al}{h^2}T_i^k + \frac{al}{h^2}(T_{i-1}^k + T_{i+1}^k), \quad (1.38)$$

у якому T_i^k позначено наближене значення величини у тому ж вузлі (ih, kl) .
Формула (1.38) дозволяє обчислити значення у вузлах горизонтального ряду
($k+1$) за значеннями T , які знаходяться тільки в одному попередньому ряду
(k).

Тому за допомогою формули (1.38) можна знайти значення у вузлах пер-
шого горизонтального ряду при $k=1$ за відомими із крайових умов значеннями
температури у вузлах самої осі OX . Отримуємо таким чином обчислення зна-
чення в першому ряду, за тією ж формулою, значення у вузлах другого горизо-
нтального ряду, тобто при $t=1$. Цей процес побудови можна продовжувати як
завгодно, оскільки значення температури у вузлах прямих $x=0$ та $x=L$ будуть
відомі з межових умов. Формулу (1.35) перепишемо в зручнішому вигляді:

$$T_A = \frac{1-2la}{h^2}T_0 + \frac{la}{h^2}(T_1 + T_2). \quad (1.39)$$

Обираючи співвідношення між кроками h та l різним чином, з рівняння
(1.39) можна отримати ряд окремих співвідношень. Наприклад:

$$T_A = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}, \quad l = \frac{h^2}{3a},$$

$$T_A = \frac{T_1 + 4T_2 + T_3}{6}, \quad l = \frac{h^2}{6a},$$

$$T_A = \frac{T_1 + 10T_2 + T_3}{12}, \quad l = \frac{h^2}{12a}.$$

Взагалі при $l = \frac{h^2}{Pa}$

$$T_A = \frac{T_1 + (P-2)T_2 + T_3}{P}. \quad (1.40)$$

Особливо простий вигляд формула набуває при $P = 2$

$$T_A = \frac{T_1 + T_3}{2}. \quad (1.41)$$

Ця формула особливо широко використовується при графічному розв'язанні нестационарних задач теплопровідності.

При $P = 1$ має місце розбіжна обчислювальна схема. При розв'язанні нестационарних рівнянь теплопровідності питання співвідношення між h та l , а також похибка округлення в чисельному розв'язанні відіграють першорядну роль. Їх визначає збіжність і стійкість отриманих розв'язків. Тому формулою (1.39) можна користуватися тільки при $P \geq 2$. Найбільший крок l дає формула (1.41) при $P = 2$. Формула (1.40) тим точніша, чим більше P .

Розглянута сітка для чисельного інтегрування рівняння (1.40) зручна, коли задача розв'язується при межових умовах I роду: у цьому випадку межові прямі належать самій сітці. Якщо рівняння розв'язується при межових умовах III роду, практика обчислень $x = 0$ і $x = l$ та теоретичні дослідження показують, що для підвищення точності визначення потенціалу на границях слід вводити додаткові вузлові точки, розташовані поза досліджуваною областю. Наприклад, розв'язуючи рівняння (1.37) при межових умовах

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} [T(0, t) - T_0];$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \frac{\alpha}{\lambda} [T(L,t) - T_0], \quad (1.42)$$

сітку треба будувати так, щоб права гранична пряма лежала посередині між двома прямими $x = x_n$ і $x = x_{n+1}$, а ліва – посередині між прямими $x = x_0$ і $x = x_1$ (рис. 1.5), $x = \frac{h}{2}$, тобто у розгляд вводяться T_{n+1}^k , T_c^k значення функцій для точок, розташованих поза досліджуваною областю.

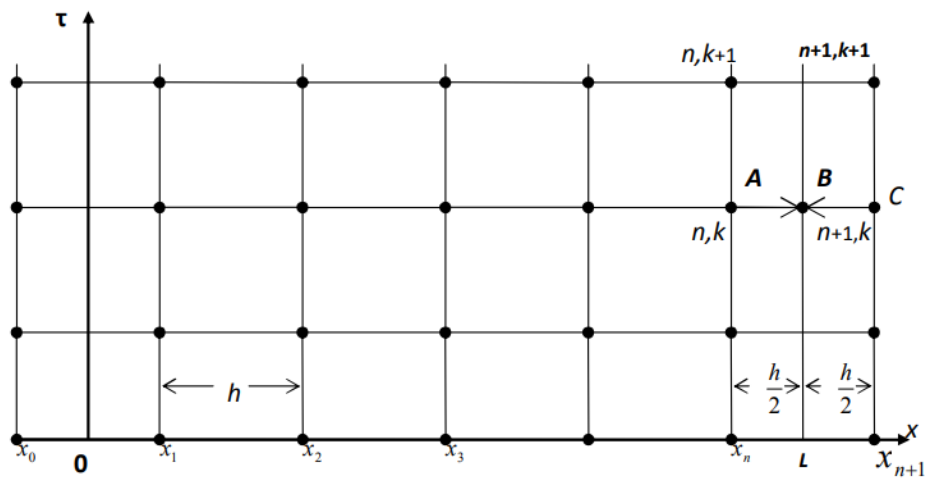


Рисунок 1.5 – Схема розрахунку для задачі нестационарної теплопровідності

Похідну $\frac{\partial T}{\partial x}$, що входить у друге рівняння (1.42), тобто у точці $B(L, k, l)$,

замінюємо симетричним різницеvim співвідношенням

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{h} + \xi',$$

а значення температури на самій поверхні, тобто $T(L, k, l)$, беремо як середнє арифметичне значення температури $T(L, k, l) = \frac{T_{n+1}^k + T_n^k}{2}$. Тоді умова (1.42) за-

пишеться як $\frac{T_{n+1}^k - T_n^k}{h} + \xi' = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Або, переходячи до наближених значень T , отримаємо після перетворення

$$T_{n+1}^k = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2\lambda}\right) T_n^k + h \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T_c}{l + \frac{h\alpha}{2\lambda}}.$$

За формулою знаходяться наближені значення функції у вузлах допоміжної прямої $x = L + \frac{h}{2}$. Значення температури на самій межовій прямій визначаються за формулою $T(L, k, l) = \frac{T_{n+1,k} + T_{n,k}}{h}$, що після перетворень дає

$$T_{n+1,k} = \frac{\left(1 - \frac{h\alpha}{2\lambda}\right) T_{n,k} + h \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T_0}{l + \frac{h\alpha}{2\lambda}},$$

де $S = \frac{\lambda}{\alpha}$.

Значення температури у вузлах допоміжної прямої $x = -\frac{h}{2}$ знаходиться за формулою

$$T_{0,k} = \frac{\frac{h\alpha}{2\lambda} + T_0}{1 + \frac{h\alpha}{2\lambda}}.$$

На лівій поверхні

$$T(0, k, l) = \frac{\frac{h \alpha}{2 \lambda} T_0 + T_1, k}{1 + \frac{h \alpha}{2 \lambda}} = \frac{2 S T_1, k + h T_0}{2 S + h}.$$

Основна ідея методу скінченних елементів (МСЕ) полягає в тому, що будь-яку неперервну величину (температуру, тиск, переміщення) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченній кількості підобластей.

Кусково-неперервні функції визначаються за допомогою значень неперервної величини в скінченній кількості точок розглядуваної області.

У загальному випадку неперервна величина заздалегідь невідома і потрібно визначити значення цієї величини в деяких внутрішніх точках області.

При побудові дискретної моделі неперервної величини виконуються наступні дії:

а) у розглядуваній області фіксується скінченне число точок (ці точки називаються вузловими або просто вузлами);

б) значення неперервної величини в кожній вузловій точці вважається змінною і має бути визначене;

в) область визначення неперервної величини розбивається на скінченне число підобластей, що називаються елементами; ці елементи мають спільні вузлові точки і в сукупності апроксимують форму області;

г) неперервна величина апроксимується на кожному елементі поліномом, який визначається за допомогою вузлових значень цієї величини; для кожного елемента визначаються свої поліноми, які підбираються так, щоб зберігалася неперервність величини вздовж меж елемента.

Метод скінченних елементів (МСЕ) має важливу перевагу перед методом скінченних різниць (МСР), яка полягає у можливості поділу розрахункової області довільної форми на скінченні елементи. Це дозволяє виконувати розрахунки фізичних полів для об'єктів із реальними конструктивними особливостями.

Серед недоліків МСЕ можна виділити залежність точності розрахунків

від сітки скінченних елементів та складність оцінювання похибок.

Альтернативний підхід, що усуває зазначені недоліки, базується на використанні методу R -функцій, створеного академіком НАУ України В.Л. Рвачовим разом із його науковою школою [12].

1.3 Змістовна та формальна постановки задачі

Розглядається задача розрахунку поля температури в плоскій пластинці, яка займає область Ω , при її лазерній обробці системою з m точкових джерел, що рухаються областю Ω , за законами $x_i^*(t)$, $y_i^*(t)$, $i=1, \dots, m$ [14]. На межі $\partial\Omega$ пластинки Ω , відбувається теплообмін з навколишнім середовищем (нульової температури) за законом Ньютона, а у початковий момент часу температура у пластинці Ω , дорівнює нулю. Математичною моделлю такого процесу є наступна мішана задача для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T - pT + \sum_{i=1}^m Q_i \delta(x - x_i^*(t)) \delta(y - y_i^*(t)), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.43)$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.45)$$

де p – параметр, який моделює інтенсивність поверхневого охолодження пластини;

$x^*(t)$, $y^*(t)$ – функції, які задають траєкторію руху точкового джерела потужності Q ;

$\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

α – коефіцієнт, що характеризує зовнішню теплопровідність.

Як область обчислення D обирається кільце з центром у точці $(1, 1)$, зовнішнім радіусом 1, внутрішнім радіусом 0.25 та квадрат з довжиною сторін 2. Межу цих областей розглядаємо як теплоізолювану. При цьому в початковий момент часу температура всюди в D дорівнює нулю.

