

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Базі Сергію Олександровичу

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Метод R -функцій у математичному моделюванні фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1223 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ асист. Луханін В.С.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 64 с., 7 рис., 1 дод., 26 джерел.

ФІЛЬТРАЦІЙНА ТЕЧІЯ, КУСКОВО-НЕОДНОРІДНИЙ ҐРУНТ, ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ, СТРУКТУРНИЙ МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД РІТЦА.

Об'єкт дослідження – плоскі стаціонарні фільтраційні течії у кусково-неоднорідному середовищі.

Мета роботи – застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язання задачі математичного моделювання плоскої стаціонарної фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі.

Методи дослідження – структурний метод (метод R -функцій) для побудови структур розв'язку розглядуваних крайових задач та методі Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур.

У кваліфікаційній роботі розглянуто задачу математичного моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідному середовищі. Було проведено огляд математичних моделей фільтраційних течій, методів їх чисельного аналізу та зроблено висновок про доцільність використання структурного методу (методу R -функцій) у поєднанні з методом Рітца. На основі методики побудови структур розв'язку побудовано жмуток функцій, що точно задовольняє всі крайові умови задачі, зокрема умови спряження на межі розділу ґрунтів з різними коефіцієнтами фільтрації. Для апроксимації невизначеної компоненти жмутка запропоновано використати метод Рітца. Запропонована методика була алгоритмізована та програмно реалізована у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3. Наведено результати обчислювального експерименту для тестових задач.

ABSTRACT

Introductory note: 64 pages, 7 figures, 1 appendix, 26 sources.

FLOW IN POROUS MEDIA, PIECEWISE-HETEROGENEOUS SOIL, STREAM FUNCTION, STRUCTURAL R -FUNCTION'S METHOD, RITZ VARIATIONAL METHOD.

Object of research – planar stationary flows in porous media in a piecewise-heterogeneous medium.

Purpose of work – apply the structural method (the method of R -functions) to solve the problem of mathematical modeling of planar stationary flow in porous media in a piecewise-heterogeneous medium.

Methods of research – the structural method (the method of R -functions) for constructing solution structures for the considered boundary value problems and the Ritz method for approximating the undefined components of the specified structures.

The qualification work examines the problem of mathematical modeling of flows in porous media in a piecewise-heterogeneous medium. A review of mathematical models of flows in porous media and methods for their numerical analysis was conducted, leading to the conclusion about the feasibility of using the structural method (the R -function method) in conjunction with the Ritz method. Based on the methodology for constructing solution structures, a bundle of functions was constructed that exactly satisfies all boundary conditions of the problem, including the conjugation conditions at the interface between soils with different filtration coefficients. To approximate the undefined component of the bundle, it is proposed to use the Ritz method. The proposed methodology has been algorithmized and implemented in the computer algebra system Mathematica 13.3. Results of computational experiments for test problems are presented.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	7
1 Аналіз предметної області та постановка задач дослідження	9
1.1 Математичні моделі фільтраційних течій	9
1.2 Методи чисельного аналізу фільтраційних течій	19
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	23
1.4 Постановка задач дослідження	27
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	28
2.1 Метод R -функцій і обернена задача аналітичної геометрії	28
2.2 Метод R -функцій і розв'язання крайових задач	32
2.3 Застосування методу R -функцій у математичному моделюванні фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах	37
Висновки за розділом 2	45
3 Програмна реалізація	46
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3	46
3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах	47
3.3 Опис програми	48
Висновки за розділом 3	49
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	50
4.1 Обчислювальний експеримент для флютбету з одним шпунтом	50
4.2 Обчислювальний експеримент для флютбету з двома шпунтами	53
Висновки за розділом 4	55
Висновки	56
Перелік джерел посилання	57
Додаток А Лістинг програми	60

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасний світ стикається з численними викликами, пов'язаними з управлінням водними ресурсами. Зміни клімату, зростаюче населення та інтенсивна урбанізація призводять до збільшення споживання води та забруднення водоносних горизонтів. Через складність прямого дослідження таких процесів на перший план виходять методи математичного моделювання фільтраційних течій. Моделювання фільтраційних течій допомагає, зокрема оцінити доступність води та прогнозувати вплив забруднень. Це дозволяє визначити, які обсяги підземних вод можуть бути використані без шкоди для екосистеми, а також передбачити, як забруднюючі речовини поширюються в підземних водах і які заходи необхідно вжити для їх очищення. Моделювання фільтраційних течій ускладнюється, якщо середовище є неоднорідним. Кусково-неоднорідні середовища, такі як пористі ґрунти або скельні масиви, характеризуються значними варіаціями в проникності та інших фізичних властивостях.

Серед чисельних методів, що застосовуються для аналізу таких математичних моделей, зазвичай виділяють метод скінченних різниць та метод скінченних елементів. Проте для областей складної геометрії, коли область фільтрації містить криволінійні ділянки межі, це призводить до певних втрат геометричної інформації, що міститься у моделі. Для повного враховування геометричної інформації, що входить до постановки задачі слід використати розроблений академіком Національної академії наук України В.Л. Рвачовим структурний метод R -функцій.

Отже, тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язання задачі математичного моделювання плоскої стаціонарної фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «математичного моделю-

вання плоских стаціонарних фільтраційних течій у кусково-неоднорідному середовищі;

– розглянути основні теоретичні відомості, що відносяться до структурного методу (методу R -функцій);

– застосувати структурний метод (метод R -функцій) до розв’язання задачі моделювання плоскої стаціонарної фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі;

– розробити чисельний алгоритм розв’язання поставленої задачі;

– реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи математичний пакет Wolfram Mathematica 13.3;

– провести обчислювальний експеримент та виконати аналіз його результатів.

Об’єктом дослідження є плоскі стаціонарні фільтраційні течії у кусково-неоднорідному середовищі.

Предметом дослідження є математичні моделі плоских стаціонарних фільтраційних течій у кусково-неоднорідному середовищі та методи їх чисельного аналізу.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються структурний метод (метод R -функцій) для побудови структур розв’язку розглядуваних крайових задач та метод Рітца для апроксимації невизначених компонент зазначених структур.

1 АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Математичні моделі фільтраційних течій

Фільтрацією називається повільний рух (просочування) рідин, нафти і газу, газованої рідини в пористому середовищі під дією будь-яких факторів [1 – 3].

Для визначеності надалі розглядатимемо фільтрацію води в ґрунті. Область ґрунту, заповнена водою, що фільтрується, називається областю фільтрації, або областю руху ґрунтових вод.

Фільтрація називається неусталеною (нестационарною), якщо швидкість фільтраційного потоку і тиску в області фільтрації змінюється з часом. Якщо ж ці характеристики в кожній точці області фільтрації незмінні з часом, то така фільтрація називається стаціонарною.

Важливою характеристикою фільтраційних властивостей ґранту є його пористість, яка визначається рівністю

$$n = \frac{\Omega_{\Pi}}{\Omega_r + \Omega_{\Pi}}$$

де Ω_r – об'єм всіх частинок ґрунту;

Ω_{Π} – об'єм порожнеч ґрунту.

Просочування води (опади, танення снігу, підземне насичування) в об'єм ґрунту, заповнений фільтраційним потоком, називається інфільтрацією.

Ґрунт, склад і властивості якого однакові для всіх рівних за обсягом макроскопічних частин, називається фізично однорідним. Фізично однорідне пористе середовище ізотропне, якщо його властивості однакові в усіх напрямках, інакше воно називається анізотропним.

На практиці абстрагуються від реальної складної течії рідини в порах і використовують лише осереднені характеристики фільтраційного потоку. При

такому підході реальний потік рідини замінюється фіктивним фільтраційним потоком, що неперервно заповнює всі перерізи пористого середовища. Тоді швидкістю фільтрації називається витрата рідини, віднесена до одиниці площі [1 – 3]:

$$v = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Тут ΔQ – дійсна фільтраційна витрата рідини за одиницю часу через майданчик ΔS , а v – абсолютне значення швидкості фільтрації.

Тоді середня швидкість у порах

$$v_{\text{сер.}} = \frac{\Delta Q}{n\Delta S}.$$

Лінії, дотична в кожній точці яких співпадає з напрямом вектора швидкості фільтрації, називається лінією течії.

Заміна істинного руху ґрунтової води в пористому середовищі описаною моделлю дозволяє користуватися для опису фільтраційних течій звичайною методикою гідромеханіки.

В основу теорії фільтрації покладено закон, встановлений емпірично французьким інженером А. Дарсі (1803 – 1858) у 1852 – 1855 рр. Математичний запис закону Дарсі для ізотропного середовища має вигляд [1 – 3]:

$$v = \kappa J = -\kappa \frac{dH}{dS}, \quad (1.1)$$

де $J = -\frac{dH}{dS}$ – градієнт п'єзометричного напору, визначеного як похідна від

п'єзометричного напору (або просто напору) $H = \frac{p}{\rho g} + z$ ($\rho g = \gamma$) по шляху S ;

p – тиск;

ρ – густина рідини;

g – прискорення сили тяжіння;

z – геометрична висота над деякою площиною порівняння;

γ – питома вага рідини;

k – коефіцієнт фільтрації.

Закон Дарсі (1.1) означає, що втрати напору при фільтрації є пропорційними швидкості фільтрації.

Пористість є безрозмірною величиною, причому $0 < n < 1$. Відомо [1 – 3], що пористість ґрунтів лежить у межах $0.3 \div 0.7$, річкового піску – $0.3 \div 0.55$, нафтогазоносних пластів – $0.1 \div 0.2$.

Коефіцієнт фільтрації k залежить як від властивостей пористого середовища, так і від властивостей рідини:

$$k = \frac{k\rho g}{\mu},$$

де k – проникність пористого середовища;

ρ – густина рідини;

g – прискорення сили тяжкості;

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини.

Типові значення k при фільтрації води в піску мають порядок $10^{-5} \div 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, у ґрунті – $10^{-6} \div 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, у глині – $10^{-7} \div 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

При фільтрації в пористих анізотропних середовищах лінійна залежність швидкості фільтрації і градієнта тиску зберігається, проте ці вектори в загальному випадку вже не будуть колінарні. Коефіцієнт фільтрації буде тепер симетричним додатно-означеним тензором.

Критерієм застосування закону Дарсі є малість числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{4}{3n + 0,92} \cdot \frac{vd_{\text{эф.}}}{\nu} < 7 \div 9,$$

де n – пористість ґрунту;

ν – швидкість фільтрації;

$d_{\text{эф.}}$ – ефективний діаметр;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини.

Ефективний діаметр $d_{\text{эф.}}$ відповідає діаметру отвору сита, через яке при просіюванні пройде 10% ваги частинок досліджуваного ґрунту.