У кільці два точкових джерела сталої потужності Q_1 та Q_2 рухаються за колом $R_1 = 0.5$ та $R_2 = 0.9$ зі сталою лінійною швидкістю $V_1 = 3$ та $V_2 = 6$ по тра-

$$\begin{aligned} \text{екторіям} \quad x_1^* &= 1 + R_1 \cos \phi_1, & y_1^* &= 1 + R_1 \sin \phi_1, & \phi_1 &= \frac{V_1 t}{R_1}, & x_2^* &= 0.5 + R_2 \cos \phi_2, \\ y_2^* &= 0.5 + R_2 \sin \phi_2, & \phi_2 &= \frac{V_2 t}{R_2}. \end{aligned}$$

У квадрата два точкових джерела сталої потужності Q_1 та Q_2 рухаються за колом $R_1 = 0.25$ та $R_2 = 0.75$ зі сталою лінійною швидкістю $V_1 = 3$ та $V_2 = 5$ по

$$\begin{aligned} \text{траєкторіям} \quad x_1^* &= 0.25 R_1 \cos \phi_1, & y_1^* &= 0.25 R_1 \sin \phi_1, & \phi_1 &= \frac{V_1 t}{R_1}, & x_2^* &= 0.75 R_2 \cos \phi_2, \\ y_2^* &= 0.75 R_2 \sin \phi_2, & \phi_2 &= \frac{V_2 t}{R_2}. \end{aligned}$$

1.4 Постановка задач дослідження

На основі актуальності теми дослідження та проведеного аналізу сучасного стану математичного моделювання лазерної термообробки, можна дійти висновку, що складність фізичних процесів, які супроводжують цей вид обробки, вимагає застосування чисельних методів, які забезпечують високу точність і адаптацію до складних геометричних конфігурацій. Особливий інтерес викликає використання методу R -функцій для моделювання таких процесів.

Метою кваліфікаційної роботи є розробка та чисельне моделювання процесів лазерної термообробки з точковим рухомим джерелом тепла, яке

дозволяє врахувати специфіку розподілу температур і вплив динамічних параметрів обробки.

Для досягнення мети дослідження необхідно виконати наступні завдання:

– розробити алгоритм чисельного аналізу математичної моделі процесу термообробки, спираючись на сумісне використання методу Гальоркіна та методу R -функцій;

– здійснити програмну реалізацію створеного алгоритму у середовищі комп'ютерної алгебри Mathematica 12.1;

– провести серію обчислювальних експериментів для аналізу теплових процесів та узагальнити результати для формулювання висновків про вплив параметрів обробки.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основи методу R -функцій

При проведенні розрахунків багатьох фізичних процесів виникає потреба в аналітичному описі заданих геометричних об'єктів за допомогою одного рівняння. В цьому полягає обернена задача аналітичної геометрії.

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії [5]. Нехай в \mathbb{R}^2 задано геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і необхідно побудувати функцію $\omega(x, y)$, додатну всередині Ω , від'ємну ззовні Ω та рівну нулеві на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, що є межею $\partial\Omega$ області Ω [12].

Функція $\omega(x, y)$ може бути досить просто побудована за допомогою методу R -функцій для областей довільної форми, причому функція $\omega(x, y)$ у цьому випадку буде елементарною функцією та матиме вигляд єдиного аналітичного виразу.

Введемо до розгляду характеристичну функцію, що відповідає області Ω

$$\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Маючи в розпорядженні деяку систему характеристичних функцій $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) та булеву функцією $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, можна побудувати предикат

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)),$$

що визначає область Ω , побудовану з допоміжних областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ за

логічними правилами, що визначаються булевою функцією F , за допомогою наступних логічних операцій над множинами: “ \cap ” – перетину, “ \cup ” – об’єднання та “ \neg ” – доповнення. Формально це можна подати у вигляді

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.1)$$

Вважаємо, що вихідні (опорні) області $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ мають простішу форму, ніж Ω , і для кожної з них відоме рівняння її межі $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Метод R -функцій дозволяє на основі теоретико-множинного опису області Ω отримати в аналітичному вигляді рівняння її межі $\omega(x, y) = 0$.

Означення 2.1. R -функцією (функцією В.Л. Рвачова) [12], що відповідає розбиттю числової осі на інтервали $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів.

Дещо порушуючи строгість, задля уникнення використання тризначної логіки, нуль вважатимемо додатнім числом. При цьому одночасно з R -функцією є заданою деяка супровідна функція булевої алгебри з тією ж кількістю аргументів. Тому можна дати наступне еквівалентне означення R -функції [6].

Означення 2.2. Функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, де двозначний предикат

$$\text{кат } S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Кожній R -функції відповідає єдина супровідна булева функція. Зворотне твердження не вірне, і одній і тій самій булевій функції відповідає нескінченна множина (вітка) R -функцій. Множина R -функцій функціонально замкнена, тобто суперпозиція R -функцій також є R -функцією.

Означення 2.3. Система функцій H , складена з R -функцій, називається достатньо повною, якщо множина всіх суперпозицій елементів H (множина

H -реалізовних функцій), має непорожній перетин з кожною гілкою множини R -функцій.

Достатньою умовою повноти системи H є повнота системи H^* відповідних супроводжуючих булевих функцій. Однією з найбільш вживаних у множині булевих функцій є система $H^* = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$.

Перехід від предикатного задавання множини Ω у вигляді (2.1) до її задання за допомогою нерівності $\Omega = (\omega(x, y) \geq 0)$ може бути здійснений за допомогою однієї з достатньо повних систем R -функцій.

Наприклад, найбільш часто використовується система \mathfrak{R}_α :

$$\begin{aligned} x \wedge_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ x \vee_\alpha y &\equiv \frac{1}{1+\alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right), \\ \bar{x} &\equiv -x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тут $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$.

Перехід від предикатної форми задавання області (2.1) до звичайної, прийнятої в аналітичній геометрії, рівняння для межі області відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg\}$ відповідно. В результаті отримаємо аналітичний вираз $\omega(x, y)$, що задає в елементарних функціях необхідне рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх $\omega(x, y) < 0$.

Розглянемо деякі окремі випадки системи (2.2).

Із системи (2.2) при $\alpha \equiv 0$ отримаємо систему \mathfrak{R}_0 , яку частіш за все використовують на практиці

$$\begin{aligned}
x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\
x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\
\bar{x} &\equiv -x.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

При $\alpha \equiv 1$ отримуємо систему \mathfrak{R}_1 :

$$\begin{aligned}
x \wedge_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y), \\
x \vee_1 y &\equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y), \\
\bar{x} &\equiv -x.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Функції системи \mathfrak{R}_1 найбільше легко реалізуються, з точки зору обчислень, а її операції комутативні та асоціативні. Однак, недоліком цієї системи є недиференційованість двомісних R -операцій, що до неї входять, вздовж прямих $x = \pm y$. В той же час, відповідні операції системи \mathfrak{R}_0 мають розриви похідних лише в точці $(0, 0)$.

Існують також і інші достатньо повні системи R -функцій \mathfrak{R}_0^m , \mathfrak{R}_p , \mathfrak{R}_n^0 , \mathfrak{R}_{spl}^m [12]. Двомісні операції системи \mathfrak{R}_0^m при цілих невід'ємних m належать класу C^m в точці $(0, 0)$, а операції з \mathfrak{R}_n^0 є комутативними, асоціативними та належать класу C^{n-1} . Система \mathfrak{R}_p при $p = 2$ перетворюється в \mathfrak{R}_0 , а при $p \rightarrow \infty$ переходить в \mathfrak{R}_1 . Система \mathfrak{R}_{spl}^m є системою поліноміальних сплайнів ступеню m з лінією розриву похідних порядку m : $y = (-1)^{m-1} x$.

Означення 2.4. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$ до n -го порядку, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = -1, \quad \frac{\partial^l\omega}{\partial n^l}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (l=2, 3, \dots, n), \quad (2.5)$$

де n – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Умови (2.5) означають, що вздовж нормалі до $\partial\Omega$ функція $\omega(x, y)$ веде себе приблизно як функція відстані r точок цієї нормалі від межі $\partial\Omega$.

Нормалізоване до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ може бути отримане із рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ наступним чином.

Теорема 2.1. Якщо $\omega(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} > 0,$$

то функція

$$\omega_1 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\nabla\omega|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2), \quad (2.6)$$

де $|\nabla\omega| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}$, задовольняє умови $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = -1$ у всіх регу-

лярних точках межі $\partial\Omega$.

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса Ω можна користатись простішою формулою

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}.$$

Для таких областей, як півплощина, смуга, круг, сфера та багато інших, нормалізовані рівняння отримуються шляхом введення простих нормувальних множників. Виявляється, що застосування деяких достатньо повних систем R -функцій дозволяє перенести їх властивість нормалізованості і на випадок складних локусів, для яких наведені прості області є опорними.

З конструктивної точки зору, нормалізація рівняння області призводить до ускладнення аналітичного виразу в (2.6). Проте на практиці процес побудови нормалізованих рівнянь для широкого класу областей можна спростити.

Теорема 2.2. Функція $\omega(x, y)$, утворена з нормалізованих функцій $\omega_i(x, y)$ за допомогою R -операцій систем \mathfrak{R}_α , \mathfrak{R}_p чи \mathfrak{R}_n^0 , також нормалізована в регулярних точках межі, якщо $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

В таблиці 2.1 наведені нормалізовані рівняння деяких простих геометричних об'єктів.

Нехай Ω – деяка відкрита область у просторі \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega$ – її межа, $\partial\Omega_i$ – покриття межі $\partial\Omega$, таке, що $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \partial\Omega_i$. Ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) межі $\partial\Omega$ не обов'язково різні і можуть співпадати зі всією межею $\partial\Omega$.

Нехай, надалі, f і φ_i ($i=1, 2, \dots, m$) – деякі відображення області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно на деякі множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$), u – відображення замкнутої області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ на деяку множину U , а A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) – відображення множини U на множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно. Вимагатимемо виконання умов

$$Au = f, \quad (2.7)$$

та

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \text{ (} i=1, 2, \dots, m \text{)}. \quad (2.8)$$

Таблиця 2.1 – Нормалізовані рівняння меж деяких простих геометричних областей

Геометричний об'єкт	Нормалізоване рівняння
Смуга шириною $2a$, паралельна осі Oy	$\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) = 0$
Коло радіусу R з центром в точці $(0,0)$	$\frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2) = 0$
Еліпс з півосями a, b та центром в точці $(0,0)$	$\frac{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)}} = 0$
Півплощина $c + ax + by \geq 0$	$\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$
Смуга $(-c - ax - by)(d + ax + by) \geq 0$ між паралельними прямими	$-\frac{(c + ax + by)(d + ax + by)}{2 c - d \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$

В такому випадку говорять, що поставлена крайова задача. До крайових задач такого виду зводяться більшість задач, що виникають в теорії пружності та гнучкості, теорії потенціалу, електростатиці та електродинаміці, теорії коливань, теорії пластин та оболонок, теплофізиці, теорії фільтрації, аеро- і гідродинаміці та в інших областях фізики та техніки.

Вид відображень u, f та φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять в постановку задачі, визначається конкретними фізичними умовами задачі. Вони можуть бути скалярами, векторами, тензорами. Зазвичай відображення A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) є диференціальними, інтегральними або інтегродиференціальними операторами.

Відображення A, L_i, u, f, φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що беруть участь у постановці крайової задачі, є аналітичними компонентами крайової задачі, а область Ω , межа $\partial\Omega$ та її ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) – геометричними компонентами. В залежності від того, які компоненти задані, а які є шуканими, говорять про пряму та обернену краєві задачі. Крайова задача називається прямою, якщо шуканою є компонента u , а решта – заданими. В решті випадків крайові задачі називаються оберненими. Вважатимемо, що задача є правильно поставленою, тобто всі задані в (2.7), (2.8) відображення забезпечують існування і єдиність розв'язку. Особливої уваги щодо цього вимагають крайові задачі для областей, межа яких містить нерегулярні точки, ребра та інші особливості (так звані геометричні сингулярності), а також задачі з крайовими умовами, що мають різний характер на різних ділянках межі $\partial\Omega$ (так звані мішані задачі). В таких задачах оператори L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть не мати сенсу в особливих точках межі. В такому випадку необхідна постановка деяких додаткових умов.

Характерною особливістю крайових задач є залежність поля від геометричних форм, що мають в реальних об'єктах доволі складну конфігурацію. Це може бути форма області Ω , ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) межі $\partial\Omega$, ліній чи поверхонь розриву аналітичних компонент та ін. Більше того, у випадку крайових задач для кусково-однорідних середовищ, самі оператори A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть мати зовсім різний вигляд в різних підобластях $\Omega_j \subset \Omega$ та на ділянках $\partial\Omega_i \subset \Omega$ ($i=1, 2, \dots, m$). Таким чином, побудова ефективних чисельних методів розв'язання крайових задач можлива лише з урахуванням всіх видів вхідної інформації, як аналітичної, так і геометричної. Значить, необхідно не тільки враховувати вигляд формул, що входять у постановку задачі, але і приводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, що дозволить внести її до алгоритму розв'язання. Здійснити цю процедуру дозволяє метод R -функцій, який часто називають конструктивним. Цей метод дозволяє враховувати геометричну інформацію на аналітичному рівні без будь-

якої її апроксимації. Для досягнення цієї цілі, враховуватимемо той конструктивний апарат описаний вище.

Нехай $D_A(\Omega) \subseteq U$ – область визначення оператора A , що входить в рівняння (1.7), а

$$L_{i_k} u = \varphi_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s), \quad (2.9)$$

де $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ – деяка підмножина індексів $\{1, 2, \dots, m\}$.

Означення 2.5. Формула $u = B(\Phi)$, де Φ – елемент деякої множини \mathfrak{M} , а $B: \mathfrak{M} \rightarrow D_A(\Omega)$, називається структурою розв'язку, що враховує умови (1.9) і визначена на \mathfrak{M} , якщо для всіх $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L_{i_k} B(\Phi) = \varphi_{i_k} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \quad (2.10)$$

Зазначимо, що оператор B залежить від геометрії області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) її межі, а також операторів крайових умов.

Структура, що враховує всі крайові умови (2.8), називається загальною структурою, а якщо задовольняється лише частина умов (2.8), то структура називається частковою. Зазначимо, що задоволення умов (2.9) може розумітись також в тому чи іншому узагальненому сенсі, наприклад, за нормою чи метрикою деякого простору, що прямує до нуля. В цьому випадку мова йде про узагальнені структури.

Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, визначає деяку множину $D_B \subset D_A$, $D_B = \{u : u = B(\Phi) \quad \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$. Проте може виявитись, що шуканий розв'язок u_0 крайової задачі не міститься в D_B . У цьому випадку структуру $u = B(\Phi)$ називатимемо неповною. Якщо $u_0 \in D_B$, то структура $u = B(\Phi)$ називається повною (в класичному сенсі). В багатьох випадках не існує класичного розв'язку крайової задачі.

вої задачі, а якщо і існує, то методи його відшукання невідомі або такі, що важко реалізуються.

Означення 2.6. Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, називається повною в сенсі метрики $\rho(u, v)$ (або за нормою $\| \cdot \|$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \Phi_\varepsilon \in \mathfrak{M}$, $\rho[u_0, B(\Phi_\varepsilon)] < \varepsilon$ (або $\|u_0 - B(\Phi_\varepsilon)\| < \varepsilon$), де u_0 – класичний (або узагальнений) розв’язок задачі.

Після того, як повна або повна в деякому сенсі структура побудована, виникає питання про відшукання елемента $\Phi \in \mathfrak{M}$. Природно, що чим більше множина, тим, взагалі кажучи, більш складною є задача пошуку. Тому при побудові структур необхідно намагатися, щоб множина \mathfrak{M} була якомога вузкою.

Нехай $u = B_i(\Phi_i)$, $\Phi \in \mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2$) – повні або повні в деякому сенсі структури, що враховують деяку систему умов. Тоді якщо $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, то структуру $u = B_1(\Phi_1)$ називатимемо структурою кращої якості, ніж $u = B_2(\Phi_2)$. Чим краща якість структури, тим вузча множина \mathfrak{M} , в якій необхідно шукати невизначену компоненту Φ , що відповідає точному розв’язку задачі чи достатньо хорошому його наближенню.

В більшості випадків межові умови мають вигляд

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \tau}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \tau^k}, x, y\right)\Big|_{\partial\Omega} = \Phi_0\Big|_{\partial\Omega}, \quad (2.11)$$

де F – деяка, частіш за все лінійна відносно своїх аргументів $u, \frac{\partial u}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \tau^k}$

функція;

n і τ – напрямки нормалі та дотичної до межі $\partial\Omega$.

Похідні по нормалі та дотичній, що входять у формулу (2.11), мають сенс лише на межі області, а структура, що задовольняє умові (2.11), повинна мати сенс скрізь в області Ω .

Розглянемо диференціальні оператори, за допомогою яких можна продовжити крайові умови всередину області Ω

$$D_n = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^i \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i}, \quad (2.12)$$

$$T_n = \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n-i} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

де $\omega(x, y)$ – функція, що задовольняє умови:

- 1) $\omega(x, y) > 0$ всередині Ω ;
 - 2) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
 - 3) $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 1$ на $\partial\Omega$.
- (2.13)

Можна довести, що для будь-якої функції $u \in C^n$ мають місце співвідношення

$$D_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial n^n}, \quad T_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \tau^n},$$

$$D_k T_{n-k} u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial n^k \partial \tau^{n-k}}.$$

Зокрема, для $k=1$ внаслідок умов 2), 3) із (2.13) для $\omega(x, y)$ та добутку $\omega(x, y)\Phi$, де Φ – обмежена диференційована функція, отримаємо

$$D_1 \omega = 1 + O(\omega),$$

$$T_1 \omega = 0,$$

$$D_1(\omega\Phi) = (D_1\omega)\Phi + \omega D_1\Phi = \Phi + O(\omega),$$

$$T_1(\omega\Phi) = O(\omega).$$

2.2 Метод Бубнова-Гальоркіна у нестационарних задачах

Розглянемо гільбертів простір H та діючі в ньому лінійні оператори A_0, A_1, \dots, A_s , області визначення яких $D_{A_0}, D_{A_1}, \dots, D_{A_s}$ мають непустий перетин D_0 .

Розглянемо «абстрактне звичайне диференціальне рівняння» [9]

$$\sum_{l=0}^s \frac{d^l A_l u}{dt^l} = f(t), \quad t > 0, \quad (2.14)$$

за початкових умов

$$\left. \frac{d^l u}{dt^l} \right|_{t=0} = \omega_l, \quad l = 0, 1, \dots, s-1. \quad (2.15)$$

Тут ω_l – задані елементи простору H . Щоб розв'язати задачу Коші (2.14), (2.15), задамо координатну систему $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, що входить у D_0 ; наближений розв'язок шукатимемо у вигляді [12]

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \varphi_k. \quad (2.16)$$

Коефіцієнти $a_k(t)$ задовольняють систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\left(\sum_{l=0}^s \frac{d^l A_l u_n}{dt^l}, \varphi_j \right) = (f(t), \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

Система (2.17) легко приводиться до вигляду

$$\sum_{l=0}^s \sum_{k=1}^n \alpha_{jkl} \frac{d^l a_k(t)}{dt^l} = f_j(t), \quad (2.18)$$

де введено позначення

$$\alpha_{jkl} = (A_l \varphi_k, \varphi_j), \quad f_j(t) = (f(t), \varphi_j). \quad (2.19)$$

Систему (2.18) потрібно доповнити початковими умовами, які можна отримати, наприклад, так. Покладемо

$$\omega_{ln} = \sum_{k=1}^n \alpha_{lk} \varphi_k \quad (2.20)$$

і підберемо коефіцієнти α_{lk} так, щоб

$$\|\omega_{ln} - \omega_l\| = \min. \quad (2.21)$$

Очевидно, при цьому ω_{ln} буде проєкцією елемента ω_l на підпростір, натягнутий на елементи $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Умова (2.21) дає наступну систему для невідомих α_{kl} :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{kl} (\varphi_k, \varphi_j) = (\omega_l, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.22)$$

Знайдемо із системи (2.22) ці невідомі і вимагатимемо, щоб

$$\left. \frac{d^l a_k(t)}{dt^l} \right|_{t=0} = \alpha_{kl}, \quad l = 0, 1, \dots, s-1; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь (2.18) за початкових умов (2.23) і підставивши це у формулу (2.16) отримаємо наближений розв'язок задачі (2.14), (2.15).