Зазначимо, що на практиці відхилення від закону Дарсі зустрічаються в деяких видах пористих середовищ та для повільних течій. Надалі вважатимемо, що з аналізованих нами ґрунтів лінійний закон (1.1) виконується, Крім того, припускатимемо, що область фільтрації заповнена недеформівним пористим середовищем ($n \equiv \text{const}$), причому у порах немає відкладення і розчинення твердих речовин.

Протилежне явище, коли волога йде з фільтраційного середовища в навколишнє, називається випаровуванням.

Часто в природі зустрічаються шаруваті ґрунти, про фізично однорідні у кожному шарі.

Якщо межа області фільтрації складається тільки з проникних та непроникних ділянок, то фільтрація називається напірною. Якщо ж до складу межі входять ще поверхні (криві) депресії, що розділяють сухий і змочений ґрунт, а також поверхні (проміжки) височування, з яких рідина потрапляє безпосередньо в атмосферу, фільтрацію прийняти називати безнапірною.

Основні рівняння гідромеханічної теорії фільтрації було отримано роботах М.Є. Жуковського та М.М. Павловського. При виведенні цих рівнянь використовувалися закони фізики та основний метод гідромеханіки (метод Ейлера), об'єктом вивчення якого є не сама рідина, а нерухомий простір, заповнений суцільним середовищем.

Система рівнянь руху рідини в пористому середовищі має вигляд [1 – 3]:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\kappa} v_x = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\kappa} v_y = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{\kappa} v_z = 0, \quad (1.4)$$

$$n \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \quad (1.5)$$

$$f(\rho, H, T) = 0. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.5) називається рівнянням нерозривності, а рівняння (1.6) – рівнянням стану, що характеризують стан речовини співвідношенням між щільністю ρ , п'єзометричним напором H і абсолютною температурою T .

Система (1.2) – (1.6) є замкненою системою рівнянь, що описують неусталену фільтрацію важкої стисливої рідини в недеформівному ґрунті, коли є застосовним закон Дарсі.

Інтегруючи систему рівнянь (1.2) – (1.6) в області фільтрації (при заданих крайових і початкових умовах), ми отримаємо проєкції швидкості фільтрації, п'єзометричний напір і щільність фільтровної рідини.

Для нестисливих однорідних рідин рівняння стану набуває вигляду

$$\rho = \text{const}.$$

Тоді рівняння нерозривності набуває вигляду

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.7)$$

Для стаціонарної фільтрації з (1.2) – (1.4) отримаємо

$$v_x = -\kappa \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -\kappa \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -\kappa \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (1.8)$$

Підстановкою (1.8) у (1.7) отримаємо, що п'єзометричний напір H задовольняє в області фільтрації однорідне еліптичне рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0, \quad (1.9)$$

яке для однорідно-ізотропного ґрунту ($\kappa = \text{const}$) переходить в рівняння Лапласа

$$\Delta H \equiv \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0. \quad (1.10)$$

Ввівши потенціальну функцію φ співвідношенням

$$\varphi = -\kappa H \quad (1.11)$$

з (1.9) і (1.10) отримаємо, що для $\kappa = \text{const}$ функція φ є в області фільтрації гармонічною:

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.12)$$

Лінії рівня $\varphi = \text{const}$ функції φ називаються екіпотенціальними поверхнями (поверхнями рівного потенціалу), а враховуючи (1.11), ці поверхні є поверхнями рівного напору. Зрозуміло, що вектор швидкості фільтрації в будь-якій

точці області фільтрації спрямований за нормаллю до поверхні рівного напору, що проходить через цю точку.

У випадку плоскої стаціонарної фільтрації в однорідному ізотропному недеформівному ґрунті (фільтрація відбувається в площині, паралельній координатній площині xOy) система (1.2) – (1.6) набуде вигляду

$$v_x = -\kappa \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -\kappa \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

а рівняння (1.12) –

$$\Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0. \quad (1.14)$$

Плоскі фільтраційні течії також зручно аналізувати за допомогою функції течії ψ , що вводиться співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При такому означенні функції течії ψ рівняння нерозривності (третє з рівнянь (1.13)) перетворюється на тотожність, а

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.16)$$

Оскільки $\varphi = -\kappa H$, то функції φ і ψ пов'язані умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.17)$$

і функція ψ є в області фільтрації гармонічною функцією:

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.18)$$

Диференціюючи першу з рівностей (1.16) за y і віднімаючи з неї другу з рівностей (1.16), про диференційовану за x отримаємо, що функція течії задовольняє в області фільтрації рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (1.19)$$

Лінії рівня $\psi = \text{const}$ функції течії ψ називаються лініями течії. Вони мають ту властивість, що вектор швидкості фільтрації в будь-якій точці області фільтрації направлений по дотичній до лінії струму, що проходить через цю точку.

Рівняння для напору (1.9), (1.10), потенціалу (1.12), (1.14), функції струму (1.18), (1.19) слід доповнити крайовими умовами [1 – 3].

На ділянках межі області фільтрації, що є непроникними поверхнями, має перетворюватися на нуль нормальна складова швидкості (умова непротікання):

$$v_n = 0. \quad (1.20)$$

Прикладами таких ділянок меж є поверхні бетонних основ гідроспоруд або межі піску і глини.

Із закону Дарсі та рівностей (1.11), (1.17), (1.20) випливає, що на таких ділянках межі

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad \psi = \text{const},$$

тобто вони є лініями течії.

Деякі ділянки межі області фільтрації можуть межувати з областями вільної рідини. Такими ділянками межі є, наприклад, дно водоймища, через яке рідина може просочуватися з водоймища в ґрунт і, навпаки, через яке ґрунтові води можуть проникати у водойму. У цьому випадку на цих ділянках межі має перетворюватися на нуль дотична складова швидкості:

$$v_s = 0. \quad (1.21)$$

Із закону Дарсі та рівностей (1.11), (1.17), (1.20) випливає, що на таких ділянках межі

$$\varphi = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

тобто вони є еквіпотенційними лініями.

Припустимо, що область фільтрації частково межує з атмосферою. Також межі називаються проміжками височування на таких ділянках рідини може витікати з пористого середовища і, наприклад, стікати вздовж кордону або випаровуватися. Прикладами таких меж є стінки земляних гребель, через які фільтрується вода, або стінки колодязів, виритих у водонасиченому ґрунті.

На проміжку височування ставляться умови неперервності тиску (якщо нехтувати капілярними ефектами, то тиск рідини в пористому середовищі на межі співпадає з атмосферним) і додатності проєкції швидкості фільтрації на зовнішню нормаль:

$$v_n > 0,$$

оскільки рідина може лише витікати із пористого середовища. Сама ж величина швидкості фільтрації на межі до розв'язання задачі є невідомою.

Частина межі області фільтрації може бути лінією поділу між сухим та вологим ґрунтом. Така ділянка називається вільною поверхнею (лінією) чи поверхнею депресії. Зазначимо, що до розв'язання задачі її форма невідома. На ділянці вільної поверхні ставляться зазвичай загальна умова збереження маси та умова неперервності тиску. Крім того, ця крива є лінією течії.

Припустимо, що ґрунтова вода проходить через два ґрунти з різними коефіцієнтами фільтрації κ_1 та κ_2 . Нехай ґрунти межують по деякій лінії L . На цій лінії мають бути виконані умови неперервності тиску:

$$p_1 = p_2 \text{ у будь-якій точці } L$$

та умова нерозривності течії:

$$v_{1n} = v_{2n} \text{ у будь-якій точці } L.$$

Тоді із закону Дарсі та рівностей (1.11), (1.17) випливатиме, що на L виконуються умови

$$\frac{\varphi_1}{\kappa_1} = \frac{\varphi_2}{\kappa_2}, \quad \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s},$$

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial n}.$$

Значення потенціальної функції φ або функції течії ψ дозволяє знайти низку параметрів фільтрації, необхідних для конкретного розрахунку гідротехнічних споруд. Так, наприклад, якщо Γ – проста гладка незамкнена крива в області фільтрації, то витрата Q рідини через Γ (фільтраційна витрата через Γ) дорівнює

$$Q = \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} ds,$$

а приріст п'єзометричного напору H вздовж Γ дорівнює

$$[H]_{\Gamma} = \pm \int_{\Gamma} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \pm \int_{\Gamma} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

де знак залежить від обраного на Γ напрямку.

1.2 Методи чисельного аналізу фільтраційних течій

Через складність та різноманітність постановок задачі розрахунку фільтраційних течій для їх розв'язання зазвичай використовуються чисельні методи. Серед чисельних методів, що використовуються для розрахунку фільтраційних течій, можна виокремити:

- метод скінченних різниць;
- метод скінченних елементів;
- метод об'ємів;
- методи спектрального аналізу;
- методи Монте-Карло.

Наведемо коротку характеристику кожного з зазначених методів.

Метод скінченних різниць є чисельним методом, що широко використовується для розв'язання диференціальних рівнянь, зокрема в задачах, пов'язаних із фільтраційними течіями. Цей метод дозволяє апроксимувати похідні у рівняннях, замінюючи їх дискретними різницями, що робить можливим чисельне моделювання складних фізичних процесів.

При використанні цього методу область, у якій розглядається фільтраційна течія, замінюється на сітку – скінченну множину точок (сітка може бути

прямокутною, трикутною або іншої форми в залежності від задачі). Для нестационарних задач час також дискретизується на рівні інтервали. Далі за обраним шаблоном відбувається апроксимація похідних (як за простором, так і за часом), що входять до диференціального рівняння, а також відбувається певним чином апроксимація початкових та граничних умов. Після дискретизації початкових і граничних умов та заміни похідних на їх апроксимації, отримується система алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати за допомогою чисельних методів. Після отримання чисельних значень тиску та швидкості потоку важливо провести аналіз результатів, перевірити їх на фізичну обґрунтованість.

Серед переваг методу скінченних різниць можна відмітити простоту реалізації, можливість застосування до геометрично складних областей, хорошу точність для багатьох практичних задач. Недоліками методу скінченних різниць є залежність точності від вибору сітки (може вимагати значних обчислювальних ресурсів для тонких сіток), проблеми зі стійкістю при великих числах Рейнольдса, також можливі труднощі з обробкою складних граничних умов.

Метод скінченних елементів є потужним чисельним методом, який широко використовується для розрахунку фільтраційних течій в геотехніці, гідрології, інженерії та інших галузях. Цей метод дозволяє моделювати складні фізичні процеси, включаючи фільтрацію рідин через пористі середовища. Цей метод базується на розбитті геометрично складної області на простіші елементи (скінченні елементи), які легше аналізувати (це можуть бути трикутники, квадрати, тетраедри тощо). Потім для кожного елемента вибираються функції, які описують поведінку поля (наприклад, швидкість фільтрації або тиск). Далі на основі законів фізики (наприклад, рівняння Дарсі для фільтрації) формулюються рівняння, які описують поведінку рідини в пористому середовищі. Локальні рівняння для кожного елемента об'єднуються в одну глобальну систему рівнянь, а глобальна система рівнянь розв'язується за допомогою чисельних методів.