Можна припустити і той випадок, коли оператори A_l залежать від часу, якщо, наприклад, їх області визначення не залежать від t . У цьому випадку коефіцієнти α_{jkl} будуть не сталими, а функціями від t [8].

Як приклад розглянемо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (2.24)$$

у скінченній області Ω змінних x_1, x_2, \dots, x_n і при $t \geq 0$. На межі S області поставимо межуову умову $u|_S = 0$, а в початковий момент часу – умову

$$u|_{t=0} = \varphi(P). \quad (2.25)$$

Тут $s=1$, єдиний оператор A – це оператор задачі Діріхле, за H можна взяти $L_2(\Omega)$. Координатну систему $\{\varphi_n(P)\}$ виберемо так, щоб функції $\varphi_n(P)$ були при будь-якому n лінійно незалежними, неперервними разом із першими і другими похідними в Ω і щоб $\varphi_n(P)|_S = 0$ (цю вимогу можна послабити: достатньо, щоб $\varphi_n(P)$ належало енергетичному простору задачі Діріхле); ми не будемо формулювати вимогу повноти, хоча вона і необхідна [11]. Якщо шукати наближений розв'язок задачі (2.24), (2.25) у вигляді

$$u_n(P, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \varphi_k(P), \quad (2.26)$$

то для коефіцієнтів $a_k(t)$ ми отримуємо систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k=1}^n \left(\alpha_{kj} \frac{da_k(t)}{dt} + \beta_{kj} a_k(t) \right) = 0, \quad (2.27)$$

де

$$\alpha_{kj} = (\varphi_k, \varphi_j) = \int_{\Omega} \varphi_k(P) \varphi_j(P) d\Omega;$$

$$\beta_{kj} = (\nabla \varphi_k, \nabla \varphi_j) = \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_k(P) \text{ grad } \varphi_j(P) d\Omega.$$

2.3 Застосування методів R -функцій та Гальоркіна до чисельного аналізу процесу лазерної термообробки з точковими рухомими тепловими джерелами

Для розв'язання задачі (1.43) – (1.45) застосуємо метод Гальоркіна для нестационарних задач [8, 9].

Нехай $T > 0$, $H = L_2(\Omega)$ – гільбертів простір квадратично сумовних функцій у області $\Omega \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2$, а $L_2(0, T; H)$ – це простір функцій $u(t)$, $t \in [0, T]$, зі значеннями в H , які задовольняють умову:

$$\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt < +\infty.$$

Скалярний добуток у просторі H визначається як:

$$(u, v)_H = \iint_{\Omega} uv dx dy,$$

а в просторі $L_2(0, T; H)$ він записується у вигляді

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt.$$

Розглянемо оператор A , який діє у просторі $L_2(0, T; L_2(\Omega))$ за правилом

$$Au = -\Delta u + pu,$$

де область визначення D_A , включає функції $u \in L_2(\Omega)$, для яких u , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ є

неперервними в $\bar{\Omega}$, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ неперервні в Ω і належать $L_2(\Omega)$ та ви-

конується умова $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0$.

Оператор A є лінійним. Для будь-яких $u, v \in D_A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується

$$\begin{aligned} A(\alpha u + \beta v) &= -\Delta(\alpha u + \beta v) + p(\alpha u + \beta v) = -\alpha \Delta u - \beta \Delta v + \alpha pu + \beta pv = \\ &= \alpha(-\Delta u + pu) + \beta(-\Delta v + pv) = \alpha Au + \beta Av. \end{aligned}$$

Симетричність оператора доводиться за допомогою формули Гріна:

$$\begin{aligned} (Au, v)_H &= \iint_{\Omega} (-\Delta u + pu)v dx dy = -\iint_{\Omega} \Delta u \cdot v dx dy + p \iint_{\Omega} uv dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds + p \iint_{\Omega} uv dx dy = \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + puv \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds.$$

Оскільки $\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0$, інтеграл вздовж $\partial\Omega$ обнуляється і отримуємо:

$$(Au, v)_H = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + puv \right) dx dy.$$

Розглянемо скалярний добуток $(Au, u)_H$:

$$(Au, u)_H = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + pu^2 \right] dx dy.$$

Очевидно, що $(Au, v)_H \geq 0$ (при $p > 0$), причому $(Au, v)_H = 0$ лише тоді, коли $u = 0$. Отже, A – додатний оператор. Зазначимо, що A – додатно означений оператор.

На D_A введемо енергетичний добуток $[u, v]$ і відповідну йому енергетичну норму $\|u\|$ відповідно за правилами:

– для будь-яких $u, v \in D_A$ $[u, v] = (Au, v)_H$;

– для будь-якої $u \in D_A$ $\|u\| = \sqrt{[u, u]}$.

З урахуванням формули для $(Au, v)_H$ матимемо

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + puv \right) dx dy,$$

$$\|u\| = \sqrt{\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + pu^2 \right] dx dy}.$$

Поповнюючи D_A за нормою $\|u\|$, отримаємо енергетичний простір H_A оператора A .

Задачу (1.43) – (1.45) запишемо в операторній формі:

$$\frac{du}{dt} + Au = f, \quad t \in (0, T], \quad (2.28)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (2.29)$$

де $f(x, y, t) = \sum_{l=1}^n Q_l \delta(x - x_l^*(t)) \delta(y - y_l^*(t))$.

Наближений розв'язок задачі (2.28), (2.29) шукатимемо у формі

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k, \quad (2.30)$$

де $c_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, – невідомі функції;

$\{\varphi_k\}$ – координатна послідовність.

Задачу (1.43) – (1.45) можна записати у вигляді:

$$u = \Phi - \omega D_1 \Phi + \alpha \omega \Phi,$$

де $\omega(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$;

Φ – невизначена компонента структури;

$$D_1 \Phi = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Отже, координатну послідовність можна взяти як

$$\varphi_k = \tau_k - \omega D_1 \tau_k + \alpha \omega \tau_k, \quad (2.31)$$

де $\{\tau_k\}$ – будь-яка повна в $L_2(\Omega)$ система функцій (алгебраїчні поліноми, тригонометричні поліноми тощо).

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції $c_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, знайдемо з умови ортогональності нев'язки, одержаної при підстановці (2.30) в рівняння (2.28), першим n координатним функціям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Тоді для визначення функцій $c_1(t), \dots, c_n(t)$ отримаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\sum_{k=1}^n \dot{c}_k(t) b_{kj} + \sum_{k=1}^n c_k(t) b_{kj} = l_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.32)$$

$$c_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.33)$$

де

$$b_{kj} = (\varphi_k, \varphi_j)_H = \iint_{\Omega} \varphi_k \varphi_j dx dy, \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.34)$$

$$a_{kj} = [\varphi_k, \varphi_j] = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + p \varphi_k \varphi_j \right) dx dy, \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.35)$$

$$l_j(t) = (f, \varphi_j)_H = \iint_{\Omega} f \varphi_j dx dy = \sum_{l=1}^n Q_l \varphi_j(x_l^*(t), y_l^*(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.36)$$

Позначимо $B = \{b_{kj}\}_{k, j=1, \dots, n}$, $A = \{a_{kj}\}_{k, j=1, \dots, n}$ – квадратні матриці порядку n , $\vec{c}(t) = \{c_k(t)\}_{k=1, \dots, n}$, $\vec{l}(t) = \{l_j(t)\}_{j=1, \dots, n}$ – матриці-стовбці. Тоді задачу (2.32), (2.33) можна записати у вигляді:

$$B\dot{\vec{c}}(t) + A\vec{c}(t) = \vec{l}(t), \quad t \in (0, T], \quad (2.37)$$

$$\vec{c}(0) = \vec{0}. \quad (2.38)$$

Додатково слід зазначити, що матриці B і A є симетричними і додатно визначеними. Це забезпечує існування і єдність розв'язку для будь-яких початкових умов.

Наведених властивостей достатньо, щоб гарантувати існування та єдність розв'язку задачі Коші (2.37), (2.38). Для розв'язання задачі Коші (2.37), (2.38) можна використати будь-який чисельний метод, наприклад, метод Рунге-Кутти.

Висновки за розділом 2

У цьому розділі було проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі моделюванні лазерної термообробки, наведені усі необхідні формули та розроблено алгоритм розв'язання задачі.

1. Розглянуто основні аспекти методу R -функцій та з'ясована доцільність його використання для розв'язання поставленої задачі.

2. Розглянуто основні поняття методу Гальоркіна та з'ясована доцільність його використання для апроксимації невизначеної компоненти структури розв'язку при розв'язанні нестационарних задач.

3. Застосовано сумісно методи R -функцій та Гальоркіна до розв'язання задачі моделюванні лазерної термообробки.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 12.1 як система символної математики

Mathematica 12.1 – це система для виконання складних математичних розрахунків із використанням символних виразів. Завдяки можливості працювати з точними значеннями та виконувати обчислення з високою точністю, Mathematica є універсальним інструментом для досліджень у математиці, фізиці, хімії, біології, економіці та інших галузях науки.