Перевагами використання методу скінченних елементів є гнучкість (метод може бути застосований до складних геометрій і неоднорідних матеріалів), точність (залежно від дискретизації та вибору функцій наближення метод може

забезпечити високу точність розрахунків), адаптивність (можливість адаптації до змінюваних умов і параметрів в процесі моделювання). До недоліків методу скінченних елементів зазвичай відносять високу обчислювальну складність та необхідність валідації результатів моделювання.

Метод об'ємів (або метод контрольних об'ємів) є чисельним підходом, який широко використовується для моделювання фільтраційних течій в пористих середовищах. Цей метод базується на принципах збереження маси, енергії та імпульсу і є особливо корисним для розв'язування задач, що пов'язані із гідрологією, геотехнікою та інженерними науками. Метод передбачає поділ досліджуваної області на контрольні об'єми, в рамках яких проводяться розрахунки. Область фільтрації розбивається на прості контрольні об'єми (зазвичай прямокутні або кубічні), які вичерпують всю розрахункову область. Далі для кожного контрольного об'єму формулюються рівняння, що описують фізичні процеси, такі як закон збереження маси (рівняння континууму) і рівняння Дарсі для фільтрації. Інтегруючи рівняння по контрольному об'єму, отримуються дискретизовані рівняння, які враховують потоки через межі контрольних об'ємів. Отримані рівняння формують систему, яку можна розв'язати за допомогою чисельних методів (наприклад, ітераційних методів).

Перевагами методу об'ємів є перш за все те, що метод забезпечує точне виконання законів збереження маси та енергії через контрольні об'єми., а також те, що метод об'ємів зазвичай є більш стійким до чисельних нестабільностей у порівнянні з іншими методами, такими як метод скінченних елементів, і може бути легко адаптований до складних геометрій і неоднорідних матеріалів. З іншого боку до недоліків методу об'ємів відносять складність реалізації, значні обчислювальні ресурси для великих моделей та необхідність валідації результатів.

Метод спектрального аналізу базується на розкладанні функцій у ряди, що дозволяє аналізувати поведінку системи в частотній області. У контексті фільтраційних течій метод спектрального аналізу може бути використаний для дослідження динаміки потоків, а також для розв'язання рівнянь, що описують

ці процеси.

Метод спектрального аналізу дозволяє моделювати та прогнозувати динаміку фільтраційних течій у пористих середовищах. Він може бути використаний для оцінки впливу різних факторів, таких як зміни тиску, температури або хімічного складу рідини. Спектральний аналіз допомагає виявити резонансні частоти системи, які можуть спричинити значні зміни в потоці. Метод може бути застосований для вивчення нестабільностей у фільтраційних течіях, таких як конвективні нестабільності або хвилі, що виникають у рідинах. Аналіз частот дозволяє визначити умови, за яких можуть виникнути ці нестабільності, а також їх вплив на загальну динаміку течії.

Спектральний аналіз часто є більш ефективним у порівнянні з іншими методами, оскільки дозволяє швидко отримати інформацію про частотні характеристики системи. Проте реалізація спектрального аналізу може вимагати значних математичних знань та програмування.

Методи Монте-Карло є потужними статистичними інструментами, які використовуються для моделювання і аналізу складних систем, включаючи фільтраційні течії в пористих середовищах. Ці методи базуються на випадкових зразках і ймовірнісних розрахунках, що дозволяє отримати наближену інформацію про поведінку системи. Ці методи ґрунтуються на генерації випадкових чисел для моделювання фізичних систем. Фільтраційні течії в пористих середовищах часто підпадають під вплив гетерогенності, тобто неоднорідності в їх структурі. Методи Монте-Карло можуть бути використані для:

- генерації моделей пористих середовищ: випадкове розміщення частинок або пор в заданій геометрії може допомогти змоделювати реальні умови;
- оцінки впливу гетерогенності: зміна параметрів, таких як проникність або пористість, може бути модульована через випадкові зразки для оцінки їхнього впливу на потік рідини.

Переваги методів Монте-Карло є гнучкість (вони можуть бути адаптовані до різних типів задач і умов) і вони здатні справлятися зі складними геометріями та нелінійними процесами. До недоліків відноситься те, що для отримання

статистично значущих результатів може знадобитися велика кількість симуляцій і результати можуть сильно залежати від вибору випадкових параметрів.

Вибір конкретного чисельного методу залежатиме від характеру задачі, геометрії області, фізичних властивостей середовища та інших факторів.

Математичному моделюванню фільтраційних течій та застосуванню до їх чисельного аналізу деяких з розглянутих вище методів присвячені роботи [4 – 9 та інші].

Зауважимо насамкінець, що кожна крайова чи початкова крайова задача математичної фізики, зокрема, ті задачі, що є математичними моделями фільтраційних течій, поєднують у своїй постановці як геометричну (форма розрахункової області), так і аналітичну (вигляд диференціальних операторів) інформації. Незважаючи на поширеність методу скінченних різниць та методу скінченних елементів, вони здатні лише наближено урахувати геометричну інформацію, що міститься у постановці задачі (особливо, якщо розрахункова область містить криволінійні ділянки межі). Вільним від цього недоліку методом, який точно враховує всі види інформації, що входять до постановки задачі, є структурний метод (метод R -функцій), що був запропонований академіком Національної академії наук України В.Л. Рвачовим. До розрахунку фільтраційних течій метод R -функцій було застосовано у роботах [10 – 22].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Розглянемо течію нестисливої рідини під гідротехнічною спорудою (греблею) в кусково-неоднорідному ґрунті [16]. На рис. 1.1 наведено загальну схему фільтрації. Тут $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \partial\Omega_{12}$ – область фільтрації, $\partial\Omega_{12}$ – лінія розділу областей Ω_1 і Ω_2 , $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_3$ – проникні ділянки межі області фільтрації, $\partial\Omega_2$ – межа основи греблі (флютбета), $\partial\Omega_4$ – межа водонепроникної області (водоупора), $\partial\Omega_5$ – шпунт.

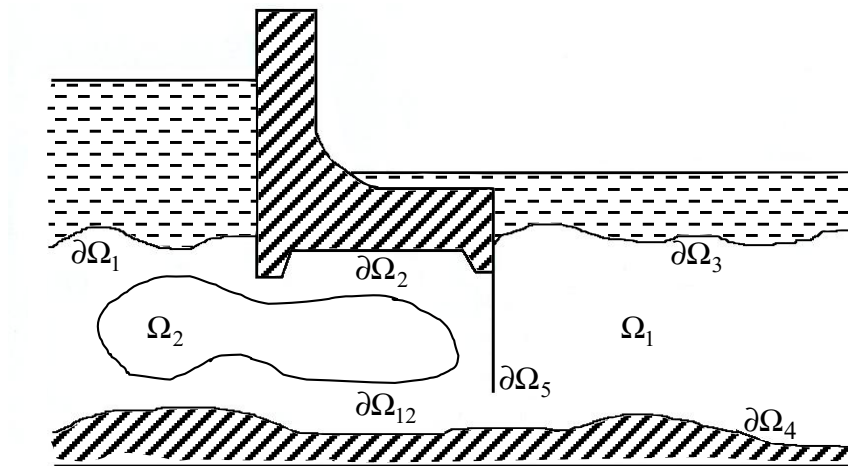


Рисунок 1.1 – Схема фільтрації

Нехай плоска стаціонарна фільтрація стисливої рідини в області Ω описується лінійним законом Дарсі:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.22)$$

$$\vec{v} = -\kappa \nabla h \text{ у } \Omega, \quad (1.23)$$

де $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – швидкість фільтрації;

κ – коефіцієнт фільтрації;

$h = y + \frac{p}{\rho g}$ – п'єзометричний напір;

p – тиск;

ρ – щільність рідини;

g – прискорення сили тяжіння.

З (1.22), (1.23) випливає, що напір є розв'язком рівняння:

$$-\operatorname{div}(\kappa \nabla h) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega. \quad (1.24)$$

Однак для чисельного аналізу фільтраційної течії зручніше від розв'язування крайової задачі для рівняння (1.24) перейти до розв'язування

крайової задачі для функції течії $\psi(x, y)$. Функція течії $\psi(x, y)$ плоскої течії вводитьсь співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.25)$$

Як легко бачити, рівняння нерозривності (1.22) при цьому перетворюється на тотожність. Тоді з (1.23) випливає, що

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.26)$$

Виключивши перехресним диференціюванням з рівностей (1.26) напір h , отримаємо для функції течії ψ рівняння

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \text{ у } \Omega. \quad (1.27)$$

Доповнимо рівняння (1.27) крайовими умовами.

Ґрунт, що заповнює область фільтрації Ω , будемо припускати кусково-неоднорідним, а саме, що він складається з двох частин: Ω_1 з коефіцієнтами фільтрації κ_1 та Ω_2 з коефіцієнтами фільтрації κ_2 . Тоді

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \psi_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ \psi_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

а коефіцієнт фільтрації

$$\kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ \kappa_2, & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Нехай лінія $\partial\Omega_{12}$ є лінією поділу двох ґрунтів. Тоді на ділянці $\partial\Omega_{12}$ ставляться умови спряження

$$\psi_1|_{\partial\Omega_{12}} = \psi_2|_{\partial\Omega_{12}}, \quad \kappa_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial\vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \kappa_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial\vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}}, \quad (1.28)$$

де \vec{n} – нормаль до $\partial\Omega_{12}$.

На проникних ділянках межі $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_3$ напір має бути сталим, що приводить до того, що на $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$ функція течії має задовольняти однорідну умову Неймана:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad (1.29)$$

де \vec{n} – зовнішня до $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$ нормаль.

Межа основи греблі $\partial\Omega_2$, шпунт $\partial\Omega_5$ і межа водоупора $\partial\Omega_4$ є водонепроникними, тому нормальна складова швидкості фільтрації \vec{v} на цих ділянках межі дорівнює нулю, тобто $\partial\Omega_2$, $\partial\Omega_5$, $\partial\Omega_4$ є лініями рівня функції течії. Це приводить до того, що на $\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_5$ і $\partial\Omega_4$ функція течії має задовольняти умови Діріхле:

$$\psi|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_5} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_4} = Q, \quad (1.30)$$

де величина Q задає загальну витрату рідини у області фільтрації.

Таким чином, для визначення функції течії $\psi(x, y)$ (а отже, і поля швид-

костей фільтраційного течії – див. (1.25)) необхідно в області Ω знайти розв’язок рівняння (1.27), що задовольняє умови (1.28) – (1.30).

Вважаємо, що всі криві в області фільтрації є гладкими або кусково-гладкими. Зауважимо, що основні труднощі, що виникають при чисельному розв’язанні задачі (1.27) – (1.30), пов’язані з необхідністю врахувати в обчислювальному алгоритмі умову спряження (1.28).

1.4 Постановка задач дослідження

Виходячи з проведеного аналізу математичних моделей фільтраційних течій, а також аналізу відповідних чисельних методів, можна зробити висновок, що перспективним є дослідження стаціонарних фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах з використанням структурного методу (методу R -функцій).

Отже, метою кваліфікаційної роботи є застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв’язання задачі математичного моделювання плоскої стаціонарної фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі.

Для досягнення поставленої мети, необхідно:

- розглянути основні теоретичні відомості, що відносяться до структурного методу (методу R -функцій);
- застосувати структурний метод (метод R -функцій) до розв’язання задачі моделювання плоскої стаціонарної фільтраційної течії у кусково-неоднорідному середовищі;
- розробити чисельний алгоритм розв’язання поставленої задачі;
- реалізувати розроблений чисельний алгоритм, використовуючи математичний пакет Wolfram Mathematica 13.3;
- провести обчислювальний експеримент та виконати аналіз його результатів.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Метод R -функцій і обернена задача аналітичної геометрії

При проведенні розрахунків багатьох фізичних процесів виникає потреба в аналітичному описі заданих геометричних об'єктів за допомогою одного рівняння. В цьому полягає обернена задача аналітичної геометрії.

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії [23, 24]. Нехай в \mathbb{R}^2 задано геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ і необхідно побудувати функцію $\omega(x, y)$, що є додатною всередині Ω , від'ємною ззовні Ω та рівну нулеві на $\partial\Omega$. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, що є межею $\partial\Omega$ області Ω [23, 24].

Функція $\omega(x, y)$ може бути досить просто побудована за допомогою методу R -функцій для областей довільної форми, причому функція $\omega(x, y)$ у цьому випадку буде елементарною функцією та матиме вигляд єдиного аналітичного виразу.

Введемо до розгляду характеристичну функцію, що відповідає області Ω

$$\chi(\omega(x, y)) = \begin{cases} 0, & \omega(x, y) < 0, \\ 1, & \omega(x, y) \geq 0. \end{cases}$$

Маючи в розпорядженні деяку систему характеристичних функцій $\chi_i = (\omega_i(x, y) \geq 0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) та булеву функцією $Y = F(X_1, X_2, \dots, X_m)$, можна побудувати предикат

$$\chi = F(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m) = F((\omega_1 \geq 0), (\omega_2 \geq 0), \dots, (\omega_m \geq 0)),$$

який визначає область Ω , побудовану з допоміжних областей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ за логічними правилами, що визначаються булевою функцією F , за допомогою

наступних логічних операцій над множинами: “ \cap ” – перетину, “ \cup ” – об’єднання та “ \neg ” – доповнення. Формально це можна подати у вигляді

$$\Omega = F(\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m\}, \{\cap, \cup, \neg\}). \quad (2.1)$$

Вважаємо, що вихідні (опорні) області $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ мають простішу форму, ніж Ω , і для кожної з них відоме рівняння її межі $\omega_i(x, y) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Метод R -функцій дозволяє на основі теоретико-множинного опису області Ω отримати в аналітичному вигляді рівняння її межі $\omega(x, y) = 0$.

Означення 2.1. R -функцією (функцією В.Л. Рвачова), що відповідає розбиттю числової осі на інтервали $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої повністю визначається знаками її аргументів.

При цьому одночасно з R -функцією є заданою деяка супровідна функція булевої алгебри з тією ж кількістю аргументів. Тому можна дати наступне еквівалентне означення R -функції [23, 24].

Означення 2.2. Функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, де двозначний предикат

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Кожній R -функції відповідає єдина супровідна булева функція. Зворотне твердження не є вірним, і одній і тій самій булевій функції відповідає нескінченна множина (гілка) R -функцій. Множина R -функцій функціонально замкнена, тобто суперпозиція R -функцій також є R -функцією.

Означення 2.3. Система функцій H , складена з R -функцій, називається достатньо повною, якщо множина всіх суперпозицій елементів H (множина H -реалізованих функцій), має непорожній перетин з кожною гілкою множини R -функцій.

Достатньою умовою повноти системи H є повнота системи H^* відповідних супроводжуваних булевих функцій. Однією з найбільш вживаних у множині булевих функцій є система $H^* = \{X \wedge Y, X \vee Y, \bar{X}\}$.

Перехід від предикатного завдання множини Ω у вигляді (2.1) до її завдання за допомогою нерівності $\Omega = (\omega(x, y) \geq 0)$ може бути здійснений з допомогою однієї з достатньо повних систем R -функцій.

Наприклад, найбільш часто використовується система \mathfrak{R}_0 :

$$\begin{aligned} x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x \vee_0 y &\equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \bar{x} &\equiv -x. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Зауважимо, що операції системи \mathfrak{R}_0 мають розриви похідних в точці $(0, 0)$.

Перехід від предикатної форми завдання області (2.1) до звичайної, прийнятої в аналітичній геометрії, рівняння для межі області відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а символи $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg\}$ відповідно. В результаті отримаємо аналітичний вираз $\omega(x, y)$, що задає в елементарних функціях необхідне рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх $\omega(x, y) < 0$.

Означення 2.4. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$ до n -го порядку, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1, \quad \frac{\partial^l\omega}{\partial\mathbf{n}^l}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (l = 2, 3, \dots, n), \quad (2.3)$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Умови (2.3) означають, що вздовж нормалі до $\partial\Omega$ функція $\omega(x, y)$ веде себе приблизно як функція відстані r точок цієї нормалі від межі $\partial\Omega$.

Нормалізоване до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ може бути отримане із рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ наступним чином [23, 24].

Теорема 2.1. Якщо $\omega(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умови

$$\omega|_{\partial\Omega} = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} > 0,$$

то функція

$$\omega_1 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\nabla\omega|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2), \quad (2.4)$$

де $|\nabla\omega| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}$, задовольняє умовам $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\left. \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1$ у всіх ре-

гулярних точках межі $\partial\Omega$.

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого до першого порядку рівняння $\omega(x, y) = 0$ локуса Ω можна користатись простішою формулою

$$\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}.$$

Для таких областей, як півплощина, смуга, круг, сфера та багато інших, нормалізовані рівняння отримуються шляхом введення простих нормувальних множників. Виявляється, що застосування деяких достатньо повних систем

R -функцій дозволяє перенести їх властивість нормалізованості і на випадок складних локусів, для яких наведені прості області є опорними.

З конструктивної точки зору, нормалізація рівняння області призводить до ускладнення аналітичного виразу в (2.4). Проте на практиці процес побудови нормалізованих рівнянь для широкого класу областей можна спростити.

Теорема 2.2. Функція $\omega(x, y)$, утворена з нормалізованих функцій $\omega_i(x, y)$ за допомогою R -операцій систем \mathfrak{R}_0 , також є нормалізованою в регулярних точках межі, якщо $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

2.2 Метод R -функцій і розв'язання крайових задач

Розглянемо застосування методу R -функцій до розв'язування крайових задач математичної фізики [23, 24].

Нехай Ω – деяка область у просторі \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega$ – її межа, $\partial\Omega_i$ – покриття межі $\partial\Omega$, таке, що

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^m \partial\Omega_i.$$

Ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) межі $\partial\Omega$ не обов'язково різні і можуть співпадати зі всією межею $\partial\Omega$.

Нехай, далі, f і φ_i ($i=1, 2, \dots, m$) – деякі відображення області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно на деякі множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$), u – відображення замкнутої області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ на деяку множину U , а A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) – відображення множини U на множини F та Θ_i ($i=1, 2, \dots, m$) відповідно.

Вимагатимемо виконання умов

$$Au = f, \quad (2.5)$$

та

$$L_i u = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2.6)$$

В такому випадку говорять, що поставлена крайова задача. До крайових задач такого вигляду зводяться більшість задач, що виникають в теорії пружності та гнучкості, теорії потенціалу, електростатиці та електродинаміці, теорії коливань, теорії пластин та оболонок, теплофізиці, теорії фільтрації, аеро- і гідродинаміці та в інших областях фізики та техніки.

Вигляд відображень u , f та φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять в постановку задачі, визначається конкретними фізичними умовами задачі. Вони можуть бути скалярами, векторами, тензорами. Зазвичай відображення A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) є диференціальними, інтегральними або інтегродиференціальними операторами.

Відображення A , L_i , u , f , φ_i ($i=1, 2, \dots, m$), що входять у постановку крайової задачі, є аналітичними компонентами крайової задачі, а область Ω , межа $\partial\Omega$ та її ділянки $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$) – геометричними компонентами. В залежності від того, які компоненти задані, а які є шуканими, говорять про пряму та обернену краєві задачі. Крайова задача називається прямою, якщо шуканою є компонента u , а решта – заданими. В решті випадків крайові задачі називаються оберненими. Вважатимемо, що задача є правильно поставленою, тобто всі задані в (2.5), (2.6) відображення забезпечують існування і єдиність розв'язку. Особливої уваги щодо цього вимагають краєві задачі для областей, межа яких містить нерегулярні точки, ребра та інші особливості (так звані геометричні сингулярності), а також задачі з крайовими умовами, що мають різний характер на різних ділянках межі $\partial\Omega$ (так звані мішані задачі). В таких задачах оператори L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть не мати сенсу в особливих точках межі. В такому випадку необхідна постановка деяких додаткових умов.

Характерною особливістю крайових задач є залежність поля від геометричних форм, що мають в реальних об'єктах доволі складну конфігурацію. Це може бути форма області Ω , ділянок $\partial\Omega_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), межі $\partial\Omega$, ліній чи поверхонь розриву аналітичних компонент та ін. Більше того, у випадку крайових задач для кусково-неоднорідних середовищ, самі оператори A та L_i ($i=1, 2, \dots, m$) можуть мати зовсім різний вигляд в різних підобластях $\Omega_j \subset \Omega$ та на ділянках $\partial\Omega_i \subset \Omega$ ($i=1, 2, \dots, m$). Таким чином, побудова ефективних чисельних методів розв'язання крайових задач можлива лише з урахуванням всіх видів вхідної інформації, як аналітичної, так і геометричної. Отже, необхідно не тільки враховувати вигляд формул, що входять у постановку задачі, але і приводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, що дозволить внести її до алгоритму розв'язання. Здійснити цю процедуру дозволяє метод R -функцій, який часто називають конструктивним. Цей метод дозволяє враховувати геометричну інформацію на аналітичному рівні без будь-якої її апроксимації. Для досягнення цієї цілі, враховуватимемо той конструктивний апарат описаний в попередньому пункті.