Одна з ключових особливостей системи – підтримка символних обчислень, що дає змогу зберігати максимальну точність навіть у найскладніших задачах. Mathematica активно застосовується для роботи з інтегралами, диференціальними рівняннями, оптимізацією, моделюванням та аналізом даних.

Крім того, Mathematica 12.1 пропонує розширені можливості візуалізації, які включають створення двовимірних і тривимірних графіків, гістограм, а також інтерактивних візуалізацій і анімацій. Ця система дозволяє ефективно представляти результати розрахунків у зручному графічному вигляді.

Система також забезпечує інструменти для імпорту даних, їх обробки, аналізу та візуалізації. Вона дозволяє виконувати операції зі статистикою, сортуванням, фільтрацією та агрегацією, що робить її надзвичайно корисною для роботи з великими обсягами інформації.

Завдяки поєднанню потужності, гнучкості та багатого функціоналу, Mathematica 12.1 є незамінним інструментом для вирішення складних задач, аналізу даних та наукових досліджень у багатьох галузях.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі чисельного аналізу процесу лазерної термообробки з системою точкових рухомих джерел тепла

Алгоритм чисельного аналізу процесу лазерної термообробки системою

точкових рухомих джерел тепла складається з наступних етапів:

а) задання фізичних параметрів: встановити фізичні параметри процесу та задати геометрію області Ω , у якій досліджується задача;

б) побудова нормалізованого рівняння межі: сформулювати рівняння $\omega(x, y) = 0$, яке описує межу області $\partial\Omega$, за допомогою методу R -функцій;

в) задання координатних функцій: обрати координатні функції $\{\varphi_k\}$ згідно з формулою (2.31);

г) вибір рівня точності: визначити номер наближення n , який відповідає кількості базисних функцій у моделі;

д) побудова матриць і векторів: згідно з формулами (2.34), (2.35) та (2.36), побудувати матриці B , A і вектор $\vec{l}(t)$;

е) розв'язання задачі Коші: використовуючи рівняння (2.37) та (2.38), знайти функції $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, що визначають динаміку системи;

є) формування наближеного розв'язку: отримати наближений розв'язок задачі у вигляді $u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t)\varphi_k$;

ж) аналіз результатів: проаналізувати побудований наближений розв'язок, перевірити його збіжність, оцінити точність та стабільність залежно від параметрів задачі.

3.3 Опис програми

Алгоритм чисельного аналізу процесу лазерної термообробки з точковим рухомих джерелом тепла, розроблений у підрозділі 3.2, був реалізований програмно у середовищі Mathematica 12.1. Структура програми включає такі блоки:

Блок 1. Задання фізичних параметрів.

Блок 2. Побудова нормалізованого рівняння $\omega(x, y) = 0$.

Блок 3. Формується набір координатних функцій відповідно до формули (2.31), які використовуються для побудови базису та подальшого наближеного розв'язку задачі.

Блок 4. На цьому етапі задається порядок наближення n , який визначає кількість базисних функцій для побудови наближеного розв'язку задачі. Цей параметр впливає на точність моделювання та обчислень..

Блок 5. На цьому етапі, використовуючи формули $c_k(0) = c_k^0$, $k = 1, 2, \dots, n$, та $\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] c_k^{(n)} = [\varphi, \varphi_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, будуємо матриці $B = \{b_{kj}\}_{k, j=1, \dots, n}$, $A = \{a_{kj}\}_{k, j=1, \dots, n}$, які необхідні для подальшого розв'язання задачі методом Гальоркіна.

Блок 6. Для визначення функцій $c_1(t)$, \dots , $c_n(t)$, розв'язується задача Коші, яка формулюється відповідно до рівнянь (2.29) та (2.30). Розрахунки виконуються за допомогою функції NDSolve, що дозволяє знаходити чисельні розв'язки диференціальних рівнянь.

Блок 7. Наближений розв'язок задачі формується за методом Гальоркіна згідно з формулою (2.30), яка дозволяє отримати розв'язок у вигляді лінійної комбінації базисних функцій із врахуванням специфіки поставленої задачі.

Блок 8. Отримані результати виведено за допомогою функцій RegionFunction, Plot3D, ContourPlot для побудови ізотерм та просторового розподілу температури. Використовуючи Manipulate[ContourPlot] і Manipulate[Plot3D], забезпечено можливість динамічного спостереження за процесом термообробки у часі та візуалізації змін температурного поля в оброблюваній області.

Висновки за розділом 3

У третьому розділі було здійснено розробку алгоритму чисельного

аналізу процесу лазерної термообробки з точковими рухомими джерелами тепла та його програмну реалізацію в середовищі Mathematica 12.1.

Розглянуто основні можливості системи Mathematica 12.1, що забезпечують її ефективність для вирішення задач символічної математики, побудови математичних моделей та візуалізації результатів. У межах розділу було запропоновано алгоритм, який включає формування координатних функцій, побудову квадратних матриць за методом Гальоркіна, а також розв'язання задачі Коші для знаходження чисельних розв'язків диференціальних рівнянь.

Особливу увагу приділено побудові динамічного розподілу температурного поля в оброблюваній області. Отримані результати у вигляді 3D-моделей температурного поля та ізотерм дозволяють здійснити глибокий аналіз теплових процесів у системі. Використання функцій RegionFunction, Plot3D, ContourPlot, а також інтерактивних інструментів Manipulate[ContourPlot] і Manipulate[Plot3D] забезпечило можливість візуалізації процесу у динаміці та гнучкої роботи з отриманими даними.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Обчислювальний експеримент для кільцевої та квадратної областей

Обчислювальний експеримент було проведено для двох областей: кільце-подібної та квадратної.

Квадратна має наступне задання

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a\} \quad (4.1)$$

та двома точковими джерелами, що визначаються значеннями $R_1 = 0.25$ та $R_2 = 0.75$ зі сталими лінійної швидкості $V_1 = 3$ та $V_2 = 5$ по траєкторіях $x_1^* = 0,25R_1 \cos \phi_1$, $y_1^* = 0,25R_1 \sin \phi_1$, $\phi_1 = \frac{V_1 t}{R_1}$, $x_2^* = 0.75R_2 \cos \phi_2$, $y_2^* = 0.75R_2 \sin \phi_2$,

$$\phi_2 = \frac{V_2 t}{R_2}.$$

Кільцева область має задання

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r^2 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\} \quad (4.2)$$

та двома точковими джерелами, що визначаються значення $R_1 = 0.5$ та $R_2 = 0.9$ зі сталими лінійної швидкості $V_1 = 3$ та $V_2 = 6$ по траєкторіях $x_1^* = 1 + R_1 \cos \phi_1$, $y_1^* = 1 + R_1 \sin \phi_1$, $\phi_1 = \frac{V_1 t}{R_1}$, $x_2^* = 1 + R_2 \cos \phi_2$, $y_2^* = 1 + R_2 \sin \phi_2$, $\phi_2 = \frac{V_2 t}{R_2}$.

Нормалізоване рівняння кільця межі $\partial\Omega$ області Ω має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \left[\frac{1}{2R} (R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{2r} (r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2) \right] = 0. \quad (4.3)$$

Нормалізоване рівняння квадрата межі $\partial\Omega$ області Ω має вигляд

$$\omega(x, y) \equiv \left[\frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \right] = 0. \quad (4.4)$$

За координатні функції було обрано систему

$$\varphi_k = \tau_k - \omega D_1 \tau_k + \alpha \omega \tau_k,$$

де $\omega(x, y)$ визначається згідно з (3.2);

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\tau_k(x, y) = P_i \left(\frac{x}{R} - 1 \right) P_j \left(\frac{y}{R} - 1 \right), \quad P_i(z) - \text{поліном Лежандра степеня } i.$$

Усього було обрано 10 координатних функцій.

На рис. 4.1–4.4 наведено поверхні температури, на рис. 4.5–4.8 лінії рівня температури (ізотерми) кільцевої області у різні моменти часу. На рис. 4.9–4.12 наведено лінії рівня температури (ізотерми), на рис. 4.13–4.16 поверхні температури квадратної області у різні моменти часу.

Отримані результати узгоджуються з фізичним сенсом задачі. Зважаючи на отримані результати, можна зробити висновок, що використання методів R-функцій та Гальоркіна забезпечує отримання достовірних та коректних результатів.