Нехай $D_A(\Omega) \subseteq U$ – область визначення оператора A , що входить в рівняння (2.7), а

$$L_{i_k} u = \varphi_{i_k} \quad (k=1, 2, \dots, s), \quad (2.7)$$

де $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ – деяка підмножина індексів $\{1, 2, \dots, m\}$.

Означення 2.5. Формула $u = B(\Phi)$, де Φ – елемент деякої множини \mathfrak{M} , а $B: \mathfrak{M} \rightarrow D_A(\Omega)$, називається структурою розв'язку, що враховує умови (2.7) і визначена на \mathfrak{M} , якщо для всіх $\Phi \in \mathfrak{M}$

$$L_{i_k} B(\Phi) = \varphi_{i_k} \quad (k=1, 2, \dots, s). \quad (2.8)$$

Зазначимо, що оператор B залежить від геометрії області Ω та ділянок $\partial\Omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) її межі, а також операторів крайових умов.

Структура, що враховує всі крайові умови (2.6), називається загальною структурою, а якщо задовольняється лише частина умов (2.6), то структура називається частковою. Зазначимо, що задоволення умов (2.7) може розумітись також в тому чи іншому узагальненому сенсі, наприклад, за нормою, чи метрикою деякого простору, що прямує до нуля. В цьому випадку мова йде про узагальнені структури.

Структура $u = B(\Phi)$, $\Phi \in \mathfrak{M}$, визначає деяку множину $D_B \subset D_A$, $D_B = \{u : u = B(\Phi) \ \forall \Phi \in \mathfrak{M}\}$. Проте може виявитись, що шуканий розв'язок u_0 крайової задачі не міститься в D_B . У цьому випадку структуру $u = B(\Phi)$ називатимемо неповною. Якщо $u_0 \in D_B$, то структура $u = B(\Phi)$ називається повною (в класичному сенсі). В багатьох випадках не існує класичного розв'язку крайової задачі, якщо і існує, то методи його відшукування не відомі або такі, що важко реалізуються.

В більшості випадків крайові умови мають вигляд

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n} \partial \boldsymbol{\tau}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \boldsymbol{\tau}^k}, x, y\right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi_0 \Big|_{\partial\Omega}, \quad (2.9)$$

де F – деяка, зазвичай лінійна відносно своїх аргументів $u, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial \boldsymbol{\tau}^k}$ функція;

\mathbf{n} і $\boldsymbol{\tau}$ – напрямки нормалі (внутрішньої) та дотичної до межі $\partial\Omega$.

Похідні за нормаллю та дотичною, що входять у формулу (2.9), мають сенс лише на межі області, а структура, що задовольняє умови (2.9), повинна мати сенс усюди в області Ω .

Розглянемо диференціальні оператори, за допомогою яких можна продовжити крайові умови всередину області Ω

$$D_n = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^{n-i} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^i \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i}, \quad (2.10)$$

$$T_n = \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^{n-i} \frac{\partial^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i},$$

де $\omega(x, y)$ – функція, що задовольняє умови:

- а) $\omega(x, y) > 0$ всередині Ω ;
 - б) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
 - в) $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 1$ на $\partial\Omega$.
- (2.11)

Можна довести, що для будь-якої функції $u \in C^n$ мають місце співвідношення

$$D_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \mathbf{n}^n}, \quad T_n u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \boldsymbol{\tau}^n}, \quad D_k T_{n-k} u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial \mathbf{n}^k \partial \boldsymbol{\tau}^{n-k}}.$$

Зокрема, для $k=1$ внаслідок умов б), в) із (2.11) для $\omega(x, y)$ та добутку $\omega(x, y)\Phi$, де Φ – обмежена диференційована функція, отримаємо

$$D_1 \omega = 1 + O(\omega),$$

$$T_1 \omega = 0,$$

$$D_1(\omega\Phi) = (D_1 \omega)\Phi + \omega D_1 \Phi = \Phi + O(\omega),$$

$$T_1(\omega\Phi) = O(\omega).$$

Після побудови структури розв'язку крайової задачі постає проблема вибору (апроксимації) невизначеної компоненти. Це можна здійснити якимось чисельним методом, наприклад, варіаційним чи проєкційним [25].

2.3 Застосування методу R -функцій у математичному моделюванні фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах

Для розв'язання крайової задачі (1.27) – (1.30) скористаємося структурно-варіаційним методом академіка Національної академії наук України В.Л. Рвачова. Опишемо побудову структури розв'язку крайової задачі (1.27) – (1.30), тобто жмуток функцій, що точно задовольняє крайові умови (1.28) – (1.30) [16].

Припустимо, що відомі функції $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, такі, що:

- а) $\omega_i(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_i$;
- б) $\omega_i(x, y) > 0$, якщо $(x, y) \in \bar{\Omega} \setminus \partial\Omega_i$;
- в) $\frac{\partial\omega_i}{\partial\vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega_i$;

де \vec{n} – нормаль, що є зовнішньою до $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^5 \partial\Omega_i$; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Якщо межа $\partial\Omega$ області Ω складається зі скінченної кількості кусково-гладких кривих, кожна з яких допускає завдання за допомогою елементарної функції, то функції $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, із зазначеними властивостями можуть бути побудовані за допомогою методу R -функцій і є функціями елементарними.

Використовуючи формули «склеювання», побудуємо функцію

$$f = \frac{Q\omega_2 \wedge_0 \omega_5}{\omega_4 + \omega_2 \wedge_0 \omega_5}, \quad (2.12)$$

яка задовольняє умови $f|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_5} = 0$, $f|_{\partial\Omega_4} = Q$.

Тоді крайові умови (1.30) можна записати у вигляді

$$(\psi - f)|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5} = 0. \quad (2.13)$$

Введемо у розгляд диференціальний оператор $D_1^{(1,3)}$, який визначається рівністю

$$D_1^{(1,3)} = \frac{\partial}{\partial x}(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}.$$

Цей оператор має властивість

$$-D_1^{(1,3)}\psi \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = \frac{\partial\psi}{\partial\vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3},$$

де \vec{n} – зовнішня до $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$ нормаль.

Тоді крайову умову (1.29) можна записати у вигляді

$$D_1^{(1,3)}\psi \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0. \quad (2.14)$$

Пучок функцій, що задовольняє умові (2.13), очевидно, має вигляд

$$\psi = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi + f, \quad (2.15)$$

де Φ – невизначена компонента.

Подамо функцію Φ у вигляді

$$\Phi = \Phi_1 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 \quad (2.16)$$

і виберемо Ψ_1 так, щоб задовольнялася умова (2.14). З умови (2.14) випливає, що

$$D_1^{(1,3)}\psi = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2, \quad (2.17)$$

де Ψ_2 – деяка обмежена функція. Підставимо (2.16) у (2.15):

$$\Psi = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 + f \quad (2.18)$$

Підставляючи формулу (2.18) у (2.17) і враховуючи, що $D_1^{(1,3)}(uv) = uD_1^{(1,3)}v + vD_1^{(1,3)}u$, отримуємо

$$\begin{aligned} D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1) + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1 D_1^{(1,3)}(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) + \\ + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1) + D_1^{(1,3)}f = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Враховуючи, що

$$D_1^{(1,3)}(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) = 1 + O(\omega_1 \wedge_0 \omega_3) = 1 + \chi \omega_1 \wedge_0 \omega_3$$

і додаємо до обох частин рівності (2.19) $\omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1$, отримаємо

$$\begin{aligned} D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1) + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \cdot \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 + \\ + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1) + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1 + D_1^{(1,3)}f = \\ = \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_2 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Psi_1, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5) \Psi_1 = -D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1) - \\ - \omega_1 \wedge_0 \omega_3 (\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 - D_1^{(1,3)}[\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1] + \Psi_1 + \Psi_2) - \\ - D_1^{(1,3)}f. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Позначимо

$$\Phi_2 = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \chi \Psi_1 - D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Psi_1) + \Psi_1 + \Psi_2.$$

Тоді з (2.20) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -\frac{1}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} [D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1) + \\ & + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Phi_2 + D_1^{(1,3)} f]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Підставимо (2.21) у (2.18), отримаємо

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1 - \\ & - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} [D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi_1) + \omega_1 \wedge_0 \omega_3 \Phi_2 + D_1^{(1,3)} f] + f. \end{aligned}$$

Покладемо $\Phi_2 \equiv 0$, перепозначимо Φ_1 через Φ і позначимо

$$\varphi = f - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} D_1^{(1,3)} f,$$

де f має вигляд (2.12).

Тоді структура розв'язку задачі (6) – (9), що задовольняє умови (1.29), (1.30), має вигляд

$$\begin{aligned} \psi = B(\Phi) = & \varphi + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi - \\ & - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_1 \wedge_0 \omega_3 + \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5} D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для того, щоб задовольнити умови спряження (1.28) функцію течії $\psi(x, y)$ шукатимемо у вигляді

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \psi_1(x, y) = B(\Phi), & (x, y) \in \Omega_1; \\ \psi_2(x, y) = B(\Phi) - A\omega_{1-2}D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.23)$$

де $B(\Phi)$ має вигляд (2.22);

$\omega_{1-2}(x, y) = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{12}$ поділу двох ґрунтів, причому $\omega_{1-2} > 0$ в області Ω_2 ;

оператор $D_1^{(1-2)}$ визначається рівністю

$$D_1^{(1-2)} = \frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$$

і має властивість

$$D_1^{(1-2)}u \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}},$$

де \vec{n} – нормаль до $\partial\Omega_{12}$, що спрямована всередину Ω_2 . Тоді

$$D_1^{(1-2)}\omega_{1-2} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = 1.$$

Зауважимо, що функція вигляду (2.23) задовольняє на $\partial\Omega_{12}$ першій з умов спряження (1.28) за будь-якого вибору константи A . Тоді сталу A слід вибрати так, щоб задовольняти другу з умов спряження (1.28). Маємо

$$\begin{aligned} \kappa_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} &= \kappa_1 D_1^{(1-2)}\psi_1 \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \kappa_1 D_1^{(1-2)}(B(\Phi)) \Big|_{\partial\Omega_{12}}, \\ \kappa_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} &= \kappa_2 D_1^{(1-2)}\psi_2 \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_2 [D_1^{(1-2)}(B(\Phi)) - AD_1^{(1-2)}\omega_{12} \cdot D_1^{(1-2)}(B(\Phi)) - A\omega_{12}D_1^{(1-2)}[D_1^{(1-2)}(B(\Phi))]] \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \\
&= \kappa_2(1-A)D_1^{(1-2)}(B(\Phi)) \Big|_{\partial\Omega_{12}}.
\end{aligned}$$

Тоді $\kappa_1 = \kappa_2(1-A)$, звідки $A = 1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2}$. Отже,

$$\psi(x, y) = \begin{cases} B(\Phi), & (x, y) \in \Omega_1; \\ B(\Phi) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{1-2} D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (2.24)$$

Отже, загальна структура розв'язку крайової задачі (1.27) – (1.30) має вигляд (2.24), де $B(\Phi)$ визначається формулою (2.22).

$$\text{Позначимо } \zeta = \begin{cases} \varphi, & (x, y) \in \Omega_1; \\ \varphi - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{12} D_1^{(1-2)}\varphi, & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

У задачі (1.27) – (1.30) зробимо заміну

$$\psi(x, y) = \zeta(x, y) + u(x, y),$$

де $u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \\ u_2(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$ – нова невідома функція. Це приводить до за-

вдання з однорідними крайовими умовами

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F \text{ у } \Omega, \quad (2.25)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_4 \cup \partial\Omega_5} = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad (2.27)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_{12}} = u_2|_{\partial\Omega_{12}}, \quad \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}} = \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega_{12}}, \quad (2.28)$$

де позначено $F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \in L_2(\Omega)$.

Введемо у розгляд оператор крайової задачі (1.27) – (1.30), що діє в $L_2(\Omega)$ за правилом

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.29)$$

з областю визначення $D_A \subset L_2(\Omega)$, що з тих функцій $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, які задовольняють крайові умови (2.26) – (2.28).

Можна довести, що оператор A є додатно-означеним. Отже, функція u може бути знайдена як мінімум функціонала енергії $(Au, u) - 2(u, F)$ [25], а структуру розв'язку крайової задачі (2.25) – (2.28) можна взяти у вигляді

$$u = \begin{cases} B_1(\Phi), & (x, y) \in \Omega_1; \\ B_1(\Phi) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{12} D_1^{(1-2)}(B_1(\Phi)), & (x, y) \in \Omega_2; \end{cases}$$

де

$$B_1(\Phi) = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3} D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \Phi);$$

Φ – невизначена компонента.

Замкнувши множину D_A у метриці, породженою нормою

$$\|u\|_{H_A}^2 = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy,$$

отримаємо енергетичний простір H_A зі скалярним добутком

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Невизначену компоненту Φ подаємо у вигляді

$$\Phi \approx \Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \tau_i,$$

де $\{\tau_i\}$ – будь-яка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій (тригонометричні або степеневі поліноми, сплайни та ін.). Тоді система функцій $\{\varphi_i\}$, де

$$\varphi_i = \begin{cases} B_1(\tau_i), & (x, y) \in \Omega_1; \\ B_1(\tau_i) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{12} D_1^{(1-2)}(B_1(\tau_i)), & (x, y) \in \Omega_2; \end{cases} \quad (2.30)$$

$$B_1(\tau_i) = \omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \tau_i - \frac{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \cdot \omega_1 \wedge_0 \omega_3}{\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 + \omega_1 \wedge_0 \omega_3} D_1^{(1,3)}(\omega_2 \wedge_0 \omega_4 \wedge_0 \omega_5 \tau_i),$$

є координатною, тобто

- а) $\varphi_i \in H_A$, $i = 1, 2, \dots$;
- б) за будь-якої n функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ лінійно незалежні;
- в) система $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ повна в H_A .

Відповідно до методу Ритца для коефіцієнтів c_1, \dots, c_n отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n [\varphi_i, \varphi_j] c_i = (F, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.31)$$

Тим самим ми побудуємо наближений розв'язок u_n задачі (2.25) – (2.28):

$$u_n = \begin{cases} B_1(\Phi_n), & (x, y) \in \Omega_1; \\ B_1(\Phi_n) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{12} D_1^{(1-2)}(B_1(\Phi_n)), & (x, y) \in \Omega_2. \end{cases} \quad (2.32)$$

Збіжність відповідної послідовності наближених розв'язків $\psi_n = \zeta + u_n$ задачі (1.27) – (1.30) до точного розв'язку (загалом кажучи, узагальненого) впливає з теорем про збіжність методу Ритца [25].

Висновки за розділом 2

Було проведено вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі математичного моделювання фільтраційної течії у кусково-неоднорідному ґрунті.

1. Розглянуто основні відомості щодо теорії методу R -функцій та її застосування для розв'язування оберненої задачі аналітичної геометрії та побудови структур розв'язку крайових задач математичної фізики, з'ясовано доцільність застосування структурного методу (методу R -функцій) для розв'язування поставленої задачі теорії фільтрації.

2. Розглянуто застосування методів теорії R -функцій до побудови структури розв'язку задачі розрахунку фільтраційної течії у кусково-неоднорідному ґрунті. Для апроксимації невизначеної компоненти структури описано застосування методу Рітца, що дозволяє отримати наближений розв'язок поставленої задачі у аналітичному вигляді.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3

Система Mathematica 13.3 є потужною системою комп'ютерної алгебри, що розроблена компанією Wolfram Research. Остання на сьогодні версія 13.3 включає безліч нових функцій і вдосконалень, які роблять її однією з провідних платформ для символічних обчислень, чисельного аналізу, візуалізації даних та моделювання. Mathematica дозволяє виконувати складні символічні маніпуляції, такі як спрощення виразів, інтегрування, диференціювання та розв'язування рівнянь. Також система підтримує широкий спектр чисельних методів для розв'язання диференціальних рівнянь, оптимізації, статистичного аналізу тощо. Mathematica має потужні інструменти для візуалізації даних та функцій, що дозволяє створювати інтерактивні графіки та анімації. Крім того, пакет включає функції для реалізації алгоритмів машинного навчання, що дозволяє користувачам легко впроваджувати ці технології у свої проєкти [26].

Mathematica може взаємодіяти з Python, Java, C/C++ та іншими мовами програмування, що розширює її функціональність. Вона має велику бібліотеку документації та активне співтовариство користувачів, що полегшує процес навчання та вирішення проблем.

Mathematica часто порівнюють з іншими популярними системами комп'ютерної алгебри, такими як MATLAB, Maple, SageMath та Maxima. Кожна з цих систем має свої переваги та недоліки. Так, наприклад, MATLAB є сильним у чисельному аналізі та обробці матриць, має великий набір бібліотек для інженерних застосувань, але є менш потужним у символічних обчисленнях у порівнянні з Mathematica. Пакет Maple відома своєю потужною системою символічних обчислень і математичного аналізу, проте його інтерфейс може бути менш інтуїтивно зрозумілим, ніж у Mathematica. Система SageMath має відкритий код і безкоштовність, об'єднує багато інших систем, але може бути менш стабільною і мати меншу продуктивність у порівнянні з комерційними продуктами.

І нарешті, пакет *Mathima* є безкоштовною системою з хорошими можливостями для символічних обчислень. Проте вона обмежена в плані візуалізації та інтеграції з іншими мовами.

Безумовними є також переваги *Mathematica* при моделюванні фізико-механічних полів. Так, символічні та чисельні методи в одному середовищі: *Mathematica* дозволяє одночасно використовувати символічні та чисельні методи, що є важливим для моделювання складних фізичних явищ, де необхідно отримати аналітичні рішення разом із чисельними апроксимаціями. Далі, можливість створення високоякісних графіків і візуалізацій допомагає краще зрозуміти результати моделювання, демонструючи зміни полів у просторі та часі. Також завдяки зрозумілому синтаксису та потужним вбудованим функціям, користувачі можуть швидко реалізувати складні математичні моделі, такі як рівняння Максвелла або рівняння Нав'є-Стокса. Ще однією перевагою пакета *Mathematica* є наявність адаптивних методів для чисельного інтегрування і диференціювання, що є критично важливим для точності розрахунків у фізико-механічних задачах. І, крім того, для великих задач моделювання *Mathematica* підтримує паралельні обчислення, що значно скорочує час розрахунків.

Отже, *Mathematica 13.3* є потужним інструментом для комп'ютерної алгебри з широкими можливостями для моделювання фізико-механічних полів. Її переваги в символічних і чисельних обчисленнях, візуалізації даних і інтеграції з іншими технологіями роблять її вибором номер один для багатьох науковців і інженерів. У порівнянні з іншими системами комп'ютерної алгебри *Mathematica* пропонує унікальне поєднання потужності, гнучкості та зручності використання.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах

З огляду на викладене у п. 2.3 алгоритм розв'язання задачі математичного

моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах можна задати наступними етапами:

а) задати фізичні параметри процесу фільтрації (коефіцієнти фільтрації κ_1 і κ_2 , загальні витрати Q рідини у області фільтрації) та геометрію області Ω , у якій відбувається зазначений процес;

б) побудувати методом R -функцій нормалізоване рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області Ω , нормалізовані рівняння її ділянок $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, та нормалізоване рівняння $\omega_{1-2}(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega_{12}$ поділу двох ґрунтів;

в) обрати повну систему $\{\tau_k\}$ та задати за формулою (2.30) послідовність координатних функцій;

г) обрати номер наближення n ;

д) сформувати матрицю Рітца $A = \{[\varphi_k, \varphi_j]\}_{k, j=1, \dots, n}$ і вектор $b = \{(F, \varphi_j)\}_{j=1, \dots, n}$;

е) розв'язати систему Рітца (2.31) для визначення коефіцієнтів c_1, \dots, c_n ;

є) записати наближений розв'язок задачі $\psi_n = \zeta + u_n$ з урахуванням формули (2.32);

ж) провести аналіз та візуалізацію побудованого наближеного розв'язку.

3.3 Опис програми

Алгоритм розв'язання задачі математичного моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах, розроблений у п. 3.2, було програмно реалізовано у системі Mathematica 13.3. Програма складається з наступних блоків.

Блок 1. Задання та аналітичний опис геометрії області. У цьому блоці користувач має задати лінійні розміри області. Далі задаються R -операції системи \mathfrak{R}_0 та будуються функції $\omega(x, y)$, $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, і $\omega_{1-2}(x, y)$ такі, що рівняння $\omega(x, y) = 0$ є нормалізованим рівнянням межі $\partial\Omega$, рівняння $\omega_i(x, y) = 0$,

$i = 1, 2, 3, 4, 5$, є нормалізованими рівняннями ділянок межі $\partial\Omega$, а рівняння $\omega_{1-2}(x, y) = 0$ є нормалізованим рівнянням лінії розділу $\partial\Omega_{12}$ середовищ з різними коефіцієнтами фільтрації.

Блок 2. Задання фізичних параметрів процесу. У цьому блоці користувач має задати коефіцієнти фільтрації κ_1 і κ_2 середовищ, що займають області Ω_1 і Ω_2 , а також загальні витрати Q рідини у області фільтрації.