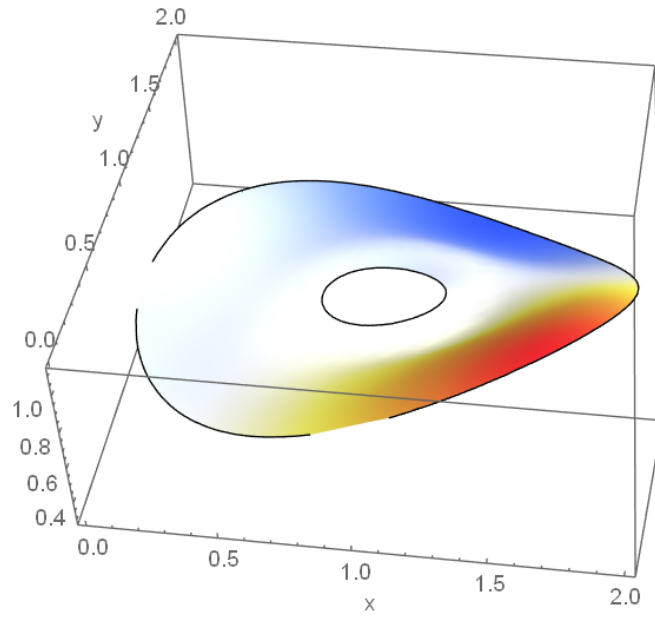


Рисунок 4.1 – Поверхня температури при $t = 1$

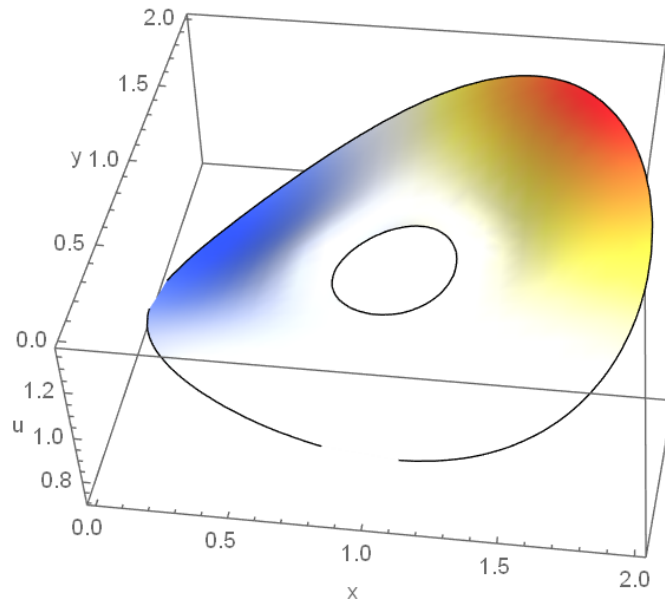


Рисунок 4.2 – Поверхня температури при $t = 5$

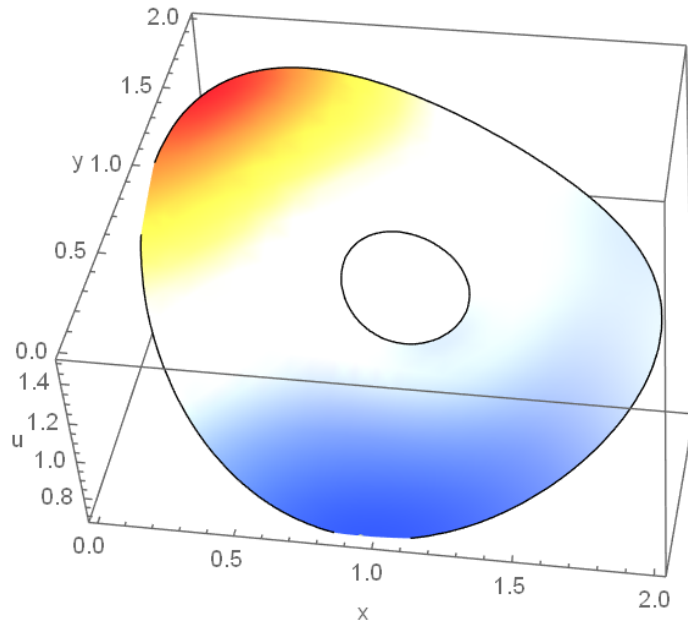


Рисунок 4.3 – Поверхня температури при $t = 10$

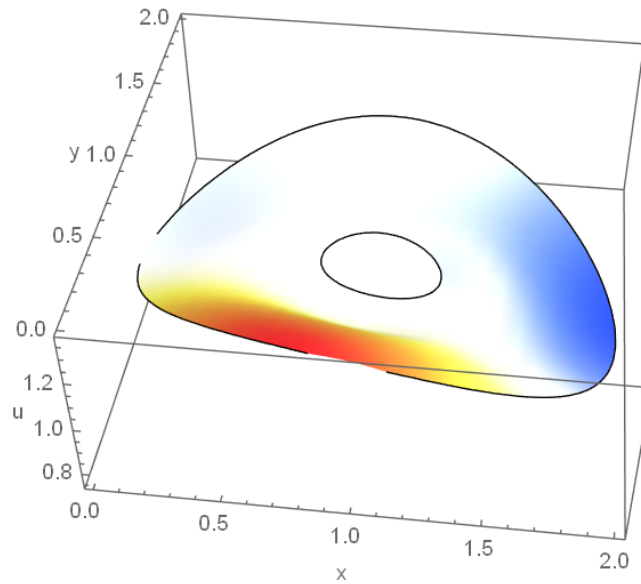


Рисунок 4.4 – Поверхня температури при $t = 15$

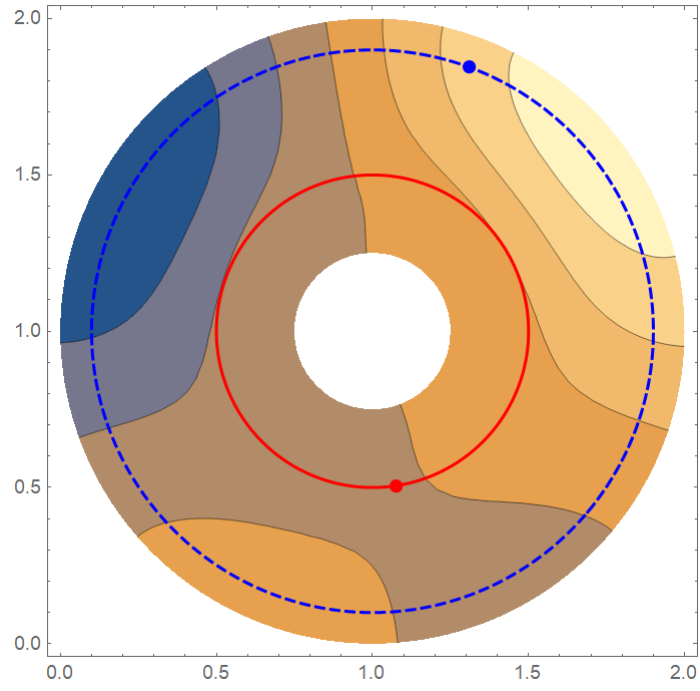


Рисунок 4.5 – Лінії рівня температури $t = 1$

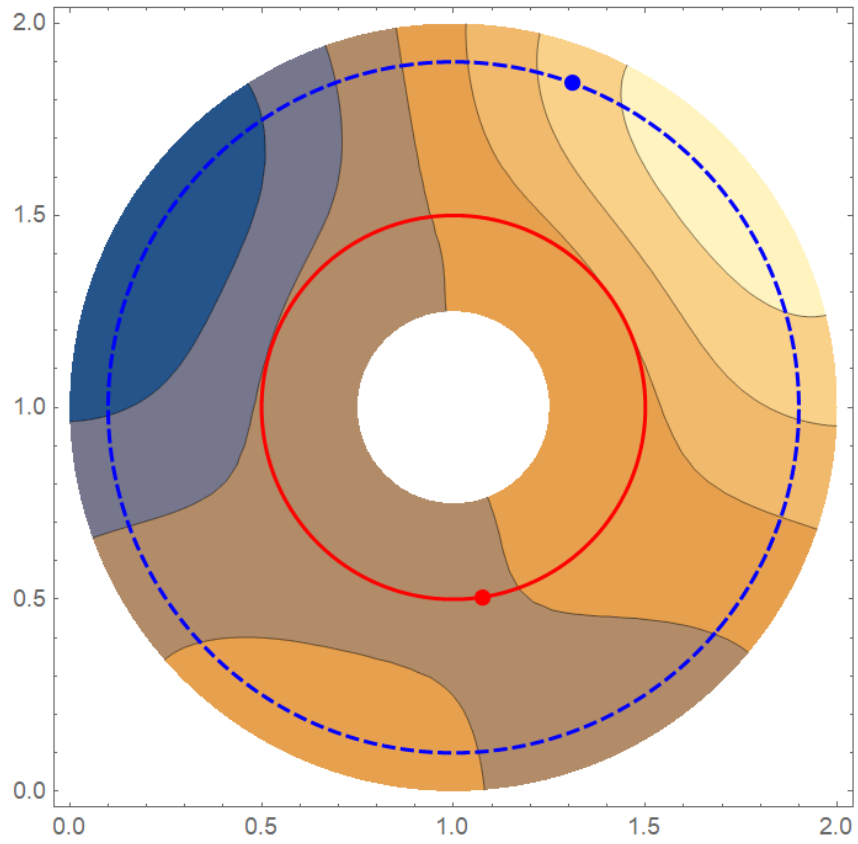


Рисунок 4.6 – Лінії рівня температури $t = 5$

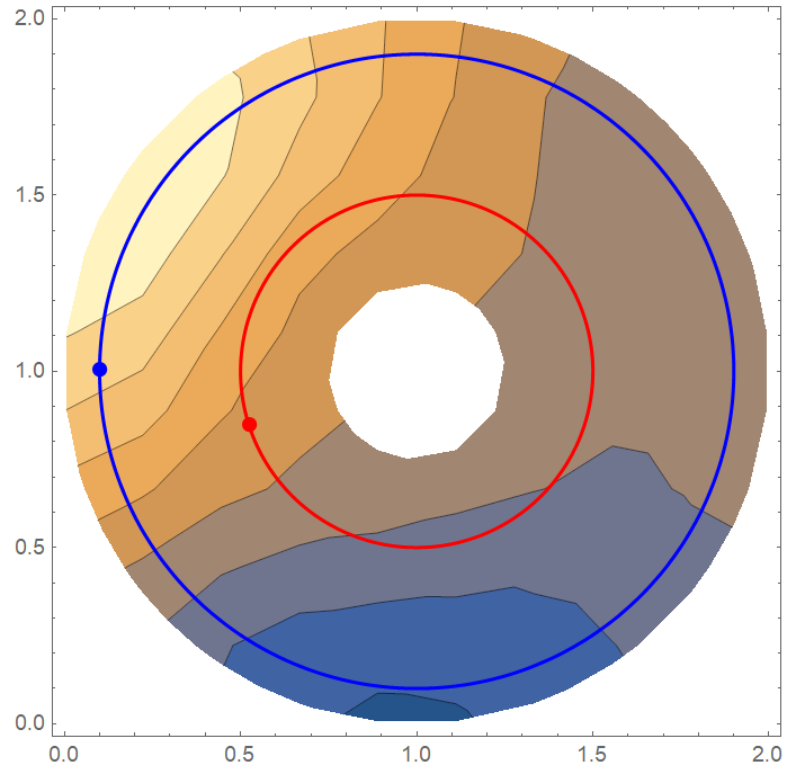


Рисунок 4.7 – Лінії рівня температури $t = 10$

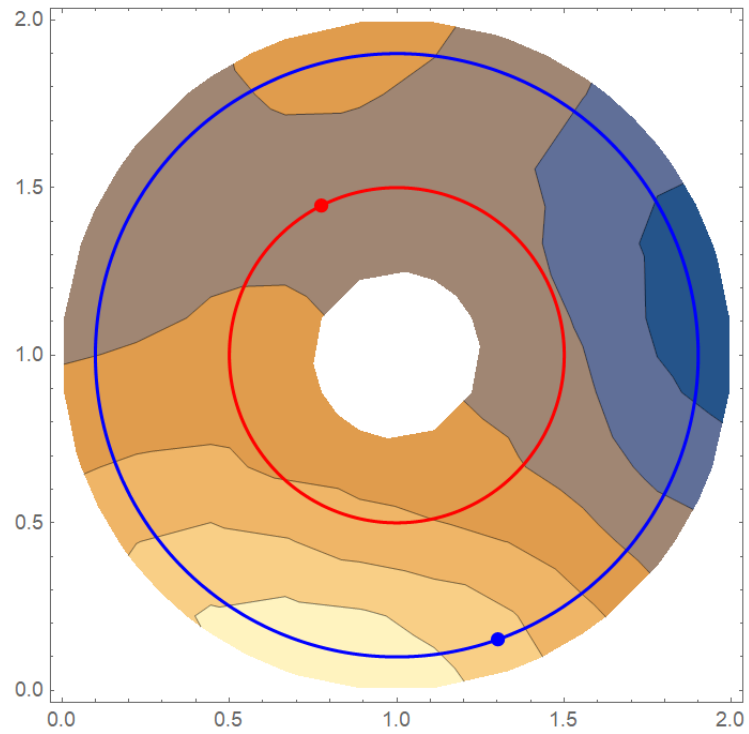


Рисунок 4.8 – Лінії рівня температури $t = 15$

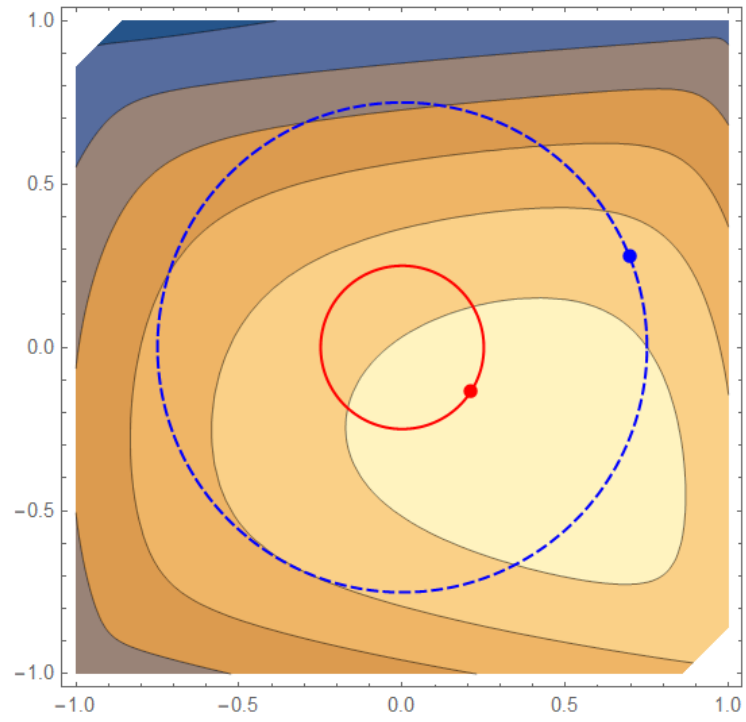


Рисунок 4.9 – Лінії рівня температури $t = 1$

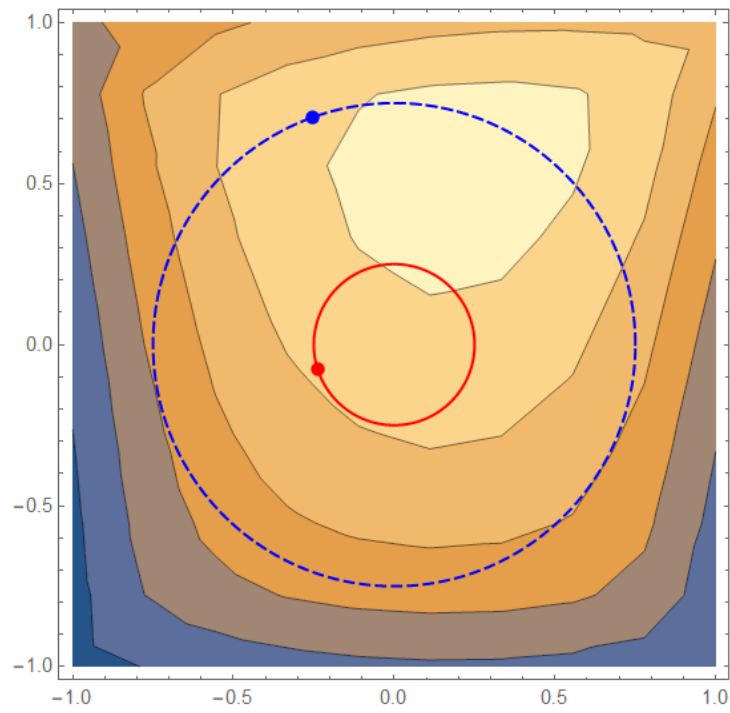


Рисунок 4.10 – Лінії рівня температури $t = 5$

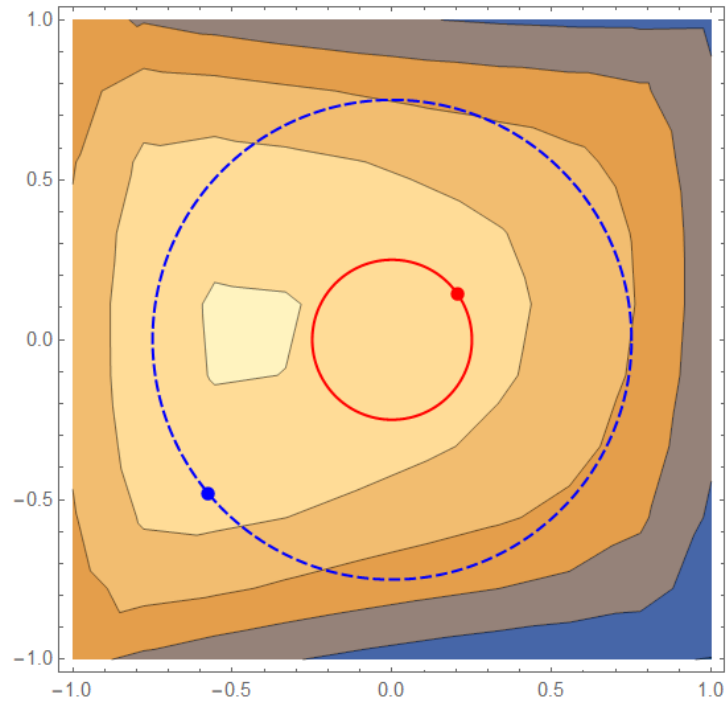


Рисунок 4.11 – Лінії рівня температури $t = 10$

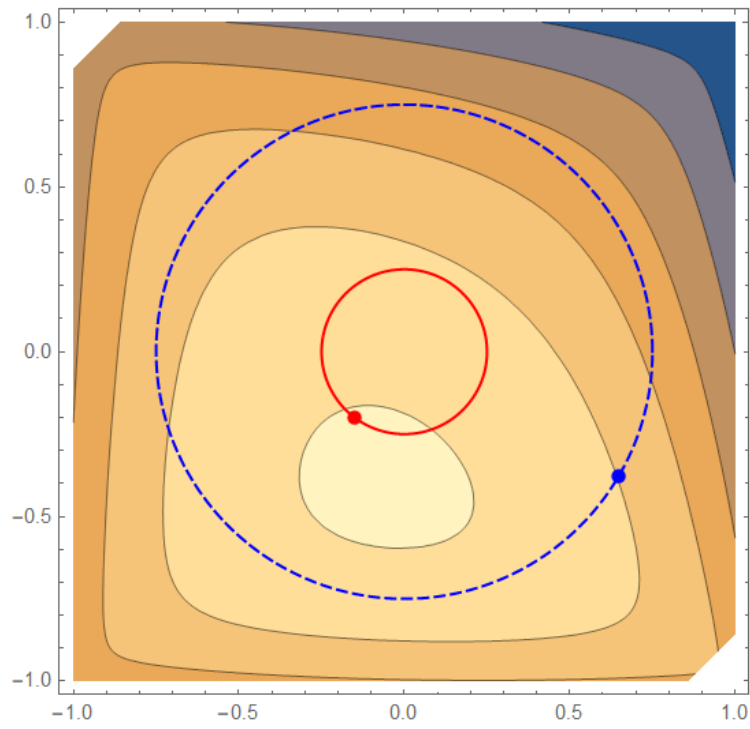


Рисунок 4.12 – Лінії рівня температури $t = 15$

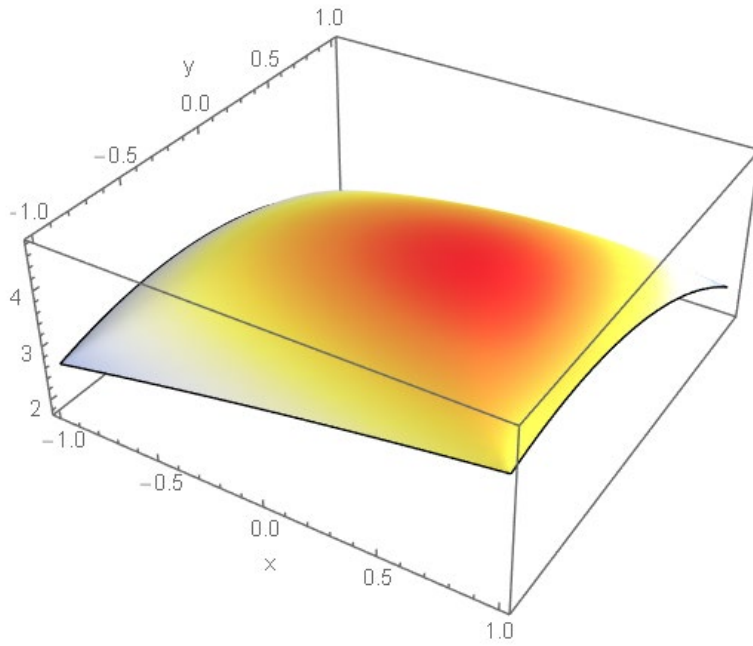


Рисунок 4.13 – Поверхня температури при $t = 1$

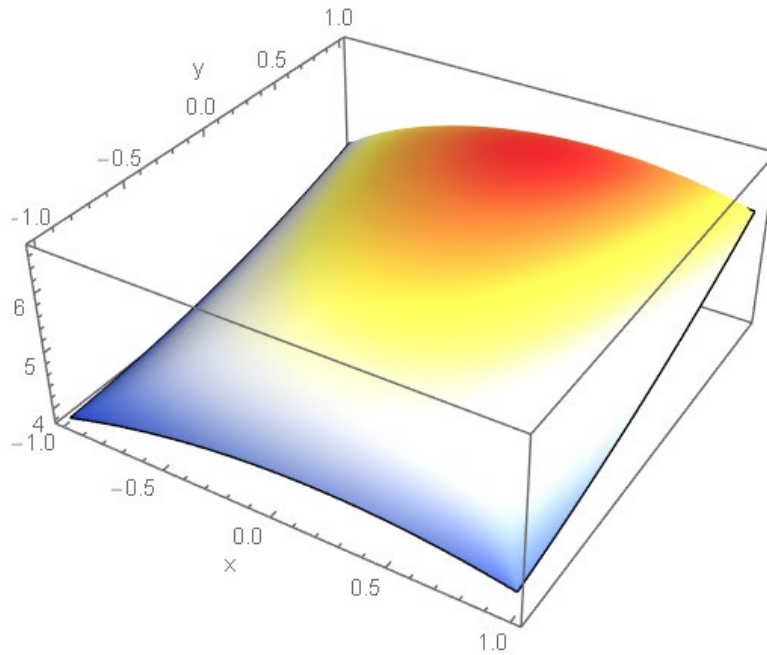


Рисунок 4.14 – Поверхня температури при $t = 5$

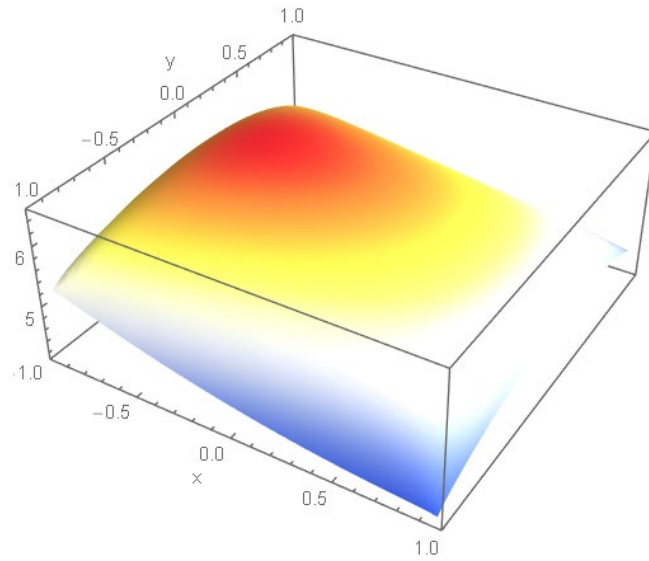


Рисунок 4.15 – Поверхня температури при $t = 10$

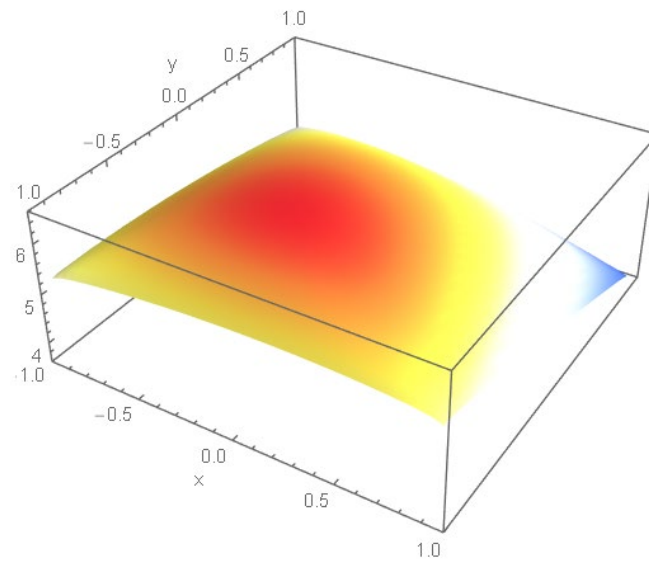


Рисунок 4.16 – Поверхня температури при $t = 15$

Висновки за розділом 4

Для моделювання процесу лазерної термообробки кільцевої та квадратної

пластин із використанням рухомих джерел тепла була застосована система Mathematica 12.1. Ця система забезпечує широкий спектр інструментів для виконання складних обчислень та високоточний розрахунковий механізм, що дозволяє ефективно вирішувати задачі моделювання. Розроблена програма у середовищі Mathematica 12.1 враховує специфічні особливості моделювання термообробки та пропонує інтегрований підхід до розв'язання задачі.

Програма реалізує ключові етапи моделювання за допомогою вбудованих функцій Mathematica, таких як розв'язання рівнянь теплопровідності, візуалізація результатів та побудова тривимірних моделей температурних полів. У ході роботи було змодельовано процес локальної термообробки кільцевих і квадратних пластин із застосуванням кількох джерел тепла, що рухаються по заданих траєкторіях.