Блок 3. Задання координатної послідовності. У цьому блоці задається порядок наближення n , задаються послідовності $\{\tau_k\}$ та координатних функцій $\{\varphi_k\}$ за формулою (2.30), а також задаються їх частинні похідні.

Блок 4. Формування та розв'язування системи Рітца. У цьому блоці обчислюються елементи $[\varphi_k, \varphi_j]$ матриці Рітца $A = \{[\varphi_k, \varphi_j]\}_{k, j=1, \dots, n}$ і обчислюються елементи (F, φ_j) вектора $b = \{(F, \varphi_j)\}_{j=1, \dots, n}$, а також розв'язується система Рітца (2.31) для визначення коефіцієнтів c_1, \dots, c_n .

Блок 5. Виведення результатів. У цьому блоці записується наближений за Рітцем розв'язок задачі $\psi_n = \zeta + u_n$ (з урахуванням формули (2.32)) і за допомогою функції ContourPlot побудовано лінії течії фільтраційного потоку.

Лістинг програми наведено у додатку А.

Висновки за розділом 3

Для розв'язання поставленої задачі була обрана система Mathematica 13.3.

1. Описано особливості системи Mathematica 13.3, зокрема її переваги при розв'язуванні задач математичного моделювання фізико-механічних полів.

2. Розроблено алгоритм розв'язування задачі математичного моделювання фільтраційних течій у кусково-неоднорідних середовищах.

3. Описано розроблену у системі Mathematica 13.3 програму за побудованим алгоритмом.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Обчислювальний експеримент було проведено для випадків, коли флютбет має прямокутний переріз. Для розрахунків обрано $L = 3$, а висота водопроникного шару $H = 1$. Розглянуто випадок заглиблення флютбета $h = 0,25$ зі сталою шириною, що дорівнює 1, випадки різного розташування шпунта. Було прийнято, що межі $\partial\Omega_1$ та $\partial\Omega_3$ – плоскі. Розглянуто випадок, коли водоупор $\partial\Omega_4$ плоский. Область фільтрації Ω складається з двох підобластей Ω_1 і Ω_2 , причому підобласть Ω_2 визначається нерівністю $r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 \geq 0$ (у розрахунках було покладено $r = 0,25$, $x_0 = -1$, $y_0 = 0,5$). У всіх випадках коефіцієнт фільтрації обирали у вигляді: $\kappa(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_1, \\ 0,5, & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$ тобто $\kappa_1 = 1$, а $\kappa_2 = 0,5$, а витрати рідини $Q = 1$.

4.1 Обчислювальний експеримент для флютбету з одним шпунтом

У першому експерименті обрано, що заглиблення флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, один шпунт довжини 0,25. Область показана на рисунку 4.1.

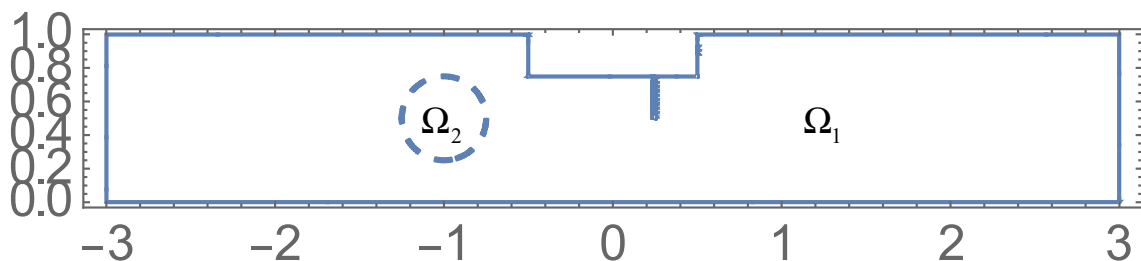


Рисунок 4.1 – Розрахункова область для першого експерименту

У цьому випадку

$$\omega_1(x, y) = \omega_3(x, y) = 1 - y; \quad \omega_2(x, y) = (y - 0,75) \wedge_0 (0,25 - x^2); \quad \omega_4(x, y) = y;$$

$$\omega_5(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1^2(x, y) + \tau_2^4(x, y)} - \tau_1(x, y)}{2} \right)^2 + \tau_2^2(x, y)},$$

$$\omega_{1-2}(x, y) = 2(0,0625 - (x+1)^2 - (y-0,5)^2),$$

де $\tau_1(x, y) = 2(0,0625 - (x-0,25)^2 - (y-0,75)^2)$, $\tau_2(x, y) = x - 0,25$.

Позначимо

$$\omega_L(x, y) = \frac{1}{6}(9 - x^2) \wedge_0 y, \quad \omega_U(x, y) = \omega_5(x, y) \wedge_0 (-\omega_2(x, y)),$$

$$\omega_B(x, y) = -(y-1) \wedge_0 \left\{ \left[\frac{1}{6}(9 - x^2) \wedge_0 (\omega_1(x, y) \cdot \omega_4(x, y)) \right] \wedge_0 [-\omega_2(x, y)] \right\}.$$

Тоді

$$\varphi_1(x, y) = \frac{\omega_U(x, y)}{\omega_U(x, y) + \omega_L(x, y)};$$

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, y) - \frac{(\omega_L(x, y) \wedge_\alpha \omega_U(x, y)) \cdot \omega_B(x, y)}{\omega_L(x, y) \wedge_\alpha \omega_U(x, y) + \omega_B(x, y)} \cdot D^{(B)}\varphi_1(x, y),$$

де $D^{(B)}\varphi = \frac{\partial \omega_B}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \omega_B}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Структуру розв'язку отримаємо у вигляді

$$\psi(x, y) = \begin{cases} B(\Phi), & (x, y) \in \Omega_1; \\ B(\Phi) - \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \omega_{1-2}(x, y) D_1^{(1-2)}(B(\Phi)), & (x, y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$\text{де } D_1^{(1-2)}\varphi = \frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{1-2}}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

$$B(\Phi) = \varphi_2(x, y) + \omega_L(x, y) \wedge_0 \omega_U(x, y)\Phi(x, y) - \\ - \frac{[\omega_L(x, y) \wedge_0 \omega_U(x, y)] \cdot \omega_B(x, y)}{\omega_L(x, y) \wedge_0 \omega_U(x, y) + \omega_B(x, y)} \cdot D^{(B)}[\omega_L(x, y) \wedge_0 \omega_U(x, y)\Phi(x, y)].$$

Тут $\Phi(x, y)$ – невизначена компонента, подамо її у вигляді

$$\Phi(x, y) = \sum_{m+n=0}^N c_{mn} P_m\left(\frac{x}{3}\right) P_n(2y-1),$$

де $P_k(t)$ – поліноми Лежандра.

На рисунку 4.2 зображена картина ліній рівня ($\delta\psi = 0,1$) наближеного розв'язку для $N = 5$ (21 базисна функція).

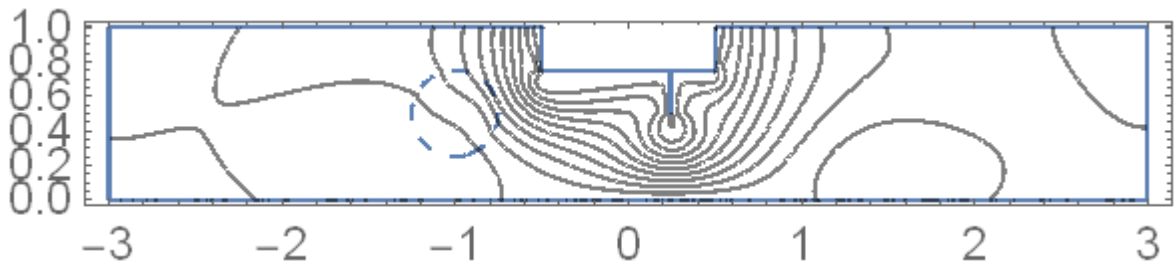


Рисунок 4.2 – Лінії рівня функції течії для першого експерименту

Для другого експерименту обрано, що заглиблення флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, один шпунт довжини $0,5$. Область наведена на рисунку 4.3.

У цьому випадку зміниться вираз для $\tau_1(x, y)$:

$$\tau_1(x, y) = 0,25 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2.$$

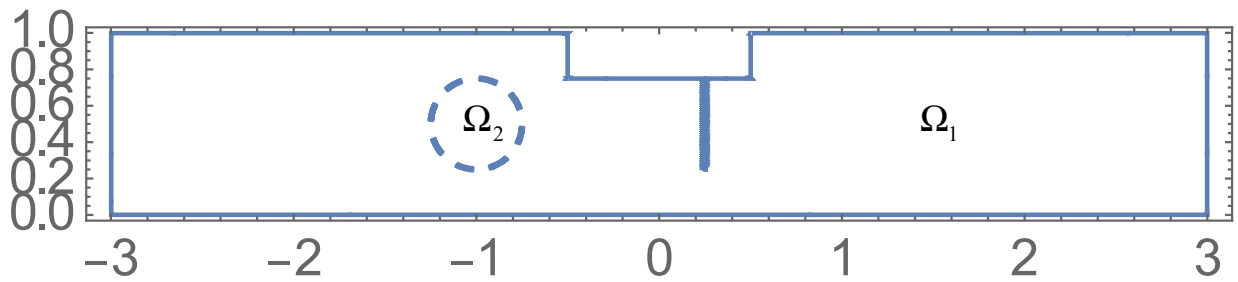


Рисунок 4.3 – Розрахункова область для другого експерименту

На рисунку 4.4 наведено картину ліній рівня ($\delta\psi = 0,1$) наближеного розв'язку для $N = 5$ (21 базисна функція).

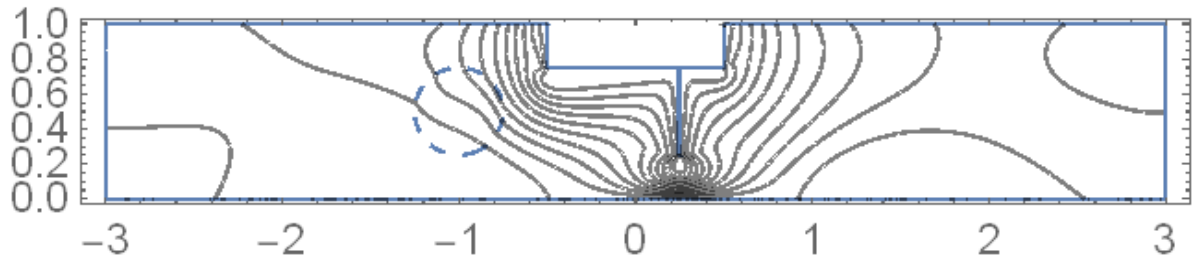


Рисунок 4.4 – Лінії рівня функції течії для другого експерименту

4.2 Обчислювальний експеримент для флютбета з двома шпунтами

Для третього експерименту обрано, що заглиблення флютбета $h = 0,25$, водоупор плоский, два шпунта довжини 0,25 та 0,5, розташовані симетрично. Область показана на рисунку 4.5.