Основні аспекти виконаного моделювання:

а) виявлено переваги використання системи Mathematica 12.1 для вирішення задач термічного моделювання, зокрема найбільш часто застосовувані функції та їх ефективність;

б) описано програму, що реалізує етапи моделювання, включно з розрахунками, візуалізацією та аналізом температурних полів для кільцевих і квадратних областей;

в) представлено результати моделювання у вигляді тривимірних моделей температурних полів та контурів рівня температур для кільцевих і квадратних пластин, що піддавалися локальній термообробці рухомими джерелами тепла.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було використано метод Гальоркіна та метод R -функцій до чисельного аналізу процесу лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла.

1. Було проведено аналіз математичних моделей та методів чисельного розв'язання задач лазерної термообробки, проведено огляд і аналіз сучасного стану методів математичного моделювання процесів лазерної термообробки.

2. На основі сумісного застосування методів Гальоркіна та R -функцій розроблено алгоритм чисельного аналізу математичної моделі, що описує процес лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла.

3. Програмно реалізовано розроблений алгоритм у системі Mathematica 12.1, за допомогою якої було отримано наближені розв'язки розглядуваної початково-крайової задачі

4. Дослідження процесів лазерної термообробки та модулювання обробки кільцевої та квадратної пластинок може бути використано в промисловості для вдосконалення технологій обробки матеріалів, покращити якість та продуктивність обробки матеріалів, знизити витрати на енергію та матеріали, а також розширити можливості застосування лазерної технології.

Результати роботи можуть бути використані для створення комп'ютерних моделей, програм або алгоритмів, що допомагають вдосконалити та оптимізувати процеси лазерної термообробки.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Москва : Мир, 1975. 541 с.
2. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. Москва : Энергоиздат, 1981. 416 с.
3. Карвацький А. Я. Моделювання енергозберігаючих регламентів промислового обладнання: навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2014. 234 с.
4. Карвацький А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 95с.
5. Колосова С. В. Применение проекционных методов и метода R -функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. ... к. ф.-м. н.: 01.01.07 – Вычислительная математика. Харків : ХНУРЕ, 1972. 85 с.
6. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение метода R -функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісник ХНУ. Серія Прикладна математика і механіка. 2003. № 602. С. 61 – 67.
7. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Часть 2. Сеточные схемы метода конечных элементов. Казань : Изд-во Казанского ун-та, 2018. 126 с.
8. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. Москва : Наука, 1966. 432 с.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с.
10. Налиев М. А. Исследование устойчивости метода Бубнова-Галёркина для нестационарных задач. Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 157, № 1. С. 16–19.
11. Налиев М. А. Об устойчивости метода Бубнова-Галёркина для нестационарных задач. Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники. 1964. Вып. 3. С. 15 – 25.
12. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев :

Наукова думка, 1982. 552 с.

13. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. *Доклады АН СССР*. 1965. Т. 163, № 3. С. 591 – 594.

14. Фуніков А. С. Чисельне дослідження процесів лазерної термообробки системою точкових рухомих джерел тепла. *28-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті»* : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 16-18 квітня 2024 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2024. С. 294–295.

15. Числове моделювання теплоелектричного стану алюмінієвих електролізерів / Є. М. Панов, А. Я. Карвацький, С. В. Лелека, І. В. Пулінець. *Вісник НТУУ «КПІ»*. Київ : Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження : зб. наук. праць. 2009. № 2(4). С. 59—65.

16. Усов А. В., Шпиньковский А. А., Шпиньковская М. И. Уравнения математической физики в моделировании технических систем. Киев : Освіта України, 2014. С. 53 – 60.

17. Юшко С. В., Борщ О. Є., Юшко М. А. Стаціонарна теплопровідність. Харків : НТУ «ХПІ», 2011. С. 6 – 16.

18. The Wolfram Mathematica. URL: <http://www.wolfram.com/index.ru.html> (дата звернення: 10.01.2025).