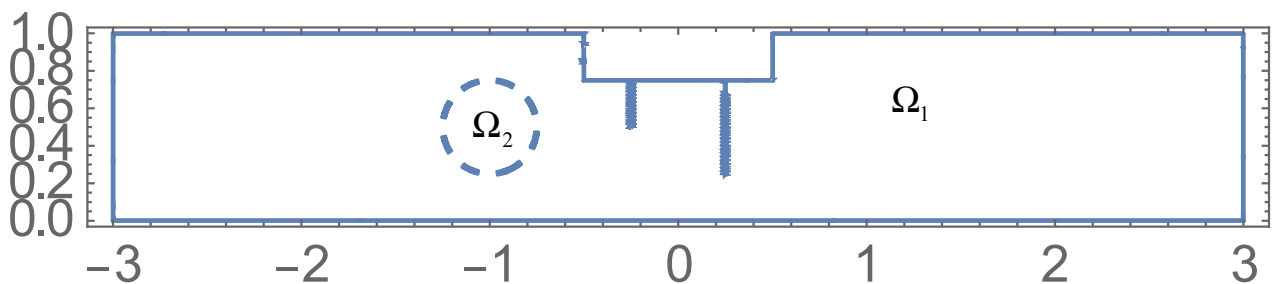


Рисунок 4.5 – Розрахункова область для третього експерименту

У цьому випадку

$$\omega_5(x, y) = \omega_5'(x, y) \wedge_0 \omega_5''(x, y),$$

де

$$\omega_5'(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1'^2(x, y) + \tau_2'^4(x, y)} - \tau_1'(x, y)}{2} \right)^2 + \tau_2'^2(x, y)},$$

$$\omega_5''(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\tau_1''^2(x, y) + \tau_2''^4(x, y)} - \tau_1''(x, y)}{2} \right)^2 + \tau_2''^2(x, y)},$$

$$\tau_1'(x, y) = 0,25 - (x - 0,25)^2 - (y - 0,75)^2, \quad \tau_2'(x, y) = x - 0,25,$$

$$\tau_1''(x, y) = 2(0,0625 - (x + 0,25)^2 - (y - 0,75)^2), \quad \tau_2''(x, y) = x + 0,25.$$

На рисунку 4.6 наведено картину ліній рівня ($\delta\psi = 0,1$) наближеного розв'язку для $N = 5$ (21 базисна функція).

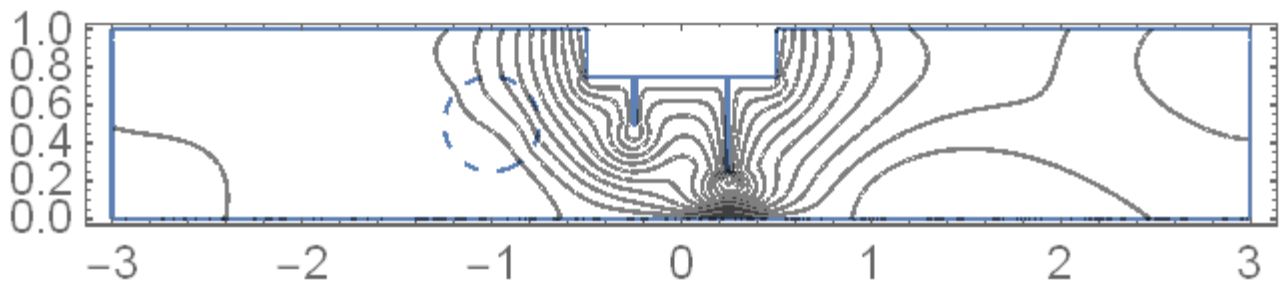


Рисунок 4.6 – Лінії рівня функції течії для третього експерименту

Отримані наближені розв'язки добре узгоджуються з фізичним сенсом задачі. Час обчислення на розглянутих тестових прикладах близько 60-90 хв.

Проектувальників гідротехнічних споруд цікавлять в основному такі три величини:

а) витрати рідини;

б) максимальний і загальний тиск на флютбет;

г) максимальна вихідна швидкість.

Аналіз отриманих наближених розв'язків дає змогу зробити такі висновки.

1. Якщо збільшити довжину одного або декількох шпунтів, то всі лінії току знизяться, витрати зменшаться, вихідна швидкість зменшиться. Якщо намагатися зменшити вихідну швидкість, то найефективнішим є подовження крайнього правого шпунта.

2. Якщо збільшити довжину одного шпунта, то тиск на флютбет ліворуч від цього шпунта збільшиться, а праворуч – зменшиться; зокрема, збільшення довжини крайнього правого шпунта збільшить тиск на флютбет усюди.

3. Наявність в області фільтрації підобласті з коефіцієнтом фільтрації, що є меншим, ніж у іншій частині області, приводить до уповільнення фільтраційної течії у зазначеній підобласті.

Висновки за розділом 4

Проведено обчислювальний експеримент для тестових задачі розрахунку фільтраційних течій в кусково-неоднорідних середовищах. Результати обчислювального експерименту представлені у графічній формі у вигляді ліній рівня функції течії. Аналіз результатів показує, що застосування до розв'язування задачі математичного моделювання фільтраційних течій в кусково-неоднорідних середовищах структурного методу (методу R -функцій) дає хороші результати, які добре співвідносяться як з математичною постановкою задачі, так і з її фізичним змістом.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було застосовано структурний метод (метод R -функцій) у поєднанні з варіаційним методом Рітца до чисельного аналізу фільтраційних течій в кусково-неоднорідних середовищах.

1. Було проведено аналіз математичних моделей процесів фільтрації та методів їх чисельного аналізу. Зроблено висновок про перспективність застосування до математичного моделювання фільтраційних течій в кусково-неоднорідних середовищах саме структурного методу академіка НАН України В.Л. Рвачова.

2. На основі сумісного застосування методів R -функцій та Рітца розроблено алгоритм чисельного аналізу математичної моделі, що описує фільтраційну течію в кусково-неоднорідному середовищі.

3. Програмно реалізовано розроблений алгоритм у системі комп'ютерної алгебри Mathematica 13.3 і за допомогою розробленої програми проведено обчислювальний експеримент для трьох тестових задач, що підтвердило ефективність застосованого методу.

4. Дослідження фільтраційних течій в кусково-неоднорідних середовищах може бути застосовано, зокрема, у гідроенергетиці при розрахунку гідротехнічних споруд.

5. Результати, отримані у роботі, можуть бути використані для створення та аналізу комп'ютерних моделей, програм або алгоритмів, що зможуть вдосконалити та оптимізувати проведення математичного моделювання фільтраційних течій.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Бойко В. С., Бойко Р. В. Підземна гідрогазомеханіка. Львів : «Апріорі», 2005. 452 с.
2. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И. И. Ляшко, Н. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. Киев : Наукова думка, 1977. 288 с.
3. Ляшко Н. И., Великоиваненко Н. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. Киев : Наукова думка, 1973. 264 с.
4. Молчанов В. Ф. Постановка нестационарной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде. *Математичне моделювання*. 2014. №1. С. 28-30.
5. Кондрат В. Ф., Лопушанський Я. Й. Математичне моделювання переносу забруднень в ґрунтах за стимулюючої дії механічних коливань. *Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності*. 2015. № 12. С. 119 – 131.
6. Саленко О. Ф., Орел В. М., Мана О. М., Корцов, М. І. Фільтрація води при експлуатації гідрорізного обладнання та покращення якості фільтрації за рахунок нових методів. *Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія "Технічні науки"*. 2016. № 4(75). С. 60 – 68.
7. Молчанов В. Ф. Постановка и решение нестационарной граничной задачи фильтрации жидкостей в пористой среде. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*. 2018. Т. 1, № 32. С. 53 – 58.
8. Молчанов В. Ф., Чернишов О. В. Постановка нестационарної граничної задачі фільтрації рідини у пористому середовищу. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. 2019. № 2 (46). С. 150 – 154.
9. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5, no. 5 (107). P. 41 – 48.
10. Сидоров М. В., Стороженко А. В. Математическое и компьютерное

моделирование некоторых фильтрационных течений. *Радиоэлектроника и информатика*. 2004. № 4 (29). С. 58 – 61.

11. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R -функций. *Радиоэлектроника и информатика*. 2010. № 2 (49). С. 40 – 46.

12. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Математическое моделирование стационарных фильтрационных течений со свободной границей методом R -функций. *АСУ и приборы автоматизации*. Вып. 150. 2010. С. 18 – 27.

13. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Численный анализ стационарных фильтрационных течений со свободной границей структурно-вариационным методом. *АСУ и приборы автоматизации*. Вып. 151. 2010. С. 15 – 21.

14. Блишун А.П. Метод R -функций в задачах стационарной фильтрации со свободной границей. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2011. № 2. С. 29 – 37.

15. Блишун А. П., Сидоров М. В., Яловега И. Г. Применение метода R -функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2012. № 1. С. 50 – 56.

16. Блишун А. П., Сидоров М. В. Метод численного анализа стационарного фильтрационного течения под гидротехническим сооружением в кусочно-однородному грунте. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2012. № 2. С. 5 – 12.

17. Блишун А.П. Численный метод расчета фильтрационного течения под флютбетом при наличии линз. *Радиоэлектроника и информатика*. 2012. № 3 (58). С. 18 – 22.

18. Подгорний О. Р., Сидоров М. В. Застосування методу R -функцій до аналізу фільтраційних течій у кусково-однорідному середовищі. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. №4 (83). С. 32 – 37.

19. Подгорний О. Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R -функцій для їх чисельного аналізу. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2018. № 1 (80). С. 40 – 47.
20. Подгорний О. Р. Чисельний аналіз методом R -функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2018. Вип. 18. С. 113 – 125.
21. Подгорный А. Р., Сидоров М. В. Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений. *Вестник Казахского национального университета. Серия математика, механика, информатика*. 2019. № 1 (101). С. 115 – 131.
22. Podhornyj O. R., Sidorov M. V. Mathematical modeling of fluid flows through the piecewise homogeneous porous medium by R-function method. *Mathematical Modeling and Computing*. 2021. Vol. 8, no. 3. P. 499 – 508.
23. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физики. Киев : Наукова думка, 1974. 260 с.
24. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.
25. Колосова С. В. Вариационные методы приближенного решения краевых задач и интегральных уравнений. Киев : УМК ВО, 1990. 72 с.
26. Wolfram Mathematica. URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> (дата звернення: 26.12.2024).